Н. И. Жукова, Е. А. Рогожина, Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий, *Сиб. матем. журн.*, 2012, том 53, номер 6, 1292–1309

*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6*

*УДК 514.77*

# КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПАКТНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ 2–ОРБИФОЛДОВ С НЕКОМПАКТНОЙ ПОЛНОЙ ГРУППОЙ ИЗОМЕТРИЙ

**Н. И. Жукова, Е. А. Рогожина**

**Аннотация.** Как известно, среди замкнутых лоренцевых поверхностей только плоские торы могут допускать некомпактную полную группу изометрий. Кроме того, для любого $n \geq 3$ стандартный плоский $n$-мерный тор с канонической метрикой имеет некомпактную полную группу Ли изометрий. Показано, что при $n = 2$ это неверно. Получена классификация плоских лоренцевых метрик на торе с некомпактной полной группой Ли изометрий. Доказано также, что любой двумерный лоренцев орбифолд является очень хорошим. Благодаря этому доказано существование единственного гладкого компактного 2-орбифолда, называемого подушкой, допускающего лоренцевы метрики с некомпактной полной группой изометрий, и получена классификация таких метрик. Приведены примеры.

**Ключевые слова:** лоренцев орбифолд, лоренцева поверхность, группа изометрий, аносовский автоморфизм тора.

## Введение

Лоренцева геометрия широко применяется в физике и значительно отличается от собственно римановой геометрии.

Орбифолды можно рассматривать как многообразия с особенностями, причем многообразия совпадают с орбифолдами, все точки которых регулярны. Точные определения и теоремы из теории орбифолдов можно найти, например, в [1]. Категория орбифолдов обозначается через $\mathcal{O}rb$.

Группа всех изометрий лоренцева орбифолда $(M, g)$ называется *полной* и обозначается через $\mathfrak{I}(M, g)$. Из результатов А. В. Багаева, Н. И. Жуковой [2] (см. также [3, 4]) вытекает, что она является группой Ли размерности не выше $n(n + 1)/2$, где $n$ — размерность орбифолда $M$. В отличие от компактных римановых орбифолдов [5] группа изометрий $\mathfrak{I}(M, g)$ компактного лоренцева орбифолда, вообще говоря, некомпактна.

Напомним, что гладкое действие группы Ли $G$ на орбифолде $M$:

$$G \times M \to M : (g, x) \mapsto g \cdot x \quad \forall (g, x) \in G \times M,$$

называется *собственным*, если сходимость двух последовательностей $g_n \cdot x_n \to y$ и $x_n \to x$ в $M$, где $g_n \in G$ и $x_n, x, y \in M$, влечет существование сходящейся подпоследовательности $\{g_{n_k}\}$ в $G$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00457–а) и ФЦП «Кадры» (проект 14.B37.21.0361).

Отметим, что группа Ли $\mathfrak{I}(M, g)$ изометрий компактного лоренцева орбифолда $(M, g)$ некомпактна тогда и только тогда, когда она действует несобственно на орбифолде $M$.

Несобственные действия групп изометрий на лоренцевых компактных многообразиях исследовались в работах [6–9] и др. (см. обзор [10]).

Полная группа изометрий лоренцевых метрик на двумерном торе, допускающих 1-параметрическую группу изометрий, изучалась в [11, 12].

Целью данной работы является рассмотрение компактных двумерных лоренцевых орбифолдов, допускающих несобственное действие группы изометрий.

Через $\mathbb{Z}^n$ обозначается целочисленная решетка на $n$-мерной плоскости $\mathbb{R}^n$. Тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ называется *стандартным.*

Под замкнутой лоренцевой поверхностью понимается связное компактное двумерное лоренцево многообразие $(M, g)$ без края. Как доказано в [13], группа изометрий замкнутой лоренцевой поверхности $(M, g)$ некомпактна, только если $(M, g) = (\mathbb{T}^2, g)$ — плоский лоренцев тор.

Напомним, что псевдориманово многообразие называется *геодезически полным*, если каждая геодезическая связности Леви-Чивита может быть продолжена так, чтобы аффинный параметр на ней изменялся на всей числовой прямой.

Далее под полнотой лоренцевых многообразий понимается геодезическая полнота. Известно, что любое компактное плоское лоренцево многообразие является полным.

Лоренцева метрика $g_0$ в $\mathbb{R}^n$, которая в декартовой системе координат имеет матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}$, где $E_{n-1}$ — $(n-1)$-мерная единичная матрица, называется *канонической.* Пара $(\mathbb{R}^n, g_0)$ обозначается через $E_1^n$. Метрика $g_0$ индуцирует лоренцеву метрику того же вида на торе $\mathbb{T}^n$, которая также называется *канонической* и обозначается по-прежнему через $g_0$. Как показано в [14, разд. 2.2.1], $n$-мерный тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ с канонической метрикой $g_0$ при $n \geq 3$ имеет некомпактную группу изометрий $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^n, g_0)$. Ниже показано, что это неверно при $n = 2$ (пример 1). Полные группы изометрий двумерных плоских лоренцевых торов могут быть как компактными, так и некомпактными.

Везде далее в этой работе мы рассматриваем стандартный двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ и называем пару векторов $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *стандартным* базисом касательного векторного пространства $T_x\mathbb{T}^2$, $x \in \mathbb{T}^2$. Через $\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ обозначается фактор-отображение, являющееся универсальным накрытием тора. Аносовский автоморфизм тора $\mathbb{T}^2$, заданный матрицей $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, обозначается через $A$, а $E$ — символ единичной матрицы $2 \times 2$.

Найдены следующие характеризации лоренцевых торов $(\mathbb{T}^2, g)$ с некомпактной полной группой изометрий.

**Теорема 1.** *Пусть $(\mathbb{T}^2, g)$ — лоренцев тор и $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ — полная группа его изометрий. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *группа Ли $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ некомпактна;*

2) *существует сохраняющий ориентацию аносовский автоморфизм тора, являющийся изометрией;*

3) *существует сохраняющий ориентацию аносовский автоморфизм $A$ тора со следом матрицы $A$, удовлетворяющим неравенству $\operatorname{tr} A > 2$, являющийся изометрией;*

4) *метрика $g$ в стандартном базисе имеет вид*

$$(g_{ij}) = \eta \begin{pmatrix} -2c & a-d \\ a-d & 2b \end{pmatrix}, \tag{1}$$

*где $\eta$ — некоторое отличное от нуля действительное число, $a, b, c, d$ — целые числа, удовлетворяющие условиям:*

$$ad - bc = 1, \quad a + d > 2. \tag{2}$$

С применением теоремы 1 получено следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Если компактная лоренцева поверхность $(M, g)$ имеет некомпактную полную группу Ли изометрий, то $(M, g) = (\mathbb{T}^2, g)$ — плоский лоренцев тор, не имеющий замкнутых изотропных геодезических. При этом полная группа Ли изометрий $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ изоморфна полупрямому произведению $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g) \ltimes T^2$ дискретной некомпактной стационарной подгруппы $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$ в точке $\Omega(0)$, $0 \in \mathbb{R}^2$, и компактной абелевой нормальной подгруппы $T^2$. Группа Ли всех сохраняющих ориентацию изометрий такого лоренцева тора $(\mathbb{T}^2, g)$ изоморфна полупрямому произведению групп $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}) \ltimes T^2$.*

**Следствие 1.** *Если полная группа изометрий плоского лоренцева тора $(\mathbb{T}^2, g)$ некомпактна, то его изотропные слоения $F_1$ и $F_2$ образованы иррациональными обмотками и каждый их слой всюду плотен в торе.*

В [15] поставлена проблема классификации замкнутых лоренцевых многообразий с некомпактными полными группами Ли изометрий. Естественно поставить эту проблему для более широкого класса объектов — лоренцевых орбифолдов.

В данной работе эта проблема решена в размерности $n = 2$ для поверхностей (теорема 3) и для двумерных орбифолдов (теоремы 5, 6), не являющихся многообразиями.

Пусть $\mathbb{K}$ — множество упорядоченных четверок целых чисел $(a, b, c, d)$, удовлетворяющих соотношениям (2) и обладающих свойством:

$(\mathcal{S})$ не существует такого отличного от $\pm 1$ общего делителя $k$ трех чисел $(a - d)$, $b$, $c$, что целые числа $a_1, b_1, c_1, d_1$, где

$$a - d = k(a_1 - d_1), \quad b = kb_1, \quad c = kc_1,$$

удовлетворяют соотношениям (2).

Равенство $s(a, b, c, d) = (d, -b, -c, a)$ определяет инверсию $s : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Рассмотрим группу $S$ с образующей $s$, изоморфную $\mathbb{Z}_2$. Пусть $\mathcal{K} = \mathbb{K}/S$ — пространство орбит группы $S$, а $\mu : \mathbb{K} \to \mathcal{K}$ — фактор-отображение. Обозначим орбиту точки $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}$ через $[a, b, c, d]$. Тогда $\mathcal{K} = \{[a, b, c, d] \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{K}\}$.

Напомним, что две лоренцевы метрики $g_1$ и $g_2$ на многообразии $M$ называются *подобными*, если они отличаются постоянным множителем, т. е. если существует число $\eta \neq 0$ такое, что $g_2 = \eta \cdot g_1$. Подобие — отношение эквивалентности на множестве всех лоренцевых метрик многообразия $M$. Класс эквивалентности, содержащий $g$, обозначается через $[g]$. Подчеркнем, что подобные лоренцевы метрики имеют равные полные группы изометрий, т. е. $\mathfrak{I}(M, g) = \mathfrak{I}(M, h)$ $\forall h \in [g]$.

Получена следующая классификация лоренцевых метрик на двумерном торе, имеющих некомпактную полную группу изометрий.

**Теорема 3.** *Пусть $\mathcal{M} = \{[g]\}$ — множество классов подобных плоских лоренцевых метрик $g$ на торе $\mathbb{T}^2$ с некомпактной полной группой изометрий. Тогда определена биекция*

$$\alpha : \mathcal{K} \to \mathcal{M} : [a, b, c, d] \mapsto [g],$$

*где метрика $g$ в стандартном базисе задана матрицей*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -2c & a-d \\ a-d & 2b \end{pmatrix}.$$

**Следствие 2.** *Существует счетное семейство классов подобных плоских лоренцевых метрик на торе с некомпактной полной группой изометрий.*

**Следствие 3.** *Если в обозначениях теоремы 3 $[g] = \alpha([a, b, c, d])$, то группа Ли всех сохраняющих ориентацию изометрий лоренцева тора $(\mathbb{T}^2, g)$ равна $\mathfrak{I}_0^+(\mathbb{T}^2, g) \ltimes T^2$, где $\mathfrak{I}_0^+(\mathbb{T}^2, g)$ — группа, порожденная $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $(-E)$.*

Пусть $(M, g)$, $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ — псевдоримановы орбифолды. Накрытие $r : M \to \mathcal{N}$ называется *псевдоримановым*, если $g = r^* g_{\mathcal{N}}$, где $r^*$ — кодифференциал отображения $r$.

Поскольку многообразия можно рассматривать как орбифолды, во избежание недоразумений далее будем называть *орбифолдами* только те, которые имеют орбифолдные точки, т. е. отличные от многообразий.

Напомним, что орбифолд называется *хорошим,* если он представим в виде пространства орбит $M/\Psi$ многообразия $M$ по некоторой группе диффеоморфизмов $\Psi$. Если при этом группа $\Psi$ конечна, то орбифолд $\mathcal{N}$ называется *очень хорошим.*

**Теорема 4.** *Любой двумерный лоренцев орбифолд $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ очень хороший и представим в виде фактор-пространства $\mathcal{N} = M/\Psi$ лоренцева многообразия $(M, g)$ по группе изометрий $\Psi$, изоморфной либо $\mathbb{Z}_2$, либо $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, причем фактор-отображение $r : M \to \mathcal{N}$ является псевдоримановым накрытием.*

Линейное преобразование плоскости $z \mapsto Dz + \delta$, заданное матрицей $D \in GL(2, \mathbb{R})$ и вектором $\delta = \begin{pmatrix} \delta^1 \\ \delta^2 \end{pmatrix}$, будем обозначать через $\langle D, \delta \rangle$. Если $D \in GL(2, \mathbb{Z})$, то линейное преобразование $\langle D, \delta \rangle$ индуцирует преобразование тора $\mathbb{T}^2$, которое обозначим через $\langle D, \{\delta\} \rangle$, где $\{\delta\} = \begin{pmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \end{pmatrix}$, $\{\delta^i\}$, $i = \overline{1, 2}$, — дробная часть числа $\delta^i$. Композиции преобразований $\langle D, \{\delta\} \rangle$ и $\langle D', \{\delta'\} \rangle$ соответствует равенство

$$\langle D', \{\delta'\} \rangle \circ \langle D, \{\delta\} \rangle = \langle D'D, \{D'\delta + \delta'\} \rangle,$$

здесь $D'D$ — произведение матриц $D'$ и $D$.

Благодаря теореме 4 исследование двумерных лоренцевых орбифолдов с несобственным действием полной группы изометрий сведено к лоренцевым поверхностям с несобственным действием полной группы изометрий (предложение 1) и доказана следующая

**Теорема 5.** *Пусть $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ — двумерный компактный лоренцев орбифолд с некомпактной полной группой Ли изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Орбифолд* $\mathcal{N}$ *изоморфен в категории* $\mathcal{O}rb$ *стандартной подушке, т. е.* $\mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi_0$, *где* $\Psi_0 = \langle\psi_0\rangle$, $\psi_0 = \langle -E, \{0\}\rangle$, *имеет стратификацию* $\Delta = \{\Delta^2, \Delta^0\}$, *где* $\Delta^0 = \{w_i \mid i = \overline{1,4}\}$ — *нульмерная страта,* $\Delta^2$ — *двумерная страта.*

2. *Пусть* $r : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{N}$ — *фактор-отображение. Индуцированная лоренцева метрика* $g := r^* g_{\mathcal{N}}$ *на торе* $\mathbb{T}^2$ *является полной плоской и в стандартном базисе имеет вид* (1). *Лоренцева метрика* $g_{\mathcal{N}}$ *также полная и плоская.*

3. *Для любой точки* $w_i \in \Delta^0$, $i = \overline{1,4}$, *стационарная подгруппа* $\mathfrak{I}_{w_i}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ *группы изометрий* $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ *изоморфна фактор-группе* $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)/\Psi_0$, *где* $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$ — *стационарная подгруппа в точке* $\Omega(0)$, $0 \in \mathbb{R}^2$, *полной группы изометрий тора. Полная группа изометрий* $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ *дискретна и равна полупрямому произведению* $\mathfrak{I}_{w_i}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \ltimes \Xi$, *где* $\Xi = \langle \xi_1, \xi_2 \mid (\xi_1)^2, (\xi_2)^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

$$\xi_1 = \left\langle E, \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \quad \xi_2 = \left\langle E, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

4. *Группа сохраняющих ориентацию изометрий лоренцева орбифолда* $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ *изоморфна полупрямому произведению групп* $\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

Следующая теорема устанавливает эквивалентность классификаций компактных лоренцевых поверхностей и 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий.

**Теорема 6.** *Рассмотрим орбифолд* $\mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi_0$, *где* $\Psi_0 = \langle\psi_0\rangle$, $\psi_0 = \langle -E, \{0\}\rangle$, *именуемый стандартной подушкой, и фактор-отображение* $r : M \to \mathcal{N}$. *Пусть* $\mathcal{M} = \{[g]\}$ — *множество классов подобных плоских лоренцевых метрик* $g$ *на торе* $\mathbb{T}^2$ *с некомпактной полной группой изометрий. Обозначим через* $\mathcal{L} = \{[g_{\mathcal{N}}]\}$ *множество классов подобных лоренцевых метрик на орбифолде* $\mathcal{N}$ *с некомпактной полной группой изометрий. Тогда для любой метрики* $g \in [g] \in \mathcal{M}$ *выполняется включение* $\Psi_0 \subset \mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$, *поэтому существует такая лоренцева метрика* $g_{\mathcal{N}}$ *на* $\mathcal{N}$, *что* $g = r^* g_{\mathcal{N}}$ *и определена биекция*

$$\kappa : \mathcal{M} \to \mathcal{L} : [g] \mapsto [g_{\mathcal{N}}].$$

**Следствие 4.** *Если* $\alpha : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ — *биекция, удовлетворяющая теореме* 3, *то отображение* $\beta := \kappa \circ \alpha : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *также является биекцией.*

## 1. Основные понятия и обозначения

**1.1. Псевдоортогональная группа.** Пусть $O(1,1)$ — псевдоортогональная группа. Для ее элементов будем использовать следующие обозначения: $A_t^{++} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$, $E^{+-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_t^{+-} = A_t^{++} E^{+-}$, $A_t^{-+} = -A_t^{+-}$, $A_t^{--} = -A_t^{++}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Отметим, что $A \in O(1,1)$ — аносовский автоморфизм псевдоевклидовой плоскости $E_1^2$ тогда и только тогда, когда $|\operatorname{tr} A| > 2$. Компонента единицы $O_e(1,1)$ образована матрицами $A_t^{++}$ со следом $\operatorname{tr} A_t^{++} \geq 2$.

Отображение $\mathbb{R}^1 \to O_e(1,1) : t \mapsto A_t^{++}$, $t \in \mathbb{R}^1$, — изоморфизм аддитивной группы действительных чисел $\mathbb{R}^1$ и $O_e(1,1)$. Поэтому группа $O_e(1,1)$ не имеет нетривиальных конечных подгрупп, а всякая ее дискретная подгруппа изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Нетрудно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.** *Дискретная подгруппа $\Phi$ группы $O(1,1)$ некомпактна тогда и только тогда, когда ее подгруппа $\Phi_e := \Phi \cap O_e(1,1)$ изоморфна группе целых чисел.*

**1.2. Псевдоевклидова метрика в $\mathbb{R}^n$.** Псевдориманова метрика $g$ сигнатуры $(k, n-k)$ на $\mathbb{R}^n$ называется *псевдоевклидовой,* если на $\mathbb{R}^n$ существует глобальная система координат $0, x^1, \ldots, x^n$, в которой метрика $g$ имеет вид

$$g = -dx^1 \otimes dx^1 - \ldots - dx^k \otimes dx^k + dx^{k+1} \otimes dx^{k+1} + \ldots + dx^n \otimes dx^n.$$

Далее будем пользоваться следующей легко доказываемой леммой.

**Лемма 2.** *Полная плоская псевдориманова метрика в $\mathbb{R}^n$ является псевдоевклидовой.*

Пусть $(\mathbb{T}^2, g)$ — плоский лоренцев тор, $\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ — универсальное накрытие. В силу компактности $\mathbb{T}^2$ метрика $g$ полная. Поэтому индуцированная метрика $\Omega^* g$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ является полной плоской и согласно лемме 2 псевдоевклидовой метрикой, которую обозначим также через $g$. Будем рассматривать $O(1,1)$ как стационарную подгруппу группы $\mathfrak{I}(E_1^2)$ в нуле и стационарную подгруппу $\mathfrak{I}_0(\mathbb{R}^2, g)$ группы $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2, g)$ в нуле. Тогда $O(1,1)$ и $\mathfrak{I}_0(\mathbb{R}^2, g)$ — сопряженные подгруппы в группе $GL(2, \mathbb{R})$. Как известно, полная группа Ли изометрий $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2, g)$ равна полупрямому произведению групп Ли $\mathfrak{I}_0(\mathbb{R}^2, g) \ltimes \mathbb{R}^2$.

Нормализатор $\mathbf{N}(\mathbb{Z}^2)$ подгруппы $\mathbb{Z}^2$ в группе $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2, g)$ равен полупрямому произведению групп $(\mathfrak{I}_0(\mathbb{R}^2, g) \cap GL(2, \mathbb{Z})) \ltimes \mathbb{R}^2$. Так как $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, группа Ли $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ изоморфна полупрямому произведению групп $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g) \ltimes T^2$, где $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g) = \mathfrak{I}_0(\mathbb{R}^2, g) \cap GL(2, \mathbb{Z})$, а $T^2$ — тор как компактная абелева группа Ли.

Положим $\mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g) := \{A \in \mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g) \mid \operatorname{tr} A \geq 2\}$, тогда $\mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g)$ — подгруппа Ли группы $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$.

## 2. Доказательство теоремы 1

1)$\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) Предположим, что полная группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ лоренцева тора $(\mathbb{T}^2, g)$ некомпактна. В [13] доказано, что это возможно, только когда метрика $g$ плоская, поэтому, как показано выше, она локально псевдоевклидова и группа Ли $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$ некомпактна. Из леммы 1 вытекает, что подгруппа $\mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g)$ группы $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$ сопряжена группе $\Phi_e = \Phi \cap O_e(1,1)$, поэтому некомпактна. Следовательно, существует аносовский автоморфизм $A \in \mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g)$, т. е. имеет место 3). Импликации 3)$\Rightarrow$ 2) и 2)$\Rightarrow$ 1) выполняются очевидным образом. Таким образом, условия 1), 2) и 3) эквивалентны.

3)$\Rightarrow$ 4) Пусть группа Ли $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ содержит сохраняющий ориентацию аносовский автоморфизм. Поскольку 3) влечет 1), группа Ли $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ некомпактна, следовательно, лоренцева метрика $g$ полная и плоская. При этом (см. разд. 1.2) группа Ли $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ представляет собой полупрямое произведение $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g) \ltimes T^2$, а группа $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$ содержит сохраняющий ориентацию аносовский автоморфизм тора $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d$ — целые числа и $a + d = \operatorname{tr} A > 2$. Таким образом, для целых чисел $a, b, c, d$ выполняются условия (2), из которых следует, что

$$bc \neq 0. \tag{3}$$

Поскольку $(\mathbb{R}^2, g)$ — полное псевдоевклидово пространство, матрица $G = (g_{ij})$, $i, j = 1, 2$, его метрического тензора в стандартном базисе имеет постоянные коэффициенты. По определению изометрии матрица $A$ удовлетворяет равенству

$A^tGA = G$. Так как

$$A^tGA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag_{11}+cg_{12} & ag_{12}+cg_{22} \\ bg_{11}+dg_{12} & bg_{12}+dg_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2g_{11}+2acg_{12}+c^2g_{22} & abg_{11}+(ad+bc)g_{12}+cdg_{22} \\ abg_{11}+(ad+bc)g_{12}+cdg_{22} & b^2g_{11}+2bdg_{12}+d^2g_{22} \end{pmatrix},$$

подставляя последнее выражение в равенство $A^tGA = G$, получаем соотношение

$$\begin{pmatrix} a^2g_{11}+2acg_{12}+c^2g_{22} & abg_{11}+(ad+bc)g_{12}+cdg_{22} \\ abg_{11}+(ad+bc)g_{12}+cdg_{22} & b^2g_{11}+2bdg_{12}+d^2g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix},$$

которое можно рассматривать как однородную систему линейных уравнений

$$WX = 0, \tag{4}$$

где

$$W = \begin{pmatrix} a^2-1 & 2ac & c^2 \\ ab & ad+bc-1 & cd \\ b^2 & 2bd & d^2-1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix}.$$

Используя равенства

$$\det A = ad - bc = 1, \tag{5}$$

запишем матрицу $W$ в виде

$$W = \begin{pmatrix} a^2-1 & 2ac & c^2 \\ ab & 2bc & cd \\ b^2 & 2bd & d^2-1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что определитель матрицы $W$ равен нулю. Поэтому однородная линейная система (4) имеет ненулевое решение.

Так как выполняются соотношения (3) и (5), минор матрицы $W$, образованный пересечением 1- и 2-го столбцов и 2- и 3-й строк, равен $2b^2 \neq 0$. Стало быть, ранг матрицы $W$ равен двум, и система (4) эквивалентна системе

$$\begin{cases} abg_{11} + 2bcg_{12} = -cdg_{22}, \\ b^2g_{11} + 2bdg_{12} = (1-d^2)g_{22}. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $g_{11} = -2c\eta$, $g_{12} = (a-d)\eta$, $g_{22} = 2b\eta$, $\eta \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}$.

Таким образом, если полная группа Ли изометрий содержит сохраняющий ориентацию аносовский автоморфизм, то существует такое число $\eta \neq 0$, что матрица $G$ метрики $g$ в стандартном базисе имеет вид (1), причем выполняются условия (2).

4)$\Rightarrow$ 3) Пусть метрика $g$ на торе $\mathbb{T}^2$ в стандартном базисе $e_1, e_2$ задана матрицей $G$ вида (1). Так как $a+d > 2$, определитель матрицы $G$ удовлетворяет неравенству

$$\det G = \eta^2(4 - (a+d)^2) < 0.$$

Поэтому метрика $g$ лоренцева. Нетрудно проверить, что при выполнении условия (2) преобразование $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — сохраняющая ориентацию изометрия лоренцева тора $(\mathbb{T}^2, g)$. Так как $\operatorname{tr} A = a + d > 2$, то $A$ является аносовским автоморфизмом тора. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ *— матрицы из* $\mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g) \setminus \{E\}$. *Если* $A = B^n$ *для целого числа* $n$, *отличного от* $\pm 1$, *то*

($\mathcal{S}^*$) *существует отличный от* $\pm 1$ *общий делитель* $k$ *трех чисел* $(a - d)$, $b$, $c$ *такой, что*

$$a - d = k(a_1 - d_1), \quad b = kb_1, \quad c = kc_1. \tag{6}$$

Доказательство. Применим индукцию по натуральным $n$. При $n = 2$, учитывая, что $\det B = 1$, имеем

$$A = B^2 = \begin{pmatrix} a_1(a_1 + d_1) - 1 & b_1(a_1 + d_1) \\ c_1(a_1 + d_1) & d_1(a_1 + d_1) - 1 \end{pmatrix},$$

поэтому (6) выполнено. Предположим, что утверждение этой леммы выполняется для некоторого натурального числа $n > 2$, т. е. если $\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = B^n$, то существует отличный от $\pm 1$ общий делитель $k$ трех чисел $(\tilde{a} - \tilde{d})$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ такой, что

$$\tilde{a} - \tilde{d} = k(a_1 - d_1), \quad \tilde{b} = kb_1, \quad \tilde{c} = kc_1. \tag{7}$$

Применяя (7), получаем

$$\begin{aligned} A = B^{n+1} &= \begin{pmatrix} \tilde{d} + k(a_1 - d_1) & kb_1 \\ kc_1 & \tilde{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1(ka_1 + \tilde{d}) - k & b_1(ka_1 + \tilde{d}) \\ c_1(ka_1 + \tilde{d}) & d_1(ka_1 + \tilde{d}) - k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

следовательно, соотношения (6) выполнены для множителя $ka_1 + \tilde{d}$.

Предположим, что $ka_1 + \tilde{d} = 1$. Тогда $\det A = 1 + k^2 - k(a_1 + d_1)$, и так как $\det A = 1$, то $k = a_1 + d_1$. Отсюда

$$\operatorname{tr} A = a_1 + d_1 - 2k = -(a_1 + d_1) = -\operatorname{tr} B,$$

что противоречит выбору $A, B \in \mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g) \setminus \{E\}$.

Пусть теперь $ka_1 + \tilde{d} = -1$. Тогда $\det A = 1 + k^2 + k(a_1 + d_1) = 1$, откуда $k = -(a_1 + d_1)$. Поэтому $A = B^{n+1} = \begin{pmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix} = B^{-1}$, что противоречит условию леммы. Таким образом, условие ($\mathcal{S}^*$) доказано.

В силу принципа математической индукции утверждение леммы выполняется для всех натуральных чисел $n \geq 2$.

Пусть теперь $n < 0$. Положим $m := -n$, тогда равенство $A = B^n$ примет вид $A^{-1} = B^m$, где $m \in \mathbb{N}$. По доказанному выше соотношения (6) выполняются для матрицы $A^{-1}$. Так как $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, матрица $A^{-1}$ обладает свойством ($\mathcal{S}^*$) тогда и только тогда, когда этим свойство обладает матрица $A$. $\square$

**Следствие 5.** *Матрица* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *будет образующей группы* $\mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g)$ *тогда и только тогда, когда* $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}$.

## 3. Доказательство теоремы 2

**Лемма 4.** *Квадратный корень из любого натурального числа является либо целым, либо иррациональным числом.*

Доказательство. Предположим, что существует натуральное число $n$, для которого $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ — дробное рациональное число, где $p$ и $q$ — взаимно простые натуральные числа. Разложим $n$ на простые множители, тогда $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$, где $k = k_1 \cdot \ldots \cdot k_s$ — произведение различных простых чисел, $k \neq 1$. При этом $\sqrt{k_1 \cdot \ldots \cdot k_s} = \frac{p}{qm}$. Разделим числитель и знаменатель этой дроби на наибольшее общее кратное $p$ и $m$, тогда $\sqrt{k_1 \cdot \ldots \cdot k_s} = \frac{a}{b}$ — несократимая дробь, следовательно, $k_1 \cdot \ldots \cdot k_s = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow (k_1 \cdot \ldots \cdot k_s)b^2 = a^2 \Rightarrow a \vdots (k_1 \cdot \ldots \cdot k_s) \Rightarrow a^2 = k_1^2 \cdot \ldots \cdot k_s^2 \Rightarrow b \vdots (k_1 \cdot \ldots \cdot k_s) \Rightarrow k_1 \cdot \ldots \cdot k_s$ — общий множитель $a$ и $b$, что противоречит несократимости дроби $\frac{a}{b}$. $\square$

Предположим, что группа изометрий $\mathfrak{I}(M, g)$ компактной лоренцевой поверхности некомпактна. Тогда согласно [13] $(M, g) = (\mathbb{T}^2, g)$ — плоский тор. В силу теоремы 1 метрика $g$ в стандартном базисе имеет вид (1), где числа $a, b, c, d$ удовлетворяют условиям (2).

Предположим, что существует замкнутая изотропная геодезическая $\gamma$ на $(\mathbb{T}^2, g)$, $x = \gamma(0) = \gamma(s_0) \in \mathbb{T}^2$. Тогда через точку $z \in \Omega^{-1}(x)$ проходит изотропная геодезическая $\hat{\gamma}$ псевдоевклидова пространства $(\mathbb{R}^2, g)$, накрывающая $\gamma$, причем $\hat{\gamma}(0) = z$, $\hat{\gamma}(s_0) = z + z_0$, где $z_0 = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$ — ненулевой изотропный вектор на плоскости с целочисленными координатами. Поэтому $g(z_0, z_0) = 0$ или

$$-2c(z^1)^2 + 2(a-d)z^1 z^2 + 2b(z^2)^2 = 0.$$

Как показано выше (см. (3)), $bc \neq 0$, так что

$$z^1 = \frac{d - a \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{-2c} z^2.$$

Для того чтобы корни $z^1$ и $z^2$ были целыми числами, одновременно не обращающимися в нуль, согласно лемме 4 необходимо, чтобы существовало целое число $m$, удовлетворяющее равенству $\sqrt{(a+d)^2 - 4} = m$, откуда вытекает $(a+d)^2 - m^2 = 4 \Leftrightarrow (a+d-m)(a+d+m) = 4$. Тогда числа $a+d-m$ и $a+d+m$ имеют одинаковую четность, поэтому последнее равенство выполняется только в следующих двух случаях:

$$\begin{cases} a+d+m = 2, \\ a+d-m = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} a+d+m = -2. \\ a+d-m = -2. \end{cases}$$

Отсюда $|a+d| = 2$, что противоречит условиям (2). Полученное противоречие показывает, что предположение о существовании замкнутой изотропной геодезической неверно.

Остальные утверждения теоремы 2 следуют из разд. 1.2.

## 4. Доказательство теоремы 3

Пусть $[g] = \alpha([a, b, c, d])$ и $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. По определению множества $\mathcal{K}$ имеем $A \in \mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g)$. Согласно следствию 5 $A$ — образующая группы $\mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g)$.

Группа $\mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$ и имеет две образующие $A$ и $A^{-1}$. Так как $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ и $s(a,b,c,d) = (d,-b,-c,a)$, отображение $\alpha : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ определено корректно.

Поскольку каждый элемент $[g] \in \mathcal{M}$ однозначно определяет подгруппу изометрий $\mathfrak{I}_0^{++}(\mathbb{T}^2, g)$ и, следовательно, пару ее образующих, отображение $\alpha$ инъективно и сюръективно, т. е. является биекцией. $\square$

## 5. Доказательство теоремы 4

Задание лоренцевой метрики $g$ на орбифолде $\mathcal{N}$ определяет главное $O(1,1)$-расслоение $q : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ с собственным правым действием группы $O(1,1)$ на $\mathcal{P}$, пространство орбит которого совпадает с $\mathcal{N}$. В [2] доказано, что орбифолд $\mathcal{P}$ представляет собой гладкое многообразие. На $\mathcal{P}$ определено гладкое собственное действие нормальной подгруппы $O_e(1,1)$ группы $O(1,1)$, причем $M := \mathcal{P}/O_e(1,1)$ — гладкий орбифолд.

Обозначим через $p : \mathcal{P} \to M = \mathcal{P}/O_e(1,1)$ проекцию на пространство орбит. На $M$ индуцировано собственно разрывное действие фактор-группы $\Psi = O(1,1)/O_e(1,1) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, причем пространство орбит $M/\Psi$ совпадает с $\mathcal{N}$ и выполняется равенство $q = r \circ p$, где $r : M \to \mathcal{N} = M/\Psi$ — фактор-отображение.

Как показано А. В. Багаевым и Н. И. Жуковой [4, предложение 3], каждая группа орбифолдности $\Gamma$ орбифолда $M$ изоморфна некоторой подгруппе структурной группы $O_e(1,1)$ главного расслоения псевдоортогональных реперов $p : \mathcal{P} \to M$. Поскольку каждая группа $\Gamma$ конечна, а группа $O_e(1,1)$ не имеет нетривиальных конечных подгрупп, отсюда вытекает тривиальность $\Gamma$. Это означает, что $M$ — гладкое многообразие, а действие группы $O_e(1,1)$ на $\mathcal{P}$ свободное.

Будем рассматривать точку $u \in \mathcal{P}$ как линейный изоморфизм $u : \mathbb{R}^2 \to T_xM$, где $x = p(u)$. Если $e_1, e_2$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^2$, $\partial_1, \partial_2$ — базис $u$ в точке $x$, то $u(X^i e_i) := X^i \partial_i$, $i = \overline{1,2}$. Пусть $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение псевдоевклидова пространства $E_1^2$. Положим

$$g(X,Y) := (u^{-1}X, u^{-1}Y) \quad \forall X, Y \in T_xM. \tag{8}$$

Благодаря инвариантности скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ относительно группы $O(1,1)$, равенство (8) не зависит от выбора точки $u \in p^{-1}(x)$. Таким образом, $g$ — лоренцева метрика на многообразии $M$, причем группа $\Psi$ является группой изометрий лоренцева многообразия $(M, g)$. Следовательно, $r : M \to \mathcal{N}$ — псевдориманово накрытие для лоренцева орбифолда $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$.

Подчеркнем, что пространство $\mathcal{P}$ расслоения псевдоортогональных реперов $q : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$, вообще говоря, несвязно. Одна компонента связности многообразия $\mathcal{P}$ отображается на другую посредством некоторого сдвига $R_a$, $a \in O(1,1)$, поэтому различные компоненты связности диффеоморфны между собой.

Так как $\mathcal{N}$ — орбифолд, не являющийся многообразием, существует по крайней мере одна орбифолдная точка $x_0$ с нетривиальной конечной группой орбифолдности $\Gamma_0$. При этом $\Gamma_0$ изоморфна некоторой конечной подгруппе $\Phi_0$ группы $O(1,1)$. Поскольку $\Phi_0$ не является подгруппой группы $O_e(1,1)$, она пересекает по крайней мере две компоненты связности группы Ли $O(1,1)$. Поэтому слой $q^{-1}(x_0)$ над точкой $x_0$ либо связен, либо имеет две компоненты связности, а группа $\Phi_0$ изоморфна соответственно либо $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, либо $\mathbb{Z}_2$. Слой $q^{-1}(x_0)$

связен тогда и только тогда, когда подгруппа $\Phi_0$ пересекает все компоненты связности группы $O(1,1)$, т. е. когда $\Phi_0 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Для орбифолда $\mathcal{N}$ пространство расслоения $\mathcal{P}$ либо связно, тогда связно $M$ и $\Psi \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; либо имеет две компоненты связности и $\Psi \cong \mathbb{Z}_2$, тогда вместо $M$ рассматриваем его компоненту связности.

Таким образом, для лоренцева орбифолда $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ существует такое связное лоренцево многообразие $(M,g)$, что $\mathcal{N} = M/\Psi$, где $\Psi$ — подгруппа группы изометрий $\mathfrak{I}(M,g)$, изоморфная одной из групп $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Это означает, что фактор-отображение $r : M \to \mathcal{N}$ является псевдоримановым накрытием и $g = r^* g_{\mathcal{N}}$. $\square$

## 6. Псевдоевклидовость метрики на орбифолде

Определение 1. Пусть $r : M \to \mathcal{N}$ — накрывающее отображение для орбифолда $\mathcal{N}$. Говорят, что $\hat{f} \in \mathrm{Diff}(M)$ *лежит над* $f \in \mathrm{Diff}(\mathcal{N})$, если $r \circ \hat{f} = f \circ r$.

Пусть $(M_1, g_1)$ и $(M_2, g_2)$ — псевдоримановы многообразия, $r : M_1 \to M_2$ — псевдориманово накрытие. Как известно, вообще говоря, не существует изометрии многообразия $(M_1, g_1)$, лежащей над данной изометрией псевдориманова многообразия $(M_2, g_2)$. Однако для специальных накрытий лоренцевых орбифолдов имеет место следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Пусть $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ — лоренцев орбифолд и $r : M \to \mathcal{N}$ — его псевдориманово накрытие многообразием $(M,g)$, удовлетворяющее теореме 4. Тогда*

1) *для любого $f \in \mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ существует $\hat{f} \in \mathfrak{I}(M,g)$, лежащее над $f$;*

2) *преобразование $\hat{f} \in \mathfrak{I}(M,g)$ лежит над некоторым $f \in \mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ тогда и только тогда, когда*
$$\Psi \circ \hat{f} = \hat{f} \circ \Psi;$$

3) *множество всех $\hat{f} \in \mathfrak{I}(M,g)$, лежащих над изометриями из $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, совпадает с нормализатором $\mathbf{N}(\Psi)$ группы $\Psi$ в $\mathfrak{I}(M,g)$, причем $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \cong \mathbf{N}(\Psi)/\Psi$;*

4) *если группа Ли $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ некомпактна, то $(M,g) = (\mathbb{T}^2, g)$ — плоский тор с некомпактной группой изометрий $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$.*

Доказательство. Сохраним введенные выше обозначения. Пусть $q : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ — главное $O(1,1)$-расслоение над лоренцевым орбифолдом $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$. Существование связности Леви-Чивита $\nabla^{g_{\mathcal{N}}}$, соответствующей $g_{\mathcal{N}}$, на $\mathcal{N}$ влечет задание $\mathfrak{o}(1,1)$-значной 1-формы $\widetilde{\omega}$ на $\mathcal{P}$, где $\mathfrak{o}(1,1) = \mathbb{R}^1$ — алгебра Ли группы Ли $O(1,1)$. Обозначим через $\theta$ каноническую 1-форму на $\mathcal{P}$, которая является $\mathbb{R}^2$-значной 1-формой [2] (для многообразий см. [16]).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли $G$ всех изометрий псевдоевклидова пространства $E^2_1$, представляющей собой полупрямое произведение $O(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$, причем $\mathbb{R}^2$ — группа сдвигов на векторы из $\mathbb{R}^2$, являющаяся нормальной подгруппой в группе $G$. Равенство
$$\omega(X) = \widetilde{\omega}(X) + \theta(X) \in \mathfrak{g},$$
где $X$ — гладкое векторное поле на $\mathcal{P}$, определяет $\mathfrak{g}$-значную 1-форму $\omega$, являющуюся картановой связностью. Таким образом, пара $\xi = (\mathcal{P}(M, O(1,1)), \omega)$ — индуцированная картанова геометрия на орбифолде $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ [3]. Поскольку однородное пространство $G/O(1,1)$ редуктивно, причем группа $G$ действует на

нем эффективно левыми сдвигами, $\xi$ — эффективная редуктивная картанова геометрия.

Заметим, что при этом главное $O_e(1,1)$-расслоение $p:\mathcal{P}\to M$ с $\mathfrak{g}$-значной 1-формой $\omega$ определяет картанову геометрию $\xi_0=(\mathcal{P}(M,O_e(1,1)),\omega)$ на $M$. Пусть $\widehat{\mathfrak{I}}(\mathcal{P},\xi)$ и $\widehat{\mathfrak{I}}(\mathcal{P},\xi_0)$ — группы автоморфизмов картановых геометрий $\xi$ и $\xi_0$, соответственно. Тогда

$$\widehat{\mathfrak{I}}(\mathcal{P},\xi)=\{\hat f\in \mathrm{Diff}(\mathcal{P})\mid \hat f^*\omega=\omega,\ \hat f\circ R_a=R_a\circ \hat f\ \forall a\in O(1,1)\},$$

$$\widehat{\mathfrak{I}}(\mathcal{P},\xi_0)=\{\hat f\in \mathrm{Diff}(\mathcal{P})\mid \hat f^*\omega=\omega,\ \hat f\circ R_a=R_a\circ \hat f\ \forall a\in O_e(1,1)\}.$$

Следовательно, имеет место включение $\widehat{\mathfrak{I}}(\mathcal{P},\xi)\subset\widehat{\mathfrak{I}}(\mathcal{P},\xi_0)$.

Рассмотрим произвольную изометрию $f\in\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$. Для нее определено преобразование $\hat f\in\widehat{\mathfrak{I}}(\mathcal{P},\xi_0)$, которое $u\in\mathcal{P}$ переводит в $f_{*x}\circ u$, где $x=q(u)\in\mathcal{N}$, $f_{*x}$ — дифференциал $f$ в точке $x$. Так как $\hat f\circ R_a=R_a\circ\hat f\ \forall a\in O_e(1,1)$, то $\hat f$ лежит над некоторым диффеоморфизмом $h$ многообразия $M$ относительно $p:\mathcal{P}\to M$. Покажем, что $h\in\mathfrak{I}(M,g)$.

Пусть $\tilde p:P\to M$ — $O(1,1)$-расслоение псевдоортонормальных реперов для лоренцева многообразия $(M,g)$. Тогда $P$ содержит замкнутое подмногообразие $\mathcal{P}$. При этом не исключается равенство $P=\mathcal{P}$. Пусть $\hat\xi=(P(M,O(1,1),\widehat\omega))$ — картанова геометрия, соответствующая лоренцевой геометрии $(M,g)$.

Пусть $\hat h|_{\mathcal{P}}:=\hat f$. Определим продолжение $\hat h$ на все $P$. Предположим, что точка $v\in P$ получается из точки $u\in\mathcal{P}$ сдвигом на $R_a$, где $a\in O(1,1)$, т. е. $v=u\cdot a$. Положим $\hat h(v)=\hat h(u\cdot a):=R_a(\hat h(u))$.

Непосредственная проверка показывает, что $\hat h^*\widehat\omega=\widehat\omega$, где $\widehat\omega$ — редуктивная картанова связность в $P$, соответствующая связности Леви-Чивита $\nabla^g$ лоренцевой метрики $g$ на $M$. Из определения $\hat h$ вытекает, что $R_a\circ\hat h=\hat h\circ R_a\ \forall a\in O(1,1)$. Это означает, что $\hat h\in\widehat{\mathfrak{I}}(P,\hat\xi)$ и, кроме того, $\hat h$ лежит над некоторой изометрией $h\in\mathfrak{I}(M,g)$ относительно $\tilde p$. Заметим, что $h$ лежит относительно $r$ над изометрией $f\in\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$, являющейся проекцией преобразования $\hat f\in\widehat{\mathfrak{I}}(\mathcal{P},\xi)$, индуцирующего $\hat h$.

Таким образом, над каждой изометрией $f\in\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ лежит некоторая изометрия $h\in\mathfrak{I}(M,g)$ многообразия $(M,g)$ относительно проекции $r:M\to\mathcal{N}$.

Нетрудно проверить, что множество $\Phi$ изометрий многообразия $(M,g)$, лежащих над группой $\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$, образуют группу Ли, а отображение $\chi:\Phi\to\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$, сопоставляющее изометрии $h\in\mathfrak{I}(M,g)$ изометрию $f\in\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$, над которой лежит $h$, является гомоморфизмом групп Ли. Ядро $\operatorname{Ker}\chi$ образовано всеми преобразованиями из группы $\mathfrak{I}(M,g)$, лежащими над $\mathrm{Id}_{\mathcal{N}}$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\chi=\Psi$.

Поскольку $\operatorname{Ker}\chi$ — нормальная подгруппа в $\Phi$, для любого $\tilde h\in\Phi$ выполняется равенство

$$\tilde h\circ\Psi=\Psi\circ\tilde h. \tag{9}$$

Покажем, что выполнение этого равенства достаточно для того, чтобы изометрия $\tilde h$ лежала над некоторой изометрией из $\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$. Для любых $x\in\mathcal{N}$ и $z\in r^{-1}(x)$ равенство $\varphi(x)=r(\tilde h(z))$ определяет преобразование $\varphi$ орбифолда $\mathcal{N}$. Действительно, если $z'$ — другая точка из $r^{-1}(x)$, то найдется элемент $\psi\in\Psi$ такой, что $z'=\psi(z)$. Поскольку $\Psi$ лежит над $\mathrm{Id}_{\mathcal{N}}$, в силу (9) получаем $r(\tilde h(z'))=r(\tilde h(\psi(z)))=r(\psi'(\tilde h(z)))=r(\tilde h(z))$, где $\psi'\in\Psi$. Благодаря соотношению $r\circ\tilde h=\varphi\circ r$ и псевдоримановости накрытия $r:M\to\mathcal{N}$ преобразование $\varphi$ — изометрия $(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$.

Итак, $\Phi = \mathbf{N}(\Psi)$ — нормализатор подгруппы $\Psi$ в $\mathfrak{I}(M,g)$, следовательно, $\mathbf{N}(\Psi)$ — подгруппа Ли группы $\mathfrak{I}(M,g)$. Таким образом, имеет место изоморфизм групп Ли $\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) \cong \mathbf{N}(\Psi)/\Psi$, и некомпактность группы Ли $\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ влечет некомпактность группы Ли $\mathfrak{I}(M,g)$. Стало быть, $(M,g) = (\mathbb{T}^2,g)$ — плоский лоренцев тор с некомпактной полной группой изометрий. $\square$

## 7. Группы изометрий плоских лоренцевых 2-орбифолдов

### 7.1. Ориентируемые орбифолды.

Определение 2. Пусть $\mathcal{N}$ — произвольный хороший 2-орбифолд и $r: M \to \mathcal{N}$ — некоторое накрытие для $\mathcal{N}$ многообразием $M$. *Фундаментальным многоугольником орбифолда* $\mathcal{N}$ называется такой криволинейный многоугольник $\Sigma$ на $M$, что $\mathcal{N} = r(\Sigma)$, причем сужение $r|_{\Sigma^0}$ на внутренность $\Sigma^0$ многоугольника $\Sigma$ есть гомеоморфизм на двумерную страту $\Delta^2$.

**Предложение 2.** *Пусть $(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ — лоренцев орбифолд. Если существуют плоский тор $(\mathbb{T}^2,g)$ и такая подгруппа его изометрий $\Psi = \langle\psi\rangle \cong \mathbb{Z}_2$, где $\psi$ сохраняет ориентацию, что $\mathcal{N} = M/\Psi$, а фактор-отображение $r: M \to \mathcal{N}$ является псевдоримановым накрытием, то орбифолд $\mathcal{N}$ диффеоморфен в категории $\mathcal{O}rb$ стандартной подушке и полная группа Ли изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ дискретна, причем*

$$\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) \cong (\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2,g)/\Psi_0) \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2),$$

*где $\Psi_0 = \langle\psi_0\rangle$, $\psi_0 = \langle -E,\{0\}\rangle$.*

*Более того, если группа $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2,g)$ некомпактна и $\mathfrak{I}^+(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ — группа Ли всех сохраняющих ориентацию орбифолда изометрий, то*

$$\mathfrak{I}^+(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}}) \cong \mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

Доказательство. Так как $\psi$ сохраняет ориентацию тора, условие $\psi^2 = \langle E,\{0\}\rangle$ влечет $\psi = \langle -E,\{\sigma\}\rangle$.

Предположим сначала, что $\psi_0 = \langle -E,\{0\}\rangle$, т. е. $\sigma = 0$. Пусть, как и выше, $\Omega: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ — универсальное накрывающее отображение для тора $\mathbb{T}^2$, а $r: \mathbb{T}^2 \to \mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi_0$ — фактор-отображение, где $\Psi_0 = \langle\psi_0\rangle$. При этом $r\circ\Omega: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{N}$ — универсальное накрывающее отображение для орбифолда $\mathcal{N}$.

Будем представлять себе тор $\mathbb{T}^2$ как квадрат $[0,1]\times[0,1]$ со склеенными в соответствующих направлениях сторонами. Нетрудно проверить, что в качестве фундаментального многоугольника $\Sigma_0$ на торе $\mathbb{T}^2$ для орбифолда $\mathcal{N}$ можно взять прямоугольник $[0,1]\times[0,1/2]$, правило склейки сторон которого изображено на рис. 1. Следовательно, орбифолд $\mathcal{N}$ имеет нульмерную страту $\Delta^0$, состоящую из четырех точек $w_i$, $i = \overline{1,4}$, где $w_i = r(z_i)$, $z_1 = (0,0)$, $z_2 = (1/2,0)$, $z_3 = (0,1/2)$, $z_4 = (1/2,1/2) \in \Sigma_0$. Поэтому орбифолд $\mathcal{N}$ представляет собой стандартную подушку. Заметим, что нормализатор $\mathbf{N}(\Psi_0)$ подгруппы $\Psi_0$ в группе $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2,g)$ состоит из изометрий $\langle A,\{\delta\}\rangle$ тора, удовлетворяющих равенству $\{\delta\} = \{-\delta\}$, которое выполняется только для четырех векторов $\{\delta\}_{(i)}$:

$$\{\delta\}_{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \{\delta\}_{(2)} = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}, \quad \{\delta\}_{(3)} = \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}, \quad \{\delta\}_{(4)} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, из группы сдвигов тора $\{E\}\ltimes T^2$ на орбифолд $\mathcal{N}$ проектируются только изометрии $\langle E,\{\delta\}_{(i)}\rangle$, $i = \overline{1,4}$. Следовательно, группа $\mathfrak{I}(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ транзитивна на $\Delta^0$.

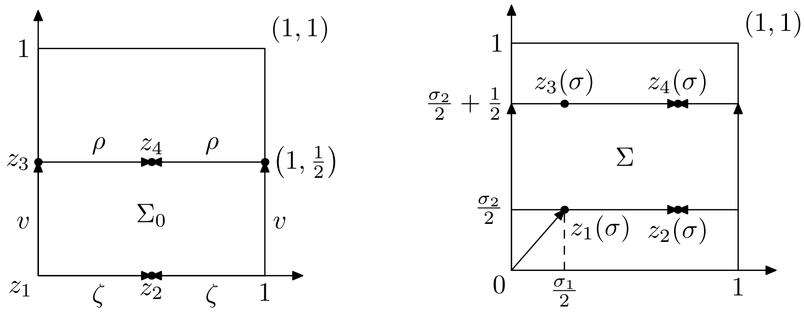


Рис. 1. Подушка.

Так как $\Psi_0 = \langle \psi_0 \rangle$, $\psi_0 = \langle -E, \{0\} \rangle$, нормализатор $\mathbf{N}_0(\Psi_0)$ в стационарной подгруппе $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$ точки $w := r \circ \Omega(0)$, $0 \in \mathbb{R}^2$, совпадает с $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$. Поэтому стационарная подгруппа $\mathfrak{I}_w(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ в точке $w$ изоморфна фактор-группе $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)/\Psi_0$.

Итак, имеем изоморфизм дискретных групп Ли

$$\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \cong (\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)/\Psi_0) \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

Если группа Ли $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ некомпактна, то из теоремы 2 вытекает, что ее подгруппа $\mathfrak{I}^+(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, образованная сохраняющими ориентацию изометриями, дискретна и изоморфна группе $\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

Пусть теперь $\Psi = \langle \psi \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, где $\psi = \langle -E, \{\sigma\} \rangle$, $\sigma \neq 0$. Положим $\mu = \langle E, \{\sigma/2\} \rangle$, тогда $\mu^{-1} = \langle E, \{-\sigma/2\} \rangle$, следовательно,

$$\psi = \mu \circ \psi_0 \circ \mu^{-1} \Leftrightarrow \Psi = \mu \circ \Psi_0 \circ \mu^{-1},$$

т. е. группы $\Psi$ и $\Psi_0$ сопряжены в группе $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$. Поэтому если $\Sigma_0$ — фундаментальный многоугольник орбифолда $\mathcal{N}_0 = \mathbb{T}^2/\Psi_0$ на торе $\mathbb{T}^2$, то

$$\Psi_0 \cdot x \cap \Sigma_0 \neq \varnothing \Leftrightarrow \Psi \cdot \mu(x) \cap \mu(\Sigma_0) \neq \varnothing, \tag{10}$$

где $\Psi_0 \cdot x$ — орбита точки $x$ относительно группы $\Psi_0$, а $\Psi \cdot \mu(x)$ — орбита точки $\mu(x)$ относительно $\Psi$. Из (10) вытекает, что $\Sigma = \mu(\Sigma_0)$ — фундаментальный многоугольник орбифолда $\mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi$ на этом же торе. Он получен из $\Sigma_0$ сдвигом $\mu = \langle E, \{\sigma/2\} \rangle$ (см. рис. 1).

Пусть $r_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{N}_0 = \mathbb{T}^2/\Psi_0$ — фактор-отображение. Поскольку $\Psi = \mu \circ \Psi_0 \circ \mu^{-1}$, преобразование тора $\mu$ индуцирует отображение орбифолдов $\mu_0 : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N}$, удовлетворяющее равенству $r \circ \mu = \mu_0 \circ r_0$.

Так как $r$ и $r_0$ — псевдоримановы накрывающие отображения, $\mu$ — изометрия тора $(\mathbb{T}^2, g)$, то $\mu_0$ — изометрия орбифолдов $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ и $(\mathcal{N}_0, g_{\mathcal{N}_0})$, поэтому группы изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ и $\mathfrak{I}(\mathcal{N}_0, g_{\mathcal{N}_0})$ — изоморфные группы Ли. Следовательно, утверждения предложения 2, доказанные выше для группы $\mathfrak{I}(\mathcal{N}_0, g_{\mathcal{N}_0})$, выполняются и для группы $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$. $\square$

### 7.2. Доказательство теоремы 5.

Обозначения. Если $\Psi$ — произвольная группа диффеоморфизмов многообразия $M$, то $\mathrm{fix}(\Psi) = \{x \in M \mid \psi(x) = x\}$. Через $\Psi_{*x}$ будем обозначать группу, образованную дифференциалами $\{\psi_{*x}\}$ в точке $x \in \mathrm{fix}(\Psi)$ диффеоморфизмов $\psi$ из $\Psi$. Имеет место следующая легко проверяемая

**Лемма 5.** *Пусть $\Psi = \langle \psi \rangle$ — группа изометрий псевдоевклидовой плоскости $E_1^2$, где $\psi = \langle A_t^{+-}, 0\rangle$, $t \neq 0$. Тогда*

1) *нормализатор $N(\Psi)$ подгруппы $\Psi$ в группе $O(1,1)$ равен произведению групп $\Psi \times \Phi$, где $\Phi = \langle -E \rangle$, и $N(\Psi)/\Psi \cong \Phi \cong \mathbb{Z}_2$;*

2) *множество векторов, неподвижных относительно группы $\Psi_{*x}$, где $x \in \operatorname{fix}(\Psi)$, образует 1-мерное векторное пространство касательного пространства $T_x\mathbb{T}^2$.*

Сохраним введенные выше обозначения. Предположим, что группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ компактного лоренцева орбифолда $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ некомпактна. Тогда согласно предложению 1 существуют полный плоский лоренцев тор $(\mathbb{T}^2, g)$ и такая группа изометрий $\Psi \subset \mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$, что $\mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi$, а фактор-отображение $r : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi$ является псевдоримановым накрытием, причем группа $\Psi$ изоморфна либо группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, либо группе $\mathbb{Z}_2$. Это означает, что $g = r^* g_{\mathcal{N}}$. При этом метрика $g_{\mathcal{N}}$ также полная и плоская.

Случай 1. Пусть $\Psi \cong \mathbb{Z}_2$, причем $\Psi = \langle \psi \rangle$, где $\psi$ меняет ориентацию тора. Предположим, что $\psi = \langle B, \delta \rangle$, тогда $B \in GL(2, \mathbb{Z})$ и $\det(B) = -1$. Так как орбифолд $\mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi$ имеет орбифолдную точку, существует точка $v \in \mathbb{T}^2$, неподвижная относительно $\psi$. Дифференциал $\psi_{*v}$ изометрии $\psi$ в точке $v$ в стандартном базисе задан матрицей $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Поэтому уравнение $\psi_{*v}(X) = X$, где $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, принимает вид $(B - E)X = 0$.

Согласно лемме 5 меняющая ориентацию изометрия псевдоевклидова векторного пространства $(T_v\mathbb{T}^2, g_v)$, где $g_v$ — сужение метрики $g$ на $T_v\mathbb{T}^2$, имеет 1-мерное векторное подпространство собственных векторов, соответствующих собственному значению 1. Поэтому $\det(B - E) = 0$. Отсюда, учитывая, что $\det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = -1$, получаем $b_{11} + b_{22} = 0$. Следовательно,

$$X = \begin{cases} \lambda \begin{pmatrix} b_{12} \\ 1 - b_{11} \end{pmatrix}, & \text{если } b_{12} \neq 0, \\ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ b_{21} \end{pmatrix}, & \text{если } b_{12} = 0,\ b_{11} = 1, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^1 \backslash 0. \tag{11}$$

Так как $(\mathbb{T}^2, g)$ — полное лоренцево многообразие, экспоненциальное отображение $\operatorname{Exp}_v$ определено на всем касательном пространстве $T_v\mathbb{T}^2$. По свойству изометрий псевдоримановых многообразий для $\psi$ выполняется соотношение

$$\operatorname{Exp}_v \circ \psi_{*v} = \psi \circ \operatorname{Exp}_v. \tag{12}$$

Из (12) для векторов $X$, удовлетворяющих (11), имеет место равенство

$$\operatorname{Exp}_v(sX) = \psi(\operatorname{Exp}_v(sX)) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1.$$

Следовательно, каждая точка геодезической $\gamma_X(s) = \operatorname{Exp}_v(sX)$ неподвижна относительно $\psi$. Эта геодезическая является образом прямой в $T_v\mathbb{T}^2$, заданной в системе координат $O, e_1, e_2$ уравнением $y = kx + b$, где

$$k = \begin{cases} (1 - b_{11})/b_{12}, & \text{если } b_{12} \neq 0, \\ b_{21}/2, & \text{если } b_{12} = 0,\ b_{11} = 1, \\ \infty, & \text{если } b_{12} = 0,\ b_{11} = -1. \end{cases}$$

При $k = \infty$ геодезическая $\gamma$ замкнута. Если $k \neq \infty$, то $k$ — рациональное число, поэтому $\gamma = \gamma_X(s)$ — также замкнутая геодезическая тора, а $r(\gamma)$, замкнутая геодезическая орбифолда $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, является компонентой связности одномерной страты $\Delta^1$.

Заметим, что $\phi_\tau = \{\langle E, \{\tau X\}\rangle \mid \tau \in \mathbb{R}^1\}$ представляет собой компактную 1-параметрическую группу изометрий тора $(\mathbb{T}^2, g)$, причем $\phi_\tau \circ \psi = \psi \circ \phi_\tau$ для любого $\tau \in \mathbb{R}^1$. Следовательно, $\phi_\tau$ индуцирует 1-параметрическую группу изометрий орбифолда $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$, транзитивную на $r(\gamma)$ и изоморфную группе $S^1$.

Таким образом, орбифолд $\mathcal{N}$ имеет стратификацию $\Delta = \{\Delta^2, \Delta^1\}$, причем каждая компонента связности $\Delta^1$ диффеоморфна окружности $S^1$. Из [2, теорема 1.1] вытекает, что страта наименьшей размерности является замкнутым подмногообразием в $\mathcal{N}$. Поэтому $\Delta^1$ представляет собой объединение конечного числа окружностей. Из леммы 5 следует, что стационарная подгруппа $\mathfrak{I}_w(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ изоморфна подгруппе группы $\mathbb{Z}_2$. Отсюда в силу инвариантности страты $\Delta^1$ относительно группы $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ и транзитивности $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ на каждой компоненте связности $\Delta^1$ вытекает компактность группы $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$.

Случай 2. Пусть $\Psi \cong \mathbb{Z}_2$, причем $\Psi = \langle\psi\rangle$, где $\psi$ сохраняет ориентацию тора. Тогда согласно предложению 2 орбифолд $\mathcal{N}$ изоморфен в категории $\mathcal{O}rb$ стандартной подушке, а его полная группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ некомпактна. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $\mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi_0$, где $\Psi_0 = \langle\psi_0\rangle$, $\psi_0 = \langle -E, \{0\}\rangle$. Утверждения 3 и 4 теоремы 5 вытекают из соответствующих утверждений предложения 2.

Случай 3. Пусть $\Psi \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. При этом найдутся такие различные, меняющие ориентацию тора изометрии $\phi, \gamma \in \Psi$, что $\Psi \cong \Gamma \times \Phi$, где $\Gamma = \langle\gamma\rangle \cong \mathbb{Z}_2$, $\Phi = \langle\phi\rangle \cong \mathbb{Z}_2$. Заметим, что $\phi = -\gamma$, $\phi^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2}$. Используя это, нетрудно показать, что $\operatorname{fix}(\Psi) \neq \varnothing$.

Композиция $\psi_1 = \phi \circ \gamma$ является нетривиальной сохраняющей ориентацию изометрией из $\Psi$, причем группа $\Psi_1 = \langle\psi_1\rangle$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$. Как показано при доказательстве предложения 2, подмножество $\operatorname{fix}(\Psi_1)$ состоит из четырех точек. Благодаря включению $\operatorname{fix}(\Psi) \subset \operatorname{fix}(\Psi_1)$ конечно и подмножество $\operatorname{fix}(\Psi)$. Следовательно, конечно подмножество $\Delta^0$ в $\mathcal{N}$, образованное орбифолдными точками с группой орбифолдности $\Psi$. Из леммы 5 вытекает, что стационарная подгруппа $\mathfrak{I}_w(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ группы изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ в точке $w = r(x)$, где $x \in \operatorname{fix}(\Psi)$, конечна. Поэтому инвариантность страты $\Delta^0$ относительно $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ влечет конечность орбиты $w \cdot \mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$. Тем самым группа $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ конечна.

Таким образом, группа $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ некомпактна только в случае 2. $\square$

## 8. Доказательство теоремы 6

Так как для любой плоской лоренцевой метрики $g$ на стандартном торе $\mathbb{T}^2$ группа $\Psi_0$ является группой изометрий, метрика $g$ однозначно определяет метрику $g_{\mathcal{N}}$ на $\mathcal{N}$, относительно которой фактор-отображение $r : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi_0$ — псевдориманово накрытие. При этом классу подобных лоренцевых метрик $[g] \in \mathcal{M}$ на $\mathbb{T}^2$ соответствует класс подобных лоренцевых метрик $[g_{\mathcal{N}}] \in \mathcal{L}$ на $\mathcal{N}$. Кроме того, если $[g_{\mathcal{N}}] \in \mathcal{L}$, то согласно предложению 1 лоренцева метрика $g = r^* g_{\mathcal{N}}$ определяет класс $[g] \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\kappa : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ — биекция. $\square$

## 9. Примеры

Во всех примерах $(\mathbb{T}^2, g)$ — плоский лоренцев тор, $(\mathcal{N} = \mathbb{T}^2/\Psi_0, g_{\mathcal{N}})$ — стандартная подушка с индуцированной лоренцевой метрикой, т. е. $r^* g_{\mathcal{N}} = g$.

Пример 1. Пусть лоренцева метрика $g$ тора в стандартном базисе имеет канонический вид $G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда изотропная геодезическая псевдоевклидовой плоскости $(\mathbb{R}^2, g)$, заданная уравнением $y = x$, посредством $\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ отображается в замкнутую геодезическую на торе. Из теоремы 2 вытекает, что группа $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$ компактна. Ее подгруппа $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$ порождена преобразованиями $E^{+-}$, $-E$. Согласно предложению 2 полная группа изометрий орбифолда $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ конечна и изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

Пример 2. Пусть $g$ — плоская лоренцева метрика на торе $\mathbb{T}^2$, заданная в стандартном базисе матрицей $G = \eta \begin{pmatrix} 1-k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\eta$ — произвольное не равное нулю действительное число, $k$ — целое число, отличное от $\pm 1$. Группа $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$ порождена преобразованиями: $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k^2-1 & k \end{pmatrix}$, $E^{+-}$, $-E$, следовательно, $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g) \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}) \ltimes T^2$ и $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ — некомпактная дискретная группа.

Пример 3. Пусть $g$ — плоская лоренцева метрика на $\mathbb{T}^2$, заданная в стандартном базисе матрицей $G = \eta \begin{pmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{pmatrix}$, где $\eta$ — любое отличное от нуля действительное число, $m$ — целое число, $|m| > 2$. Группа $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$ порождена преобразованиями: $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $-E$, поэтому $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g) \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}) \ltimes T^2$ и $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}) \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ — некомпактная дискретная группа.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Adem A., Leida J., Ruan Y.* Orbifolds and stringy topology. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. (Cambridge Tracts Math.; V. 171).
2. *Багаев А. В., Жукова Н. И.* Группы автоморфизмов $G$-структур конечного типа на орбиобразиях // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 263–278.
3. *Zhukova N. I.* Cartan geometry on orbifolds // Non-Euclidean geometry in modern physics: Proc. Fifth Intern. Conf. Bolyai–Gauss–Lobachevsky. B. I. Stepanov Institute of physics, National Academy of Sciences of Belarus, 2006. P. 228–238.
4. *Bagaev A. V., Zhukova N. I.* The automorphism group of some geometric structures on orbifolds // Lie groups: New research. New York: Nova Sci. Publ., Inc., 2009. P. 447–483.
5. *Багаев А. В., Жукова Н. И.* Группы изометрий римановых орбифолдов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 723–741.
6. *D'Ambra G., Gromov M.* Lectures on transformation groups: geometry and dynamics // Surv. Differ. Geom., Suppl. J. Differ. Geom. 1991. V. 1. P. 19–111.
7. *Zimmer R. J.* Automorphism groups and fundamental groups of geometric manifolds // Proc. Symp. Pure Math. 1993. V. 54. P. 693–710.
8. *Zeghib A.* Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. Part I. Foundations of Lorentz dynamics // Geom. Funct. Anal. 1999. V. 9. P. 775–822.
9. *Zeghib A.* Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. Part II. Geometry of analytic Lorentz manifolds with large isometry groups // Geom. Funct. Anal. 1999. V. 9. P. 823–854.
10. *Barbot T., Zeghib A.* Group actions on Lorentz spaces // Mathematical aspects: a survey in the Einstein equations and the large-scale behavior of gravitational fields. Basel: Birkhauser, 2004. P. 401–439.
11. *Sanchez M.* Structure of Lorentzian tori with a Killing vector field // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349, N 3. P. 1063–1080.
12. *Sanchez M.* Lorentzian manifolds admitting a Killing vector field // Nonlinear Anal. TMA. 1997. V. 30, N 1. P. 643–654.

**13.** *Mounoud P.* Dynamical properties of the space of Lorentzian metrics // Comment. Math. Helv. 2003. V. 78. P. 463–485.
**14.** *Frances C.* Essential conformal structures in Riemannian and Lorentzian geometry / Recent developments in pseudo-Riemannian geometry // ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zurich. 2008. P. 231–260.
**15.** *Deffaf M., Melnick K., Zeghib A.* Actions of noncompact semisimple groups on Lorentz manifolds // Geom. Funct. Anal. 2008. V. 18. P. 463–488.
**16.** *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1.

*Статья поступила 22 ноября 2011 г.*

Жукова Нина Ивановна, Рогожина Екатерина Александровна
Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
механико-математический факультет, кафедра геометрии и высшей алгебры,
пр. Гагарина, 23, корп. 6, Нижний Новгород 603950
`n.i.zhukova@rambler.ru`, `earogozhina@yandex.ru`