ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ ГОРЕНШТЕЙНОВЫХ КВАЗИ-ОДНОРОДНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С. М. Натанзон, А. М. Пратусевич

1. В этой работе мы описываем топологию пространства горенштейновых гиперболических квази-однородных особенностей поверхностей. Мы определяем количество компонент связности этого пространства и описываем их топологию. Квази-однородные особенности поверхностей и их аффинные координатные кольца активно изучались в 70-е годы Долгачевым, Мильнором, Нойманом, Пинкхамом и другими. Они описали соответствие между квази-однородными особенностями поверхностей и особыми линейными комплексными расслоениями над компактными римановыми орбифолдами. Мы называем особенность гиперболической, если соответствующий орбифолд гиперболический, т.е. вида $\mathbb{H}/\Gamma$, где $\mathbb{H}$ гиперболическая плоскость и Γ фуксова группа. Нормальная изолированная особенность поверхности горенштейнова если на проколотой окрестности особой точки существует везде ненулевая голоморфная 2-форма. К примеру все изолированные особенности полных пересечений горенштейновы. Долгачев [1] показал, что горенштейновы гиперболические квази-однородные особенности поверхностей уровня m однозначно соответствуют особым m-коспинорным расслоениям над компактными гиперболическими римановыми орбифолдами, т.е. линейным расслоениям, m-ая степень которых изоморфна касательному расслоению.

Имеется взаимно однозначное соответствие между m-коспинорными и m-спинорными расслоениями. Классические (т.е. $m = 2$) спинорные расслоения на компактных римановых поверхностях совпадают с тэта-характеристиками Римана. Их современная интерпритация и классификация, предложены Атьей [3] и Мамфордом [4]. Они связали (классические) спинорные расслоения на компактных поверхностях с (классическими) функциями Арфа т. е. квадратичными (относительно индекса пересечения на $H_1(P, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$) функциямими $H_1(P, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Классификация 2-спинорных расслоений и их модулей на некомпактных поверхностях дана в [4]. Описание пространств модулей m-спинорных расслоений дано в [5] для компактных поверхностей с проколами и в [6], [7] для поверхностей с произвольной конечно порожденной фундаментальной группой.

2. Пусть P это компактный гиперболический риманов орбифолд. Мы связываем с m-спинорной структурой на P функцию на множестве гомотопических классов простых контуров на P.

Определение. Пусть $p \in P$. Пусть $\pi_1^0(P, p) \subset \pi_1(P, p)$ это подмножество фундаментальной группы орбифолда, состоящее из элементов, представимых простыми контурами. Отображение $\sigma : \pi_1^0(P, p) \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ назовем *m-функцией Арфа*, если для любых элементов $a, b \in \pi_1^0(P, p)$ 1) $\sigma(bab^{-1}) = \sigma(a)$; 2) $\sigma(a^{-1}) = -\sigma(a)$, если порядок элемента a не равен 2; 3) $\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b)$, если a и b можно представить простыми контурами таким образом, чтобы точка p была их единственной общей точкой и их индекс пересечения не 0; 4) $\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b) - 1$, если: а) a и b можно представить простыми контурами таким образом, чтобы точка p была их единственной общей точкой и их индекс пересечения равен 0, б) ориентированные контуры a,b и $(ab)^{-1}$ свободно гомотопны попарно не пересекающимся простым контурам $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ ориентации которых противоположны индуцированым комплексной структурой сферы с 3 дырами, которую они

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ-10-01-00678-а, НШ-8462.2010.1, SFB 611 (DFG), RCMM (Liverpool)

отсекают от P; 5) Для всякого эллиптического элемента c порядка p число $p \cdot \sigma(c) + 1$ делится на m.

Теорема 1. Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между горенштейновыми гиперболическими квази-однородными особенностями поверхностей уровня m и m-функциями Арфа на компактных гиперболических римановых орбифолдах.

Доказательство основано на связи между m-спинорными расслоениями на орбифолде $\mathbb{H}/\Gamma$ и поднятиями фуксовой группы $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ на единственное m-листнное накрытие $\varphi : G_m \to PSL(2,\mathbb{R})$.

3. Опишем теперь простейшие топологические инварианты m-функций Арфа σ. К ним мы отнесем род g орбифолда P и порядки $p_1,\dots,p_r$ особых точек на P. Из определения m-функций Арфа сразу следует, что группа Mod гомотопических классов сохраняющих ориентацию автогомеоморфизмов орбифолда P естественно действует на множестве Σ всех m-функций Арфа на P.

Теорема 2. Множество Σ всех m-функций Арфа на компактном гиперболическом орбифолде P сигнатуры $(g : p_1,\dots,p_r)$ не пусто, если и только если порядки $p_1,\dots,p_r$ взаимно просты с m и $(p_1 \cdots p_r)\cdot(\sum_{1\le i\le r} 1/p_i - (2g-2) - r)$ делится на m. В этом случае число m-функций Арфа равно m^{2g}. Действие группы Mod на непустом множестве Σ транзитивно, если $g = 0$; транзитивно, если $g > 1$ и m нечетно; имеет ровно 2 орбиты, если $g > 1$ и m четно; имеет число орбит равное числу делителей НОД$(m, p_1 - 1, \dots, p_r - 1)$, если $g = 1$.

Доказательство использует явный вид дэновских образующих группы Mod.

4. Используем теперь m-функции Арфа для изучения пространства S^m гиперболических горенштейновых квази-однородных особенностей поверхностей уровня m. Пространство S^m естественно распадается на подмножества $S^m_{g:p_1,\dots,p_r}$, отвечающие простейшим топологическим инвариантам соответствующих m-функций Арфа. Из теоремы 2 сразу следует

Теорема 3. Пространство $S^m_{g:p_1,\dots,p_r}$ не пусто, если и только если порядки $p_1,\dots,p_r$ взаимно просты с m и $(p_1 \cdots p_r)\cdot(\sum_{1\le i\le r} 1/p_i - (2g-2) - r)$ делится на m. Непустое пространство $S^m_{g:p_1,\dots,p_r}$ связно, если $g = 0$; связно, если $g > 1$ и m нечетно; имеет ровно две компоненты связности, если $g > 1$ и m четно; имеет число компонент связности равное числу делителей НОД$(m, p_1 - 1, \dots, p_r - 1)$, если $g = 1$.

Используя теоремы 1, 2, 3 и теорему Фрике-Клейна [8] в форме [9], можно доказать

Теорема 4. Каждая компонента связности пространства $S^m_{g:p_1,\dots,p_r}$ гомеоморфна $\mathbb{R}^d/G$, где $d = 6g - 6 + 2r$ и $G \subset \mathrm{Mod}$ - дискретная группа.

Список литературы

1. I.V.Dolgachev // Math. Ann. 1983. V.265. P.529-540. 2. M.F.Atiyah // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 1971. V.4. P.47-62. 3. D.Mumford // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 1971. V.4 P.181-192. 4. С.М.Натанзон // Матем. заметки. 1989. Т.45. N4. С.111-116. 5. T.J.Jarvis //Internat. J. Math. 2000. V.11. No. 5. P.637-663. 6. С.Натанзон, А.Пратусевич // Успехи мат. наук. 2005. Т.60. N2(362). С.169-170. 7. S.Natanzon, A.Pratoussevitch // Journal of Lie Theory. 2009. V.19. P.107-148. 8. R.Fricke, F.Klein // Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Band 1: Die gruppentheoretischen Grundlagen. Band II: Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Andwendungen, Bibliotheca Mathematica Teubneriana, Bande 3, vol. 4, Johnson Reprint Corp., New York. 1965. 9. С.М.Натанзон // Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги. М.: МЦНМО, 2003. 176 С.

С.М.Натанзон

Математический факультет ВШЭ; ИФХБ им. А.Н. Белозерского, МГУ; ИТЭФ.

E-mail: natanzons@mail.ru

А.М.Пратусевич

Department of Mathemamtical Sciences, University of Liverpooll

E-mail: annap@liv.ac.uk