1999 г. март — апрель *т. 54, вып. 2(326)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 514.172.45+514.177+515.165.4

АНАЛОГ СООТНОШЕНИЙ ХОДЖА–РИМАНА ДЛЯ ПРОСТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В. А. Тиморин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{R}^d$ называется *простым*, если в каждой его вершине сходится ровно d ребер. Многие вопросы геометрии и комбинаторики простых многогранников оказались тесно связанными с алгебраической геометрией и, в частности, с теорией торических многообразий [1]–[4].

Пусть Δ – целочисленный многогранник в $\mathbb{R}^d$. *Целочисленность* означает, что все вершины многогранника Δ являются элементами целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$. С многогранником Δ связано некоторое комплексное алгебраическое многообразие $X(\Delta)$, на котором действует *комплексный тор* $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$. Многообразие $X(\Delta)$ содержит ровно одну плотную орбиту. Граница этой орбиты распадается в объединение орбит меньших размерностей.

Алгебраическое многообразие вместе с алгебраическим действием комплексного тора, удовлетворяющим перечисленным условиям, называется *торическим многообразием* (или *торическим вложением*). Итак, с каждым целочисленным многогранником Δ связано торическое многообразие $X(\Delta)$. На многообразии $X(\Delta)$ действует, в частности, компактный тор $T^n\subseteq(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, заданный уравнениями $|z_j|=1$. Факторпространство торического многообразия $X(\Delta)$ по действию компактного тора естественным образом отождествляется с самим многогранником Δ.

Ограничимся для простоты случаем, когда многообразие $X(\Delta)$ является неособым. В этом случае $X(\Delta)$ можно рассматривать как комплексно-аналитическое подмногообразие в $\mathbb{CP}^N$. Неособость торического многообразия эквивалентна следующему геометрическому условию на многогранник. Многогранник Δ называется *целочисленно простым*, если для каждой вершины v примитивные целочисленные векторы ребер, выходящих из v, составляют базис целочисленной решетки. Многообразие $X(\Delta)$ является неособым тогда и только тогда, когда многогранник Δ целочисленно простой.

Предположим, что многогранник Δ целочисленно простой, а значит, многообразие $X(\Delta)$ гладкое. Обозначим через

$$h_k=\dim H^{2k}(X(\Delta),\mathbb{C})$$

четномерные числа Бетти многообразия $X(\Delta)$. Все нечетномерные числа Бетти равны нулю. Оказывается, что числа h_k – это важные комбинаторные характеристики многогранника Δ. Пусть f_i – это число граней многогранника Δ размерности i. Тогда

$$h_k=\sum_{i\geqslant k} f_i(-1)^{i-k}\binom{i}{k}.$$

Многообразие $X(\Delta)$ компактно. Следовательно, имеют место соотношения двойственности Пуанкаре

$$h_k=h_{d-k}.$$

Эти соотношения были известны задолго до обнаружения связи между геометрией многогранников и алгебраической геометрией. Для размерностей $d=4$ и $d=5$ их

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00455), INTAS (грант № 93-570ext) и программы "Соросовские студенты" (грант № s98-1682).

выписал в 1905 году М. Ден. Все соотношения при произвольном d нашел в 1927 году Д. Соммервиль.

Кроме соотношений Дена–Соммервиля, имеются некоторые соотношения на числа h_k типа неравенств. Например, согласно сильной теореме Лефшеца, примененной к торическому многообразию $X(\Delta)$, числа h_k образуют горку, т.е. до середины возрастают, а потом убывают:

$$h_k \leqslant h_{k+1}, \qquad k < \frac{d+1}{2}\,.$$

Есть еще некоторые условия типа неравенств, связанные с тем, что числа $h_{k+1} - h_k$, $k < n/2$, являются размерностями однородных компонент некоторой коммутативной градуированной алгебры, порожденной элементами первой степени. Эта алгебра получается как фактор кольца когомологий торического многообразия по некоторому главному идеалу (подробности см. в [5]).

П. Макмюллен в 1971 г. выдвинул гипотезу о необходимых и достаточных условиях на числа h_k для простого выпуклого многогранника. Р. Стенли в 1980 г. доказал необходимость условий Макмюллена, а Л. Биллера и К. Ли в 1981 г. доказали достаточность. Доказательство Стенли опирается на теорию торических многообразий, в то время как доказательство достаточности, предложенное Биллера и Ли, чисто геометрическое. В 1993 г. Макмюллен предложил геометрическое доказательство теоремы Стенли. Доказательство технически сложно. Одна из проблем – описание аналога кольца когомологий торического многообразия в геометрических терминах.

Задача геометрического доказательства теоремы Стенли связана с задачей описания на геометрическом языке соотношений Ходжа–Римана в кольце когомологий торических многообразий. Некоторый частный случай соотношений Ходжа–Римана в переводе на геометрический язык дает известные неравенства Александрова–Фенхеля на смешанные объемы.

Выпуклым телом в пространстве $\mathbb{R}^d$ называется компактное выпуклое множество. Пусть A и B – выпуклые тела. *Суммой Минковского* выпуклых тел A и B называется множество

$$C = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Нетрудно проверить, что множество C тоже является выпуклым телом. Выпуклые тела можно умножать на положительные числа. Умножение на отрицательные числа следует запретить. Тем самым на множестве выпуклых тел определена структура выпуклого конуса – тела можно складывать и умножать на положительные числа. Этот конус можно дополнить до векторного пространства при помощи стандартной конструкции группы Гротендика. Элементы этого векторного пространства будем называть *виртуальными выпуклыми телами.*

Оказывается, что функция объема, сопоставляющая каждому выпуклому телу его объем, продолжается до некоторого однородного многочлена степени d на пространстве виртуальных выпуклых тел. Однако всякому однородному многочлену соответствует симметрическая полилинейная форма – его поляризация. Поляризация многочлена объема называется *смешанным объемом.* Таким образом, для каждого набора виртуальных выпуклых тел $A_1, A_2, \dots, A_d$ определен их смешанный объем $\mathrm{Vol}(A_1, A_2, \dots, A_d)$.

А. Д. Александров в 1937 г. доказал следующие замечательные неравенства, связывающие смешанные объемы выпуклых тел:

$$\mathrm{Vol}(A_1, A_2, A_3, \dots, A_d)^2 \geqslant \mathrm{Vol}(A_1, A_1, A_3, \dots, A_d) \cdot \mathrm{Vol}(A_2, A_2, A_3, \dots, A_d)$$

(неравенства Александрова–Фенхеля).

Если зафиксировать выпуклые тела $A_3, \dots, A_d$, то смешанный объем

$$\mathrm{Vol}(A_1, A_2, A_3, \dots, A_d)$$

оказывается квадратичной формой относительно виртуальных выпуклых тел A_1 и A_2. Неравенства Александрова–Фенхеля говорят о том, что для настоящих выпуклых тел эта квадратичная форма удовлетворяет обращенному неравенству Коши–Буняковского. Конечно, это связано с тем, что положительный индекс инерции квадратичной формы равен единице. Отрицательный индекс инерции равен бесконечности – форма определена на бесконечномерном пространстве и имеет d-мерное ядро. Ядро формы смешанного объема составляют просто все точки пространства $\mathbb{R}^d$, рассматриваемые как выпуклые тела.

Очень важное конечномерное подпространство бесконечномерного пространства виртуальных выпуклых тел составляют выпуклые многогранники, аналогичные данному простому выпуклому многограннику. Дадим индуктивное определение аналогичных многогранников. Два многогранника называются *аналогичными*, если между их гиперплоскими гранями можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие грани будут параллельны, одинаково ориентированы и аналогичны. Ориентация гиперплоской грани определяется направлением внешней нормали. Любые два отрезка на прямой считаются аналогичными.

Фиксируем некоторый простой выпуклый многогранник Δ. Заметим, что сумма по Минковскому двух выпуклых многогранников, аналогичных многограннику Δ, тоже является многогранником, аналогичным многограннику Δ. Натянув линейную оболочку в пространстве виртуальных выпуклых тел на все многогранники, аналогичные многограннику Δ, мы получим конечномерное векторное пространство $\mathscr{P}^*(\Delta)$. Размерность этого пространства равна числу гиперплоских граней многогранника Δ.

В пространстве $\mathscr{P}^*(\Delta)$ можно естественным образом ввести систему координат. Всякий многогранник, аналогичный многограннику Δ, имеет те же направляющие ковекторы (внешние нормали) $\xi_1, \dots, \xi_n$ гиперплоских граней. Рассмотрим многогранник P, аналогичный многограннику Δ. Многогранник P однозначно определяется своими *опорными числами*

$$H_i = \max_{p \in P} (\xi_i, p).$$

Таким образом, опорные числа задают систему координат в пространстве $\mathscr{P}^*(\Delta)$. Обозначим эти координаты через $x_1, \dots, x_n$.

Многочлен объема, ограниченный на подпространство $\mathscr{P}^*(\Delta)$, в координатах записывается как $V(x_1, \dots, x_n)$. Каждому многограннику $P \in \mathscr{P}^*(\Delta)$ соответствует линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} H_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где H_i – опорные числа многогранника P. Объем многогранника P выражается формулой

$$\mathrm{Vol}(P) = \frac{1}{d!}\, L_P^d V.$$

Смешанный объем системы многогранников $P_1, \dots, P_d$ равен соответственно

$$\mathrm{Vol}(P_1, \dots, P_d) = \frac{1}{d!}\, L_{P_1} \cdots L_{P_d} V.$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор α с постоянными коэффициентами на пространстве $\mathscr{P}^*(\Delta)$. Предположим, что этот оператор однородный степени k. Оператор α называется *примитивным* относительно многогранника Δ, если

$$\alpha L_\Delta^{d-2k+1} V = 0.$$

Для примитивных операторов справедлив следующий аналог соотношений Ходжа–Римана:

$$(-1)^k \alpha^2 L_\Delta^{d-2k} V \geqslant 0,$$

причем равенство достигается, только если $\alpha V = 0$. При $k = 1$ мы получаем частный случай неравенств Александрова–Фенхеля:

$$\mathrm{Vol}(P_1, P_2, \Delta, \dots, \Delta)^2 \geqslant \mathrm{Vol}(P_1, P_1, \Delta, \dots, \Delta) \cdot \mathrm{Vol}(P_2, P_2, \Delta, \dots, \Delta).$$

Это классические неравенства Брунна–Минковского.

Имеется смешанный аналог соотношений Ходжа–Римана. Пусть α – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами на пространстве $\mathscr{P}^*(\Delta)$, однородный степени k. Оператор α называется *примитивным* относительно многогранника Δ и семейства многогранников $P_1, \dots, P_{d-2k} \in \mathscr{P}^*(\Delta)$, если

$$\alpha L_\Delta L_{P_1} \cdots L_{P_{d-2k}} V = 0.$$

Примитивные операторы удовлетворяют следующему смешанному аналогу соотношений Ходжа–Римана:

$$(-1)^k \alpha^2 L_{P_1} \cdots L_{P_{d-2k}} V \geqslant 0,$$

причем равенство достигается, только если $\alpha V = 0$. При $k = 1$ получаем неравенства Александрова–Фенхеля.

В настоящей работе приведен обзор некоторых методов и результатов комбинаторной теории простых выпуклых многогранников. Особое внимание уделяется тем геометрическим структурам, возникновение которых было мотивировано аналогичными структурами в геометрии торических многообразий. В частности, определяется аналог кольца когомологий торического многообразия. Этот аналог был построен А. В. Пухликовым и А. Г. Хованским [6] в связи с многомерным обобщением формулы Эйлера–Маклорена. Геометрическое определение аналога кольца когомологий позволяет сформулировать и доказать в геометрических терминах такие результаты, как сильная теорема Лефшеца и соотношения Ходжа–Римана. Из аналога сильной теоремы Лефшеца вытекает теорема Стенли. Приведенное здесь новое геометрическое доказательство теоремы Стенли основано на рассуждениях Макмюллена [7] и на описании алгебры многогранника, предложенном Пухликовым и Хованским. Доказательство аналога соотношений Ходжа–Римана опирается на метод гомотопии, восходящий еще к А. Д. Александрову [8], который пользуется этим методом для доказательства неравенств Александрова–Фенхеля.

Я благодарен А. Г. Хованскому за полезные обсуждения и внимание к работе.

§ 1. Комбинаторика простых многогранников

В этом параграфе приведены основные определения, относящиеся к комбинаторике простых выпуклых многогранников. Даны определения f-вектора и h-вектора простого выпуклого многогранника, сформулированы и доказаны соотношения Дена–Соммервиля, сформулирована теорема Стенли.

1.1. Простые многогранники. Пусть Δ – выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{R}^d$. Многогранник Δ называется *простым*, если в окрестности каждой вершины он выглядит как конус над $(d-1)$-мерным симплексом (т.е. в каждой вершине сходятся ровно d гиперплоских граней). Очевидно, многогранник, гиперплоские грани которого находятся в общем положении, является простым. В частности, если грани простого многогранника слегка пошевелить, то многогранник останется простым.

Пусть Δ – простой многогранник. Обозначим через f_i число граней размерности i в многограннике Δ (сам многогранник считается гранью размерности d, так что $f_d = 1$).

Определение. Набор чисел $f_0, \dots, f_d$ называется *f-вектором* многогранника Δ (от слова “face” – грань).

Определение. *F-полиномом* многогранника Δ называется производящая функция числа граней, т.е. многочлен

$$F(t) = \sum_{i=0}^{d} f_i t^i.$$

Во многих случаях бывает удобней рассматривать другой многочлен, по которому F-полином восстанавливается однозначно:

$$H(t) = F(t-1) = \sum_{k=0}^{d} h_k t^k, \qquad h_k = \sum_{i \geqslant k} f_i (-1)^{i-k} \binom{i}{k}.$$

Определение. Числа $h_0, \dots, h_d$ образуют *h-вектор* многогранника Δ (от слова “homology” – гомология).

Из выписанных формул становится ясно, что задание h-вектора эквивалентно заданию f-вектора. Именно, f-вектор простого многогранника выражается через h-вектор по формуле

$$F(t) = H(t+1), \qquad f_i = \sum_{k \geqslant i} h_k \binom{k}{i}.$$

Пример. Пусть Δ – симплекс размерности d. Тогда

$$f_i = \binom{d+1}{i+1}, \qquad i \leqslant d.$$

Действительно, всякая i-мерная грань симплекса содержит ровно $i+1$ вершину. С другой стороны, выпуклая оболочка всякого набора из $i+1$ вершины многогранника Δ является гранью размерности i.

Таким образом, F-полином симплекса равен

$$F(t) = (d+1) + \binom{d+1}{2}t + \binom{d+1}{3}t^3 + \dots + t^d = \frac{(t+1)^{d+1}-1}{t}.$$

Отсюда получаем следующее выражение для H-полинома симплекса:

$$H(t) = F(t-1) = \frac{t^{d+1}-1}{t-1} = 1 + t + \dots + t^{d-1} + t^d.$$

Следовательно, все компоненты h-вектора симплекса равны единице.

Пример. Пусть Δ_1 и Δ_2 – выпуклые многогранники размерностей m и $d-m$ соответственно. Выразим h-вектор прямого произведения $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ через h-векторы многогранников Δ_1 и Δ_2. Заметим, что всякая k-мерная грань многогранника Δ является прямым произведением $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ грани Γ_1 многогранника Δ_1 и грани Γ_2 многогранника Δ_2 таких, что $\dim(\Gamma_1) + \dim(\Gamma_2) = k$. Отсюда получаем:

$$f_k(\Delta_1 \times \Delta_2) = \sum_{i=0}^{k} f_i(\Delta_1) f_{k-i}(\Delta_2).$$

Другими словами, справедливо следующее соотношение на F-полиномы:

$$F_{\Delta_1 \times \Delta_2}(t) = F_{\Delta_1}(t) F_{\Delta_2}(t).$$

Но тогда точно таким же соотношением связаны H-полиномы:

$$H_{\Delta_1 \times \Delta_2}(t) = H_{\Delta_1}(t) H_{\Delta_2}(t).$$

Пример. Предположим теперь, что простой многогранник Δ имеет ровно $d+2$ гиперплоские грани (т.е. на одну грань больше, чем у симплекса той же размерности).

Предложение 1.1.1. *Всякий d-мерный простой выпуклый многогранник Δ с $d+2$ гиперплоскими гранями комбинаторно эквивалентен прямому произведению двух симплексов.*

Доказательство. Многогранник Δ ограничен $d+2$ гиперплоскостями. Можно считать, что эти гиперплоскости находятся в общем положении. Если их слегка пошевелить, комбинаторный тип многогранника не изменится. Из $d+2$ гиперплоскостей выберем $d+1$. Выбранные гиперплоскости ограничивают симплекс S. Оставшуюся гиперплоскость обозначим через H.

Гиперплоскость H разбивает множество вершин симплекса S на два подмножества – $m+1$ вершина лежит по одну сторону от гиперплоскости H, а $d-m$ вершин – по другую.

Пусть H^+ – полупространство, ограниченное гиперплоскостью H и содержащее многогранник Δ. Будем считать, что $m+1$ вершина симплекса S попала в полупространство H^+. Тогда выпуклая оболочка F этих вершин является гранью многогранника Δ. Выпуклую оболочку остальных вершин симплекса S обозначим через G.

Многогранник Δ расслаивается на $(d-m)$-мерные симплексы вида

$$\operatorname{conv}(\{x\} \cup G) \cap H^+, \qquad x \in F,$$

(через $\operatorname{conv}(X)$ мы обозначаем выпуклую оболочку множества X). Эти симплексы запараметризованы точкой $x \in F$. Указанное расслоение задает в многограннике Δ структуру прямого произведения. Таким образом, многогранник Δ отождествляется с произведением m-мерного симплекса F на некоторый $(d-m)$-мерный симплекс. Это отождествление, как легко проверить, задает комбинаторную эквивалентность.

Обозначим через S_m симплекс размерности m. Как мы только что доказали, всякий простой d-мерный многогранник Δ с $d+2$ гиперплоскими гранями комбинаторно эквивалентен произведению

$$S_m \times S_{d-m}.$$

Следовательно, H-полином многогранника Δ можно посчитать по формуле

$$H_\Delta(t) = H_{S_m}(t) H_{S_{d-m}}(t) = \frac{(t^{m+1}-1)(t^{d-m+1}-1)}{(1-t)^2}.$$

Отсюда, в частности, видно, что различные произведения симплексов не являются комбинаторно эквивалентными (произведения, отличающиеся лишь порядком сомножителей, мы считаем одинаковыми).

1.2. Соотношения Дена–Соммервиля. Возникает естественный вопрос: какие наборы целых чисел являются f-векторами простых выпуклых многогранников. Некоторые необходимые условия можно выписать сразу. Например, теорема Эйлера утверждает, что

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i = 1.$$

Это верно для произвольных выпуклых многогранников, не обязательно простых. Для произвольных выпуклых многогранников этой теоремой исчерпываются все линейные соотношения на f-вектор. Однако для простых многогранников есть и другие линейные соотношения. Например, нетрудно получить соотношение между количеством ребер и количеством вершин: $f_1 = \dfrac{d \cdot f_0}{2}$. Оба выписанных соотношения обобщаются *соотношениями Дена–Соммервиля*, которые удобней всего формулировать для h-векторов:

$$h_k = h_{n-k}, \qquad h_0 = h_d = 1.$$

Другими словами, h-вектор симметричен относительно середины.

Приведенное ниже доказательство соотношений Дена–Соммервиля следует работе [9]. Там же объясняется внешнее сходство приводимых рассуждений со стандартными рассуждениями теории Морса. Дело в том, что соотношения Дена–Соммервиля отвечают двойственности Пуанкаре для соответствующего торического многообразия. Конструкция из теории Морса, доказывающая теорему двойственности Пуанкаре, переносится на многогранник при помощи отображения момента.

Пусть Δ – простой выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим произвольную линейную функцию l на пространстве $\mathbb{R}^d$, не постоянную ни на какой грани многогранника Δ положительной размерности. Такую функцию мы будем называть *общей линейной функцией* на многограннике. Вершина многогранника индекса m (относительно общей линейной функции l) – это такая вершина, из которой ровно m ребер идут вниз (т.е. функция l, ограниченная на эти ребра, убывает). Остальные ребра идут вверх.

Обозначим через $B(l,m)$ число вершин индекса m многогранника Δ относительно общей линейной функции l.

Предложение 1.2.1. *Число $B(l,m)$ не зависит от конкретного выбора общей линейной функции l и явно выражается через компоненты f-вектора многогранника. Именно,*

$$B(l,m) = h_m.$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения заметим, что вершина индекса m есть точка максимума нашей линейной функции, ограниченной на какую-то грань размерности $\leqslant m$. Посчитаем теперь число f_i следующим образом. Каждой i-мерной грани многогранника Δ сопоставим вершину, в которой ограничение функции l на рассматриваемую грань принимает наибольшее значение. Получим вершину индекса $m \geqslant i$. Однако из каждой такой вершины выходит вниз ровно $\binom{m}{i}$ i-мерных граней. Следовательно, для того чтобы посчитать число граней размерности i в многограннике Δ, нужно посчитать все вершины индекса $\geqslant i$, причем вершину индекса m следует посчитать $\binom{m}{i}$ раз. Таким образом,

$$f_i = \sum_{m \geqslant i} B(l,m) \binom{m}{i}.$$

Следовательно, по определению h-вектора, $B(l,m) = h_m$. Отсюда видно, что число $B(l,m)$ не зависит от выбора линейной функции l.

Сменим знак у линейной функции l. С одной стороны, согласно доказанному предложению, число $B(l,m)$ не изменится. С другой стороны, все точки индекса m превратятся в точки индекса $d-m$. Поэтому

$$h_m = B(l,m) = B(-l, d-m) = h_{d-m}.$$

Соотношения Дена–Соммервиля доказаны.

1.3. Теорема Стенли. Соотношениями Дена–Соммервиля исчерпываются все линейные соотношения на h-вектор простого выпуклого многогранника. Но есть еще некоторые соотношения типа неравенств. Необходимые и достаточные условия на h-вектор простого многогранника были сформулированы Макмюлленом, а доказаны Стенли [5] (необходимость), Биллера и Ли [10] (достаточность).

Прежде чем сформулировать условия Макмюллена, дадим следующее определение: пусть a и r – натуральные числа. *Каноническим r-представлением* числа a называется разложение

$$a = \binom{a_r}{r} + \binom{a_{r-1}}{r-1} + \cdots + \binom{a_i}{i}, \qquad a_r > a_{r-1} > \cdots > a_i \geqslant i \geqslant 1.$$

Можно показать, что для фиксированных a и r такое разложение существует и единственно. Пусть s – еще одно натуральное число. Тогда *частичная степень* определяется следующим образом:

$$a^{\langle s|r\rangle} = \binom{a_r + s - r}{s} + \binom{a_{r-1} + s - r}{s-1} + \cdots + \binom{a_i + s - r}{i + s - r}.$$

Обычно полагают $0^{\langle s|r\rangle} = 0$.

Определение. Последовательность целых чисел $(g_0, g_1, \ldots)$ называется *M-последовательностью*, если выполнены следующие соотношения:

$$g_0 = 1, \qquad (\forall\, r \geqslant 0) \;\; 0 \leqslant g_{r+1} \leqslant g_r^{\langle r+1|r\rangle}.$$

Известно, что размерности однородных компонент коммутативной градуированной алгебры, порожденной элементами первой степени, образуют M-последовательность. Теперь мы можем, наконец, сформулировать условия Макмюллена:

- h-вектор удовлетворяет соотношениям Дена–Соммервиля.
- h-вектор удовлетворяет теореме о горке, т.е. компоненты h-вектора до середины возрастают, а потом убывают:

$$h_i \leqslant h_{i+1}, \qquad i < d/2.$$

- Числа

$$g_0 = 1,\ g_1 = h_1 - h_0,\ g_2 = h_2 - h_1,\ \ldots,\ g_r = h_r - h_{r-1},\ \ldots$$

  образуют M-последовательность.

Доказательство Стенли сводит теорему о горке к разложению Лефшеца в кольце когомологий торического многообразия. Ниже будут намечены основные идеи этого доказательства.

В 1993 г. Макмюллен опубликовал доказательство теоремы о горке [7], не использующее алгебраической геометрии. Он строит по многограннику некоторую коммутативную алгебру и для этой алгебры доказывает аналоги разложения Лефшеца и соотношений Ходжа–Римана.

В настоящей работе приводится доказательство соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников, использующее более прозрачное описание алгебры многогранника (это описание предложено А.В. Пухликовым и А.Г. Хованским в [6]). Предлагаемое доказательство получено заменой в рассуждениях Макмюллена одной алгебры на другую. Однако эта замена позволяет, с одной стороны, избежать некоторых трудностей технического характера, а с другой стороны, делает доказательство более геометричным.

Остальные разделы настоящего параграфа служат для мотивировки основных результатов и не являются необходимыми для понимания дальнейшего.

1.4. Кэлеровы многообразия. Классические соотношения Ходжа–Римана определены в кольце когомологий кэлерова многообразия. Ниже приведены основные определения из теории кэлеровых многообразий, необходимые для формулировки соотношений Ходжа–Римана.

Пусть M – компактное комплексное многообразие размерности d. Тогда пространство Λ всех гладких дифференциальных форм на M можно разложить в следующую прямую сумму:

$$\Lambda = \bigoplus_{p,q\leqslant d} \Lambda^{p,q}.$$

Биоднородная компонента $\Lambda^{p,q}$ порождается произведениями p голоморфных и q антиголоморфных дифференциалов. Предположим, что фиксирована *замкнутая* 2-форма

$$\omega \in \Lambda^{1,1},$$

которая в каждой точке положительна. Положительность означает, что для всякого ненулевого касательного вектора ξ имеет место неравенство

$$\omega(\xi, i\xi) > 0. \tag{1.4.1}$$

Другими словами, при ограничении на любую комплексную площадку наша форма дает форму объема площадки с положительным коэффициентом. Неравенство (1.4.1) эквивалентно тому, что форма ω является мнимой частью некоторой положительно определенной эрмитовой метрики. Условие $\omega \in \Lambda^{1,1}$ означает, что рассматриваемая форма инвариантна относительно умножения на мнимую единицу:

$$\omega(i\xi, i\eta) = \omega(\xi, \eta).$$

Многообразие M, снабженное формой ω с описанными свойствами, называется *кэлеровым многообразием.*

1.5. Форма Ходжа–Римана на кэлеровом многообразии.

Определение. Форма $\alpha \in \Lambda^{p,q}$ на кэлеровом многообразии называется *примитивной*, если

$$[\alpha \wedge \omega^{d-p-q+1}] = 0$$

(квадратные скобки означают класс когомологий).

Понятие примитивности зависит только от класса когомологий формы α, поэтому имеет смысл говорить о примитивных классах когомологий. В классах когомологий имеется такое же разложение на биоднородные компоненты, как и в дифференциальных формах (разложение Ходжа):

$$H^*(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p,q\leqslant d} H^{p,q}(M, \mathbb{C}).$$

Определение. На биоднородной компоненте $H^{p,q}$ определена так называемая *форма Ходжа–Римана*:

$$q(\alpha) = i^{p-q}(-1)^{\frac{(d-p-q)(d-p-q-1)}{2}} \int_M \alpha \wedge \overline{\alpha} \wedge \omega^{d-p-q}.$$

Теорема 1.5.1 (соотношения Ходжа–Римана). *Форма Ходжа–Римана положительно определена на примитивных классах когомологий.*

Доказательство соотношений Ходжа–Римана приведено, например, в [11]. Так или иначе, доказательство разбивается на две части. Первая часть – это локальный (линейный) вариант соотношений Ходжа–Римана, в котором рассматриваются постоянные дифференциальные формы в $\mathbb{C}^n$. Вторая часть – глобализация. Здесь используется теория гармонических форм. Основная идея состоит в том, что среди всех дифференциальных форм на компактном кэлеровом многообразии выделяется конечномерное подпространство *гармонических форм*, удовлетворяющих следующим условиям:

- в каждом классе когомологий найдется единственный гармонический представитель – форма наименьшей длины относительно некоторой евклидовой метрики на пространстве дифференциальных форм,
- если гармоническая форма представляет нулевой класс когомологий, то она сама тождественно равна нулю,
- сумма и внешнее произведение гармонических форм – снова гармонические формы,
- ω – гармоническая форма.

При помощи перечисленных выше свойств гармонических форм нетрудно свести общие соотношения Ходжа–Римана к их локальному варианту. Дело в том, что если α – гармоническая форма, класс когомологий которой примитивен, т.е. $[\alpha\wedge\omega^{d-p-q+1}] = 0$, то равенство $\alpha \wedge \omega^{d-p-q+1} = 0$ выполняется в каждой точке.

1.6. Разложение Лефшеца. Пусть M – компактное кэлерово многообразие. Обозначим через L оператор умножения на класс формы ω в кольце когомологий. Другими словами, оператор L переводит класс $[\alpha] \in H^{p,q}$ (α – некоторая замкнутая (p,q)-форма) в класс $[\omega \wedge \alpha] \in H^{p+1,q+1}$. Проверка корректности этого определения не составляет труда. Сформулируем теперь сильную теорему Лефшеца:

Теорема 1.6.1 (Лефшец). *Оператор L^{d-p-q} осуществляет изоморфизм между пространствами $H^{p,q}$ и $H^{d-q,d-p}$.*

Современное доказательство этой теоремы использует тот факт, что на кольце когомологий кэлерова многообразия определено естественное представление алгебры sl_2, причем матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

действует посредством оператора L. Подробности см. в [12].

Следствие 1.6.2. *В ограничении на каждую компоненту $H^{p,q}$ кольца когомологий компактного кэлерова многообразия такую, что $p + q \leqslant d$, форма Ходжа–Римана невырождена.*

Доказательство. Нам достаточно для каждой дифференциальной формы $\alpha \in \Lambda^{p,q}$, задающей ненулевой класс когомологий, предъявить такую форму $\beta \in \Lambda^{p,q}$, что

$$\int_M \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{d-p-q} \neq 0.$$

Действительно, согласно сильной теореме Лефшеца форма $\alpha \wedge \omega^{d-p-q}$ задает ненулевой класс когомологий. Мы можем считать без ограничения общности, что форма α является гармонической. В этом случае форма

$$\beta = *(\alpha \wedge \omega^{d-p-q})$$

тоже будет гармонической (известно, что оператор "звездочка" переводит гармонические формы в гармонические), а потому замкнутой. Теперь воспользуемся известным равенством

$$\alpha_1 \wedge *\alpha_2 = (\alpha_1, \alpha_2) \cdot \mathrm{vol}\,.$$

Здесь α и β – биоднородные формы одной и той же бистепени, vol – форма объема. Согласно указанному равенству в нашем случае

$$\pm \int_M \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{d-p-q} > 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1.6.3 (разложение Лефшеца). *Имеет место следующее разложение в ортогональную прямую сумму*:

$$H^{p,q} = \mathrm{Im}(L) \oplus \mathrm{Ker}\big(L^{d-p-q+1}\big) \qquad (p+q>0).$$

Ортогональность понимается в смысле формы Ходжа–Римана. В частности, любой биоднородный класс когомологий можно единственным образом представить в виде суммы класса, кратного $[\omega]$, и примитивного класса. При этом слагаемые окажутся ортогональными в смысле формы Ходжа–Римана.

Доказательство. Докажем сначала, что имеется разложение в прямую сумму. Для этого достаточно заметить, что оператор $L^{d-p-q+1}$ является изоморфизмом в ограничении на подпространство $\mathrm{Im}(L)$. Это вытекает из сильной теоремы Лефшеца, примененной к оператору

$$L^{d-p-q+2} \colon H^{p-1,q-1} \to H^{d-q+1,d-p+1}.$$

Осталось проверить, что прямая сумма ортогональна. Действительно, пусть

$$L\alpha \in \mathrm{Im}(L), \qquad \beta \in \mathrm{Ker}\big(L^{d-p-q+1}\big).$$

Значение формы Ходжа–Римана на выбранных элементах равно

$$\pm \int_M \big(\omega \wedge \alpha\big) \wedge \beta\omega^{d-p-q} = \pm \int_M \alpha \wedge \big(\omega^{d-p-q+1} \wedge \beta\big) = 0,$$

так что выбранные элементы действительно ортогональны.

Следствие 1.6.4. *Размерность примитивного подпространства однородной компоненты $H^{p,q}$ кольца когомологий компактного кэлерова многообразия равна*

$$\dim \operatorname{Ker}\bigl(L^{d-p-q+1}\bigr) = \dim H^{p,q} - \dim H^{p-1,q-1}.$$

Следствие 1.6.4 непосредственно вытекает из следствия 1.6.3 и сильной теоремы Лефшеца.

Следствие 1.6.5. *Форма Ходжа–Римана невырождена в ограничении на каждое примитивное подпространство* $\operatorname{Ker}\bigl(L^{d-p-q+1}\bigr)$, $p+q \leqslant d$.

Это непосредственно вытекает из следствий 1.6.2 и 1.6.3. Доказанное следствие говорит, в частности, о том, что числа Ходжа $h^{p,p} = \dim H^{p,p}$ образуют горку (до середины возрастают, а потом убывают).

1.7. Целочисленно простые многогранники. Многогранник в $\mathbb{R}^n$ называется *целочисленным*, если все его вершины имеют целые координаты, т.е. лежат в $\mathbb{Z}^n$. С каждым целочисленным многогранником Δ связано так называемое торическое многообразие $X(\Delta)$. Это алгебраическое многообразие, топологические свойства которого соответствуют комбинаторным свойствам многогранника Δ. Многогранник называется *целочисленно простым*, если для каждой вершины многогранника направляющие целочисленные векторы ребер, выходящих из этой вершины, образуют базис целочисленной решетки. При этом направляющие целочисленные векторы, конечно, следует выбирать таким образом, чтобы они имели минимальную длину.

Для целочисленно простого многогранника Δ многообразие $X(\Delta)$ оказывается гладким алгебраическим многообразием, вложенным в проективное пространство, а потому наделенным индуцированной кэлеровой метрикой. Оказывается, что числа $h^{p,p}(X(\Delta))$ совпадают с числами Дена–Соммервиля $h_p(\Delta)$. Таким образом, теорема о горке для многогранника Δ вытекает из разложения Лефшеца на соответствующем торическом многообразии $X(\Delta)$.

Целочисленному многограннику, не являющемуся целочисленно простым, соответствует особое торическое многообразие с простейшими особенностями. В когомологиях Макферсона таких многообразий тоже есть разложение Лефшеца. Используя этот факт, можно доказать теорему о горке для произвольного простого многогранника. Дело в том, что всякий простой многогранник комбинаторно эквивалентен целочисленному. Проще всего это увидеть, если рассмотреть двойственный симплициальный многогранник. Если слегка пошевелить вершины симплициального многогранника, то можно их сделать рациональными, не изменив комбинаторного типа. Простой многогранник, двойственный к симплициальному многограннику с рациональными вершинами, тоже имеет рациональные вершины. После гомотетии с подходящим целым коэффициентом многогранник станет целочисленным. Таким образом, теорема о горке для простого многогранника сводится к разложению Лефшеца в когомологиях торического многообразия. В этом и состоит доказательство Стенли (см. [5]).

§ 2. Многочлен объема и алгебра многогранника

Настоящий параграф посвящен описанию в удобной для нас форме алгебры простого выпуклого многогранника. Эта алгебра получается из алгебры дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами путем факторизации по идеалу, аннулирующему многочлен объема. Выписаны явно образующие этого идеала. Доказано, что размерности однородных компонент алгебры многогранника совпадают с компонентами h-вектора многогранника.

2.1. Многочлен объема.

Определение. Пусть Δ – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$, а Γ – его гиперплоская грань. *Направляющим ковектором* (или *внешней нормалью*) грани Γ называется линейный функционал ξ на пространстве $\mathbb{R}^d$, который, в ограничении на многогранник Δ, достигает максимального значения в точности на грани Γ. Направляющий ковектор гиперплоской грани определен однозначно с точностью до умножения на положительную постоянную.

Выражаясь неформально, два многогранника *аналогичны*, если их грани имеют одинаковую комбинаторику и одинаково ориентированы в пространстве. Два многогранника *комбинаторно эквивалентны*, если их грани имеют одинаковую комбинаторику (в частности, совпадают f-векторы). Дадим теперь точные определения по индукции.

Определение. Два многогранника называются *аналогичными*, если между их гиперплоскими гранями можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие грани имеют одинаковые направления внешних нормалей и аналогичны. Совпадение внешних нормалей к соответствующим гиперплоским граням просто означает, что эти грани параллельны и одинаково ориентированы. Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если между их гиперплоскими гранями можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие грани комбинаторно эквивалентны. Любые два отрезка на прямой по определению комбинаторно эквивалентны и аналогичны.

Легко проверить, что комбинаторно эквивалентные многогранники имеют одинаковые f-векторы. Два аналогичных многогранника, конечно, комбинаторно эквивалентны.

Рассмотрим простой выпуклый многогранник P в пространстве $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $\mathscr{P}(P)$ множество всех многогранников, аналогичных многограннику P. Пусть многогранники $P', P'' \in \mathscr{P}(P)$ аналогичны многограннику P. Тогда их сумма по Минковскому

$$P' + P'' = \{p' + p'' \mid p' \in P',\ p'' \in P''\}$$

тоже представляет собой простой многогранник, аналогичный P. Далее, если многогранник P' аналогичен многограннику P, то многогранник

$$\lambda P' = \{\lambda p' \mid p' \in P'\}, \qquad \lambda > 0,$$

также аналогичен P. Таким образом, во множестве $\mathscr{P}(P)$ определены естественные операции сложения и умножения на положительные числа. Другими словами, множество $\mathscr{P}(P)$ наделено структурой выпуклого конуса.

Конус $\mathscr{P}(P)$ можно дополнить до векторного пространства, рассматривая формальные разности. Обозначим это векторное пространство через $\mathscr{P}^*(P)$. Пространство $\mathscr{P}^*(P)$ мы будем называть *пространством виртуальных многогранников*, *аналогичных многограннику* P. Элементы векторного пространства $\mathscr{P}^*(P)$, не являющиеся настоящими многогранниками, мы будем называть *виртуальными* многогранниками. В [13] содержится геометрическое определение виртуальных многогранников.

Теорема 2.1.1. *Функцию, сопоставляющую каждому многограннику из* $\mathscr{P}(P)$ *его объем, можно продолжить до однородного многочлена степени* d *на пространстве* $\mathscr{P}^*(P)$.

Этот многочлен мы называем *многочленом объема*. Многочлен объема обозначается через V.

Доказательство теоремы 2.1.1. Будем вести индукцию по размерности d. В случае $d = 1$ теорема очевидна. Предположим, что для всех многогранников размерности $d-1$ теорема уже доказана. Рассмотрим теперь простой многогранник P размерности d. Выберем начало координат O внутри многогранника P.

Пусть $P_1, \dots, P_n$ – гиперплоские грани многогранника P. Тогда многогранник P является объединением конусов

$$C_1 = \mathrm{conv}(\{O\} \cup P_1),\ \dots,\ C_n = \mathrm{conv}(\{O\} \cup P_n).$$

Заметим, что объемы этих конусов можно вычислить по формуле

$$\mathrm{Vol}(C_i) = \frac{1}{d}\,\mathrm{Vol}(P_i).$$

В правой части стоит $(d-1)$-мерный объем грани P_i. Теперь мы можем записать следующую формулу для объема многогранника P:

$$\mathrm{Vol}(P) = \frac{1}{d}\sum H_i\,\mathrm{Vol}(P_i). \tag{2.1.1}$$

Нетрудно проверить, что опорные числа многогранника P_i, рассматриваемого внутри своей аффинной оболочки, линейным образом выражаются через опорные числа многогранника P. Теорема 2.1.1 вытекает из сделанного замечания, формулы (2.1.1) и предположения индукции.

Обозначим гиперплоские грани многогранника P через $P_1, \dots, P_n$. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – направляющие ковекторы гиперплоских граней. Рассмотрим некоторый многогранник $P' \in \mathscr{P}(P)$, аналогичный многограннику P. Многогранник P' характеризуется *опорными числами* (или *опорными параметрами*)

$$H_i(P') = \max_{p\in P'}(\xi_i, p).$$

Линейный функционал ξ_i, ограниченный на многогранник P', достигает максимального значения $H_i(P')$ на гиперплоской грани P'_i. Грань P'_i соответствует грани P_i в силу аналогичности многогранников P' и P.

В векторном пространстве $\mathscr{P}^*(P)$ можно естественным образом ввести систему координат. Именно, функция, сопоставляющая многограннику P', аналогичному P, опорное число в направлении данного ковектора ξ_i, продолжается до линейного функционала на пространстве $\mathscr{P}^*(P)$.

Полученные таким образом линейные функционалы образуют систему координат в $\mathscr{P}^*(P)$. Координаты виртуального многогранника мы иногда будем называть его опорными числами. Нетрудно проверить, что всякий набор действительных чисел $H_1, \dots, H_n$ реализуется как набор опорных параметров некоторого (быть может, виртуального) многогранника.

Введенные выше координаты на пространстве $\mathscr{P}^*(P)$ обозначим через $x_1, \dots, x_n$. Несмотря на то, что координаты имеют смысл опорных параметров, мы во избежание путаницы изображаем разными буквами сами координаты и опорные числа конкретных многогранников (т.е. значения этих координат).

Многочлен объема на пространстве $\mathscr{P}^*(P)$ записывается в координатах как $V(x_1, \dots, x_n)$. При этом для всякого многогранника P', аналогичного многограннику P, имеет место равенство

$$V\bigl(H_1(P'), \dots, H_n(P')\bigr) = \mathrm{Vol}(P').$$

Пример (многочлен объема симплекса). Рассмотрим d-мерный симплекс S в пространстве $\mathbb{R}^d$. Ему соответствует пространство $\mathscr{P}^*(S)$ виртуальных симплексов, аналогичных S. Виртуальный симплекс S', аналогичный S, можно себе представлять как симплекс, аналогичный (т.е. гомотетичный) симплексу $-S$ и взятый со знаком минус. На пространстве $\mathscr{P}^*(S)$ есть координаты $x_1, \dots, x_{d+1}$.

Предложение 2.1.2. *Многочлен объема симплекса S равен*

$$V = (a_1 x_1 + \dots + a_{d+1} x_{d+1})^d,$$

где все коэффициенты $a_1, \dots, a_{d+1}$ положительны.

Доказательство. Сопоставим симплексу $S' \in \mathscr{P}(S)$ длину высоты этого симплекса, опущенной на гиперплоскую грань фиксированного направления из противоположной вершины. Определенная таким образом функция продолжается до линейного функционала ψ на векторном пространстве $\mathscr{P}^*(S)$.

Функционал ψ инвариантен относительно параллельных переносов симплекса. Другими словами, для всякого вектора $a \in \mathbb{R}^d$ и всякого (быть может, виртуального) симплекса $S' \in \mathscr{P}^*(S)$ справедливо равенство $\psi(S' + a) = \psi(S')$. Поскольку функционал ψ зависит от $d+1$ переменной, а группа параллельных переносов d-мерна, то ψ зависит фактически только от одного параметра. Другими словами, любые два линейных функционала на $\mathscr{P}^*(S)$, не меняющиеся при параллельных переносах, пропорциональны.

Рассмотрим отношение V_S/ψ^d. Это отношение можно рассматривать как функцию от виртуального симплекса, аналогичного S, не меняющуюся ни при параллельных переносах, ни при гомотетиях. Но всякий виртуальный симплекс, аналогичный S, получается из S именно при помощи параллельного переноса и гомотетии (быть может, с отрицательным коэффициентом). Следовательно, $V_S/\psi^d = \mathrm{const}$.

Константа больше нуля (если высота принимает положительное значение, то и объем тоже принимает положительное значение). Следовательно, умножив функционал ψ на подходящий положительный коэффициент, можно добиться, чтобы константа равнялась единице.

Нам осталось только доказать, что функционал ψ представляет собой линейную комбинацию с положительными коэффициентами опорных параметров $x_1, \dots, x_{d+1}$. Но это вытекает из того, что если все опорные параметры положительны, то и функционал ψ тоже принимает положительное значение.

2.2. Поляризация однородного многочлена. Как мы видели в предыдущем разделе, в пространстве $\mathscr{P}^*(P)$ имеется естественная система координат $x_1, \dots, x_n$. Оператор $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ дифференцирования по направлению переменной x_i мы будем обозначать для краткости через ∂_i.

Лемма 2.2.1. *Пусть V – однородный многочлен степени d относительно переменных $x_1, \dots, x_n$. Обозначим через L_a оператор дифференцирования по направлению $a = (a_1, \dots, a_n)$:*

$$L_a = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i.$$

Тогда имеет место равенство:

$$V(a) = \frac{1}{d!} L_a^d V.$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен $\varphi(t) = V(at)$. Это однородный многочлен степени d. Поэтому по формуле Маклорена

$$V(a) = \varphi(1) = \frac{1}{d!} \varphi^{(d)}(0).$$

Теперь достаточно заметить, что по правилу дифференцирования сложной функции $\varphi^{(k)}(t) = L_a^k V(at)$. В частности,

$$\varphi^{(d)}(t) \equiv \varphi^{(d)}(0) = L_a^d V,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2.2.2. *В условиях предыдущей леммы существует единственный симметрический n-линейный функционал $V(a_1, \dots, a_n)$ такой, что для всякого $a \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство*

$$V(a, \dots, a) = V(a).$$

Доказательство. Докажем единственность. Для этого достаточно убедиться в том, что если $V(a_1, \dots, a_n)$ – такой симметрический полилинейный функционал, что

$$V(a, \dots, a) = 0 \tag{2.2.1}$$

для всякого $a \in \mathbb{R}^n$, то функционал $V(a_1, \dots, a_n)$ тождественно равен нулю. Действительно, зафиксируем векторы $a_1, \dots, a_n$ и рассмотрим однородный многочлен

$$V(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \dots, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n)$$

от переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Согласно условию (2.2.1) этот многочлен тождественно равен нулю. Следовательно, все его коэффициенты равны нулю. Но, с другой стороны, нетрудно заметить, что коэффициент при мономе $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ равен в точности $V(a_1, \ldots, a_n)$. Следовательно, $V(a_1, \ldots, a_n) = 0$, что и требовалось доказать.

Осталось доказать существование. Для этого положим

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{d!} L_{a_1} \cdots L_{a_n}(V).$$

Определенная таким образом форма, очевидно, полилинейна и симметрична. Наконец, согласно лемме 2.2.1 $V(a, \ldots, a) = V(a)$.

Определение. Форма $V(a_1, \ldots, a_n)$ называется *поляризацией* однородного многочлена V.

2.3. Дифференциальный оператор, связанный с многогранником. С каждым простым многогранником P связан дифференциальный оператор, коэффициенты которого – опорные числа многогранника P:

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} H_i \partial_i.$$

Дадим теперь инвариантное определение. Рассмотрим многогранник P как вектор в пространстве $\mathscr{P}^*(P)$. Оператор L_P есть не что иное, как оператор дифференцирования по соответствующему направлению.

Теперь мы можем применить результаты предыдущего раздела к многочлену объема:

Следствие 2.3.1. *Объем многогранника Q, аналогичного многограннику P, выражается следующей формулой*:

$$\mathrm{Vol}(Q) = \frac{1}{d!} L_Q^d V_P.$$

Определение. Поляризация многочлена объема на пространстве $\mathscr{P}^*(P)$ называется *формой смешанного объема.* Смешанный объем многогранников $P_1, \ldots, P_d$ обозначается через $\mathrm{Vol}(P_1, \ldots, P_d)$. Непосредственно из определения поляризации вытекают следующие свойства смешанного объема:

- смешанный объем является симметрической полилинейной функцией своих аргументов;
- форма смешанного объема в ограничении на диагональ дает обычный многочлен объема:
$$\mathrm{Vol}(P, \ldots, P) = \mathrm{Vol}(P).$$

Следствие 2.3.2. *Смешанный объем многогранников $P_1, \ldots, P_d$, аналогичных многограннику P, выражается следующей формулой*:

$$\mathrm{Vol}(P_1, \ldots, P_d) = \frac{1}{d!} L_{P_1} \cdots L_{P_d} V_P.$$

2.4. Многочлен объема грани. Сформулируем один элементарный факт из комбинаторики простых выпуклых многогранников:

Лемма 2.4.1. *Пусть $P_{i_1},\dots,P_{i_k}$ – различные гиперплоские грани простого многогранника P. Тогда если*

$$(*)\qquad F = P_{i_1}\cap\dots\cap P_{i_k}\neq\varnothing,$$

то F является гранью многогранника P коразмерности k (если бы многогранник P не был простым, грань F могла бы иметь меньшую коразмерность). Обратно, всякая грань многогранника P коразмерности k может быть представлена в виде $(*)$.

Пусть F – грань многогранника P коразмерности k. Рассмотрим многогранник P', аналогичный многограннику P. Обозначим через F' грань многогранника P', соответствующую грани F. Тогда мы можем загнать параллельным переносом грань F' в плоскость грани F. Тем самым мы получаем отображение $\mathscr{P}(P)\to\mathscr{P}(F)$, которое продолжается до эпиморфизма $Y_F\colon \mathscr{P}^*(P)\to\mathscr{P}^*(F)$. Многочлен объема V_F, определенный на пространстве $\mathscr{P}^*(F)$, мы можем перенести при помощи описанного эпиморфизма на пространство $\mathscr{P}^*(P)$. Полученный многочлен обозначим через $\widetilde{V}_F$.

Пусть $H_1,\dots,H_n$ – опорные числа многогранника P. Объем гиперплоской грани P_i выражается тогда следующей очевидной формулой:

$$\mathrm{Vol}(P_i)=\frac{\partial V_P}{\partial x_i}(H_1,\dots,H_n).$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$\widetilde{V}_{P_i}=\partial_i V.$$

Предложение 2.4.2. *Объем простого выпуклого многогранника P равен*

$$\mathrm{Vol}(P)=\frac{1}{d}L_P V_P(H_1,\dots,H_n)=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n}H_i\,\mathrm{Vol}(P_i).$$

Это предложение непосредственно вытекает из теоремы Эйлера об однородных функциях.

Теорема 2.4.3. *Пусть $P_{i_1},\dots,P_{i_k}$ – различные гиперплоские грани простого многогранника P. Тогда*

- *если $P_{i_1}\cap\dots\cap P_{i_k}=\varnothing$, то $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}V=0$,*
- *если $F=P_{i_1}\cap\dots\cap P_{i_k}$ – грань многогранника P коразмерности k, то $\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}V=C\widetilde{V}_F$, где C – положительный коэффициент, не зависящий от переменных x_i.*

Доказательство. Будем вести индукцию по k. При $k = 1$ теорема уже доказана. Предположим, что теорема доказана для некоторого k. Рассмотрим $k+1$ гиперплоскую грань $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}, P_{i_{k+1}}$. Если $P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_k} = \varnothing$, то и подавно $P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_k} \cap P_{i_{k+1}} = \varnothing$. Далее, согласно предположению индукции, $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} V = 0$. Но тогда и подавно $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} \partial_{i_{k+1}} V = 0$. Таким образом, можно ограничиться случаем $P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_k} = F \neq \varnothing$. Предположим сначала, что $P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_k} \cap P_{i_{k+1}} = \varnothing$. Это означает, что гиперплоская грань $P_{i_{k+1}}$ не имеет общих точек с гранью F. Следовательно, при малом смещении гиперплоской грани $P_{i_{k+1}}$ объем F не меняется. Таким образом, $\partial_{i_{k+1}} V_F = 0$. Отсюда и из предположения индукции вытекает, что $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} \partial_{i_{k+1}} V = 0$.

Теперь предположим, что $P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_k} \cap P_{i_{k+1}} = F_{i_{k+1}} \neq \varnothing$. При движении гиперплоской грани $P_{i_{k+1}}$ в положительном направлении гиперплоская грань $F_{i_{k+1}}$ многогранника F движется в плоскости многогранника F тоже в положительном направлении (но, быть может, с другой скоростью). Остальные гиперплоские грани многогранника F остаются на месте. Таким образом, производная $\partial_{i_{k+1}} \widetilde{V}_F$ пропорциональна с положительным коэффициентом многочлену $\widetilde{V}_{F_{i_{k+1}}}$. Для завершения доказательства теоремы осталось только воспользоваться предположением индукции.

2.5. Построение алгебры по многочлену. Пусть V – произвольный однородный многочлен степени d на конечномерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Diff алгебру дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на пространстве $\mathbb{R}^n$. Эта алгебра имеет естественную градуировку:

$$\mathrm{Diff} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Diff}_k\,.$$

Однородная компонента Diff_k состоит из дифференциальных операторов степени k. Определим идеал

$$I(V) = \mathrm{Ann}(V) = \{\alpha \in \mathrm{Diff} \mid \alpha V = 0\}.$$

Определение. *Алгеброй, построенной по многочлену V*, называется факторалгебра

$$A(V) = \mathrm{Diff}\,/I(V).$$

Эта алгебра заимствует градуировку из алгебры дифференциальных операторов:

$$A(V) = \bigoplus_{k=0}^{d} A_k(V).$$

Пусть $\alpha \in \mathrm{Diff}$ – дифференциальный оператор. Обозначим через $[\alpha]$ класс оператора α в факторалгебре $A(V)$.

Предложение 2.5.1. *Формула $([\alpha],[\beta]) = \alpha\beta V$ определяет невырожденное спаривание*

$$A_k(V) \otimes A_{d-k}(V) \to \mathbb{R}.$$

Доказательство. Корректность определения очевидна. Докажем невырожденность: для каждого ненулевого $\beta \in A_{d-k}$ найдется элемент $\alpha \in A_k$ такой, что $(\alpha, \beta) \neq 0$. Заметим, что βV представляет собой ненулевой однородный многочлен степени k. Поэтому найдется оператор α степени k, не обращающий в нуль многочлен βV, что и требовалось доказать.

Следствие 2.5.2. *Имеет место следующее соотношение двойственности*: $\dim A_k(V) = \dim A_{d-k}(V)$.

При некоторых условиях мы будем отождествлять алгебры, построенные по разным многочленам на разных пространствах. Ниже подробно описываются эти условия. Пусть на пространстве $\mathbb{R}^s$ задан однородный многочлен V. Рассмотрим произвольный линейный эпиморфизм $Y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$. При помощи этого линейного отображения мы можем определить на пространстве $\mathbb{R}^n$ многочлен $\widetilde{V} = Y^*V$. Другими словами, $\widetilde{V}(x) = V(Y(x))$.

Предложение 2.5.3. *Рассмотрим элемент $\alpha \in A(V)$. Существует единственный элемент $\beta \in A(\widetilde{V})$ такой, что*

$$\beta\widetilde{V} = Y^*(\alpha V).$$

Отображение $\alpha \mapsto \beta$ устанавливает изоморфизм между алгебрами $A(V)$ и $A(\widetilde{V})$. Элемент $L_{Y(a)} \in A(V)$ переходит при описанном изоморфизме в элемент $L_a \in A(\widetilde{V})$.

Доказательство. Это утверждение почти очевидно. Грубо говоря, оно означает, что алгебра $A(V)$ не меняется при дописывании несущественных переменных к многочлену V. Приведем все же аккуратное доказательство.

Выберем согласованные системы координат в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^s$. Пусть $y = Y(x)$, x_i – координаты вектора $x \in \mathbb{R}^n$, y_i – координаты вектора $y \in \mathbb{R}^s$. Условие согласованности координат означает, что $y_i = x_i$, $i = 1, \ldots, s$. Другими словами, отображение Y можно рассматривать как стандартную проекцию координатного пространства на координатное подпространство. Многочлен $\widetilde{V}$ получается из многочлена V "дописыванием фиктивных переменных". Теперь предложение становится очевидным: оператор β получается из оператора α заменой $\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ на $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ для всех $i = 1, \ldots, s$.

Алгебры $A(V)$ и $A(\widetilde{V})$ можно отождествить при помощи описанного изоморфизма.

2.6. Алгебра многогранника. Пусть P – простой многогранник, $A = A(V_P)$ – алгебра, построенная по многочлену объема этого многогранника. Алгебру A мы назовем *алгеброй многогранника* P. Если многогранник P целочисленно простой, то, как нетрудно проверить, алгебра A изоморфна алгебре когомологий торического многообразия $X(P)$.

Теорема 2.6.1. *Размерности однородных компонент алгебры простого выпуклого многогранника равны* $\dim A_k = h_k$.

Эту теорему мы докажем позже.

Алгебра многогранника P получается из алгебры дифференциальных операторов на пространстве $\mathscr{P}^*(P)$ факторизацией по идеалу $I = I(V_P)$. Назовем идеал I *идеалом простого многогранника* P.

Можно выписать явно систему мультипликативных образующих идеала многогранника.

Пусть a – некоторый вектор (точка) в пространстве $\mathbb{R}^d$. Тогда элемент $(P+a)-P$ в группе $\mathscr{P}^*(P)$ можно отождествить с точкой a. Прибавление точки к многограннику приводит просто к параллельному переносу многогранника. В частности, объем многогранника при этом не изменяется. Следовательно, производная по направлению точки (рассматриваемой как элемент в $\mathscr{P}^*(P)$) от многочлена объема равна нулю. Этот факт можно выразить в координатах следующим образом. Пусть H_i – система опорных чисел точки a (относительно направляющих ковекторов многогранника P), т.е. $H_i = (a, \xi_i)$. Тогда оператор

$$L = \sum_{i=1}^{n} H_i \partial_i$$

представляет собой производную по направлению точки в $\mathscr{P}^*(P)$. Следовательно, $LV = 0$, т.е. $L \in I$.

Определение. Соотношения вида $LV_P = 0$ назовем соотношениями *трансляционной инвариантности.* Эти соотношения говорят о том, что многочлен объема не меняется при сдвигах многогранника.

Далее, согласно теореме 2.2 идеал I содержит также следующие операторы:

$$L = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_r},$$

где $P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_r} = \varnothing$.

Определение. Соотношения вида $LV_P = 0$ назовем *соотношениями инцидентности.*

Теорема 2.6.2. *Идеал простого выпуклого многогранника мультипликативно порождается соотношениями инцидентности и трансляционной инвариантности.*

Доказательство теорем 2.6.1 и 2.6.2 основано на “теории Морса для многогранников”.

Заметим, что каждая грань F многогранника P может быть записана в виде $F = P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_k}$, где $P_{i_1}, \cdots, P_{i_k}$ – гиперплоские грани. Поставим в соответствие грани F дифференциальный моном

$$\partial_F = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k}.$$

Лемма 2.6.3. *Всякий дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами выражается по модулю идеала I через дифференциальные мономы, соответствующие граням многогранника P. Более того, всякий оператор с постоянными коэффициентами можно свести к линейной комбинации дифференциальных мономов вида ∂_F только при помощи соотношений инцидентности и трансляционной инвариантности.*

Доказательство. Достаточно проверить это утверждение только для дифференциального монома. Пусть моном не содержит кратных дифференцирований по одной и той же переменной. Тогда он либо равен нулю в алгебре A в силу соотношений инцидентности, либо соответствует некоторой грани многогранника P. Допустим, что моном содержит кратные дифференцирования:

$$\alpha = \partial_{i_1}^{k_1} \cdots \partial_{i_s}^{k_s}, \qquad k_1, \ldots, k_s > 0.$$

Назовем *кратностью* монома α число $(k_1-1)+\cdots+(k_s-1)$. Если кратность монома больше нуля (т.е. моном содержит кратные дифференцирования), то его можно свести к линейной комбинации мономов меньшей кратности при помощи только соотношений трансляционной инвариантности.

В самом деле, пусть, например, $k_1 > 1$. Если $\alpha \neq 0$ в алгебре A, то $P_{i_2} \cap \cdots \cap P_{i_s}$ – грань положительной размерности. Следовательно, найдутся две различные вершины $O, X \in P_{i_2} \cap \cdots \cap P_{i_s}$ такие, что $(\xi_{i_1}, \overrightarrow{OX}) \neq 0$.

Примем точку O за начало координат. Пусть $H_i = (\xi_i, \overrightarrow{OX})$ – опорные числа точки X. Заметим, что поскольку отрезок OX принадлежит гиперплоским граням $P_{i_2}, \ldots, P_{i_s}$, то $H_{i_2} = \cdots = H_{i_s} = 0$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $L = \sum_{i=1}^n H_i \partial_i$, соответствующий точке X. Из соотношения

$$L \equiv 0 \pmod I$$

можно выразить оператор ∂_{i_1}:

$$\partial_{i_1} \equiv \frac{1}{H_{i_1}} \sum_{i \neq i_1} (-H_i)\partial_i = L_i \pmod{I(P)}.$$

Заметим, что операторы $\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}$ входят в правую часть с нулевыми коэффициентами. Следовательно, оператор

$$L_i \partial_{i_1}^{k_1-1} \partial_{i_2}^{k_2} \cdots \partial_{i_s}^{k_s}$$

равен оператору α по модулю идеала I, но вместе с тем представляется линейной комбинацией операторов меньшей кратности. Таким образом, любой оператор совпадает по модулю идеала I с некоторой линейной комбинацией дифференциальных мономов, соответствующих граням многогранника P. Это совпадение можно обнаружить только при помощи соотношений инцидентности и трансляционной инвариантности.

Определение. Зафиксируем некоторую общую линейную функцию l на многограннике P. Грань многогранника P размерности k называется *сепаратрисной*, если максимум функции l в ограничении на эту грань достигается в вершине индекса k. Другими словами, сепаратрисная грань – это грань, “натянутая” на все ребра, идущие вниз из вершины индекса k. Дифференциальный моном, соответствующий сепаратрисной грани, назовем *сепаратрисным мономом.*

Лемма 2.6.4. *Компонента A_k порождается сепаратрисными мономами. Более того, всякий дифференциальный оператор из* Diff *можно свести к линейной комбинации сепаратрисных мономов только при помощи соотношений инцидентности и трансляционной инвариантности.*

Доказательство. Определим отношение порядка на гранях многогранника P. Скажем, что *одна грань меньше другой*, если максимальное значение функции l на первой грани меньше максимального значения функции l на второй грани.

Докажем, что если грань F не является сепаратрисной, то соответствующий оператор ∂_F может быть выражен через мономы, соответствующие меньшим граням, при помощи соотношений трансляционной инвариантности.

Обозначим через O максимальную вершину грани F. Пусть $P_{i_1}, \dots, P_{i_d}$ – гиперплоские грани, содержащие точку O, G – нижняя сепаратриса, выходящая из вершины O. Тогда F является гранью G. Среди гиперплоских граней $P_{i_1}, \dots, P_{i_d}$ обязательно найдется хотя бы одна грань, содержащая F, но не содержащая G. Можно предполагать без ограничения общности, что эта грань – P_{i_1}. В этом случае

$$\partial_F = \partial_G \partial \partial_{i_1},$$

где ∂ – некоторый дифференциальный моном.

Рассмотрим ребро $OX = P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_d}$. Примем точку O за начало координат. Пусть $H_i = (\xi_i, \overrightarrow{OX})$ – опорные числа точки X. Заметим, что поскольку отрезок OX принадлежит гиперплоским граням $P_{i_2}, \dots, P_{i_d}$, то $H_{i_2} = \dots = H_{i_d} = 0$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $L = \sum_{i=1}^n H_i \partial_i$, соответствующий точке X. Из соотношения

$$L = 0 \pmod{I}$$

можно выразить оператор ∂_{i_1}:

$$\partial_{i_1} \equiv \frac{1}{H_{i_1}} \sum_{i \neq i_1} (-H_i) \partial_i = L_i \pmod{I}.$$

Заметим, что операторы $\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_d}$ входят в правую часть с нулевыми коэффициентами. Оператор

$$\partial_G \partial L_i$$

равен ∂_F по модулю идеала I. С другой стороны, в его разложении присутствуют дифференциальные мономы, соответствующие только тем граням G, которые не содержат вершины O. Но все такие грани меньше F. Таким образом, мы выразили оператор ∂_F через меньшие грани по модулю идеала I.

Лемма 2.6.5. *Сепаратрисные мономы линейно независимы в алгебре многогранника.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию (с ненулевыми коэффициентами) сепаратрисных мономов:

$$\alpha = \lambda_1 \partial_{F_1} + \dots + \lambda_s \partial_{F_s}.$$

Можно считать, что все мономы имеют одну и ту же степень. Таким образом, сепаратрисы $F_1, \dots, F_s$ имеют одинаковую размерность. Предположим, что $\alpha = 0$ в алгебре многогранника. Рассмотрим максимальную сепаратрису, фигурирующую в линейной комбинации α. Можно считать, что это F_1. Пусть G_1 – “верхняя сепаратриса”, соответствующая F_1. Грань G_1 натянута на все ребра, идущие вверх из максимальной вершины грани F_1.

Умножим линейную комбинацию α на дифференциальный моном ∂_{G_1}. Согласно теореме 2.4.3 все произведения вида $\partial_{G_1}\partial_{F_2}, \dots, \partial_{G_1}\partial_{F_s}$ равны нулю в алгебре многогранника. Дело в том, что в линейной комбинации α все мономы, кроме первого, соответствуют граням многогранника P, лежащим целиком ниже грани G_1. Таким образом, $G_1 \cap F_2 = \dots = G_1 \cap F_s = \varnothing$. Напротив, произведение $\partial_{G_1}\partial_{F_1}$ отлично от нуля. Следовательно, из соотношения $\partial_{G_1}\alpha = 0$ получаем $\lambda_1 = 0$. Противоречие с тем, что все коэффициенты ненулевые.

Заметим теперь, что из доказанных лемм вытекают теоремы 2.6.1 и 2.6.2. Согласно леммам 2.6.4 и 2.6.5 базис в векторном пространстве A_k составляют сепаратрисные мономы. Но сепаратрисных мономов размерности k столько же, сколько вершин индекса k, т.е. h_k. Отсюда вытекает теорема 2.6.1. С другой стороны, соотношений инцидентности и трансляционной инвариантности оказывается достаточно для сведения любого оператора к линейной комбинации сепаратрисных мономов. Следовательно, все соотношения в алгебре A исчерпываются соотношениями инцидентности, трансляционной инвариантности и следствиями из них. Но соотношения в алгебре A – это элементы идеала I. Таким образом, идеал I порождается соотношениями инцидентности и трансляционной инвариантности. Именно это утверждает теорема 2.6.2.

§ 3. Элементарные перестройки

В настоящем параграфе приведены вспомогательные сведения, необходимые для понимания дальнейшего. Все указанные здесь результаты изложены в [7]. Речь идет об элементарных перестройках простых многогранников. Если начать двигать гиперплоские грани простого многогранника общим образом, то в некоторый момент произойдет перестройка комбинаторного типа многогранника. Это – элементарная перестройка. Всего бывает $d+2$ типа элементарных перестроек (если считать перестройки, в ходе которых появляется или исчезает симплекс). Всякий простой многогранник может быть получен из симплекса непрерывной деформацией, допускающей лишь конечное число элементарных перестроек.

3.1. Элементарные перестройки (flips). Пусть P – простой многогранник в $\mathbb{R}^d$. Тогда существует такой простой многогранник Δ в $\mathbb{R}^{d+1}$ и общая линейная функция l, что некоторое сечение многогранника Δ горизонтальной гиперплоскостью $l = \mathrm{const}$ совпадает с P. Начнем поднимать эту гиперплоскость. Пока она не пересекает вершин многогранника Δ, мы получаем в сечении аналогичные многогранники. Пусть в некоторый момент гиперплоскость прошла через вершину (можно считать без ограничения общности, что никакие две вершины не лежат на одной и той же горизонтальной гиперплоскости, иначе достаточно слегка пошевелить линейную функцию l). Тогда мы говорим, что многогранник P подвергся *элементарной перестройке порядка* m, если пройденная вершина имела индекс m. Таким образом, d-мерные многогранники допускают $d+2$ типа элементарных перестроек.

Пример 1 (перестройки простейших типов). Перестройка порядка 0 – это просто рождение симплекса, перестройка порядка $d+1$ – это уничтожение симплекса. Перестройка порядка 1 – это возникновение новой гиперплоской грани. При перестройке этого типа "отрезается вершина", т.е. на месте вершины появляется гиперплоская симплициальная грань. Перестройка порядка d – это стягивание симплициальной гиперплоской грани в точку.

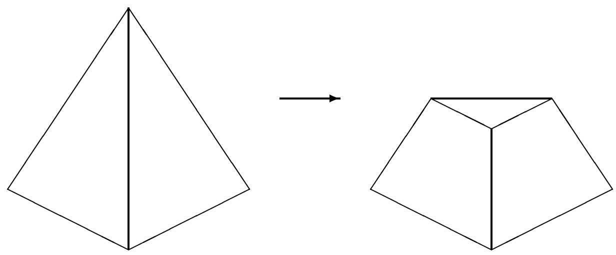

Рис. 1. Перестройка порядка 1 трехмерного многогранника

На рис. 1 изображена перестройка порядка 1 трехмерного многогранника.

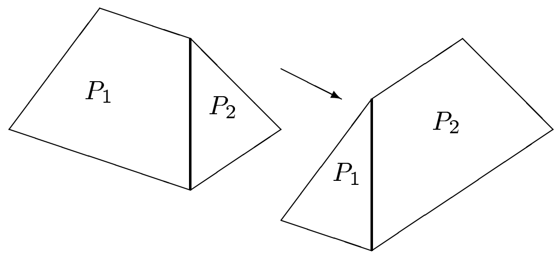

Рис. 2. Перестройка порядка 2 трехмерного многогранника

Пример 2 (перестройки трехмерных многогранников). Трехмерные многогранники, кроме уже описанных перестроек порядков 0, 1, 3, 4, допускают единственную нетривиальную перестройку порядка 2. Эта перестройка изображена на рис. 2.

Те грани (передняя и задняя), которые до перестройки пересекались, после перестройки уже не пересекаются. Наоборот, боковые грани до перестройки не пересекались, а при перестройке пересеклись. Заметим, что описанная перестройка сохраняет количество граней в каждой размерности, а значит, сохраняет и h-вектор.

Теорема 3.1.1. *Всякий простой многогранник можно получить из симплекса такой непрерывной деформацией, в течение которой происходит лишь конечное число элементарных перестроек. Более точно: существует такая непрерывная деформация, переводящая данный простой многогранник в симплекс, в течении которой:*

- *сначала многогранник слегка шевелится, не меняя комбинаторного типа,*
- *потом все гиперплоские грани движутся параллельно, а все изменения комбинаторного типа (и даже класса аналогичных многогранников) происходят за счет элементарных перестроек.*

Доказательство. Действительно, пусть P – произвольный простой d-мерный многогранник. Поместим этот многогранник в пространство $\mathbb{R}^{d+1}$ на единицу большей размерности.

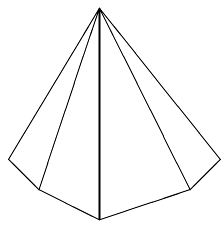

Рис. 3. Разрешение простого многогранника

Можно представлять себе многогранник P лежащим в горизонтальной гиперплоскости. Возьмем точку вне этой плоскости и построим конус над многогранником P с вершиной в этой точке (см. рис. 3). Теперь пошевелим гиперплоские грани построенного конуса. Получится простой многогранник, нижняя гиперплоская грань которого получается малым шевелением P и, в частности, комбинаторно эквивалентна P.

3.2. Комбинаторное описание перестройки. Дадим непосредственное комбинаторное описание элементарной перестройки. Пусть многогранник P получается из многогранника Q путем элементарной перестройки порядка $0 < m < d+1$. Тогда мы можем рассмотреть простой многогранник $\Delta \in \mathbb{R}^{d+1}$ и общую линейную функцию l такие, что:

- нижняя грань многогранника Δ совпадает с многогранником P (точнее, существует такое вложение плоскости многогранника P в $\mathbb{R}^{d+1}$, что образ многогранника P при этом вложении совпадает с нижней гранью многогранника Δ относительно функции l);
- верхняя грань многогранника Δ совпадает с многогранником Q;
- многогранник Δ содержит ровно одну вершину, не лежащую ни на P, ни на Q (эта вершина имеет индекс m; обозначим эту вершину через O).

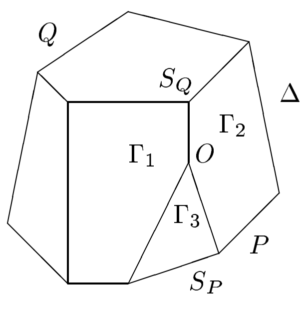

Рис. 4. Элементарная перестройка двумерного многогранника порядка $m = 2$

Описанная конструкция изображена на рис. 4. Поскольку многогранник Δ простой, в вершине O сходится ровно $d+1$ гиперплоская грань. Обозначим эти гиперплоские грани через $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{d+1}$. Предположим, что нумерация устроена таким образом, что грани $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ содержат *"верхнюю сепаратрису"* (т.е. содержат все ребра, идущие из вершины O вверх), а грани $\Gamma_{m+1}, \ldots, \Gamma_{d+1}$ содержат *"нижнюю сепаратрису"* (т.е. содержат все ребра, идущие из O вниз). Дело в том, что каждая грань $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{d+1}$ содержит либо верхнюю, либо нижнюю сепаратрису. Это вытекает из того, что каждая из перечисленных граней содержит все ребра, выходящие из O, кроме одного.

Введем следующие обозначения:

$$S_P = P \cap \Gamma_{m+1} \cap \cdots \cap \Gamma_{d+1},$$
$$S_Q = Q \cap \Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_m.$$

Грань S_P многогранника P представляет собой $(m-1)$-мерный симплекс. Гиперплоскими гранями этого симплекса являются грани $S_P \cap \Gamma_1, \ldots, S_P \cap \Gamma_m$. Аналогично, грань S_Q многогранника Q представляет собой $(d-m)$-мерный симплекс, грани которого – $S_Q \cap \Gamma_{m+1}, \ldots, S_Q \cap \Gamma_{d+1}$. В ходе элементарной перестройки рассматриваемого типа симплекс S_P уничтожается, а "на его месте" рождается симплекс S_Q.

Отметим следующий очевидный факт:

Предложение 3.2.1. *Пусть многогранник Q получается из многогранника P путем элементарной перестройки порядка m. Тогда многогранник P может быть получен из многогранника Q элементарной перестройкой порядка $d+1-m$.*

Заметим, что элементарные перестройки всех порядков, кроме 0, 1, d, $d+1$, не уничтожают и не добавляют гиперплоских граней.

3.3. Преобразование h-вектора при элементарной перестройке.

Теорема 3.3.1. *Предположим, что многогранник Q получен из многогранника P элементарной перестройкой порядка $m \leqslant \frac{d+1}{2}$. Тогда*

$$h_k(Q) = \begin{cases} h_k(P), & \textit{если } k < m, \\ h_k(P) + 1, & \textit{если } m \leqslant k \leqslant d-m, \\ h_k(P), & \textit{если } k > d-m. \end{cases}$$

Доказательство. Посмотрим сначала, что происходит с f-вектором при элементарной перестройке рассматриваемого типа. Как мы заметили выше, в ходе перестройки исчезает симплекс S_P и появляется симплекс S_Q. Следовательно, если мы пересчитаем все грани до и после перестройки, то после перестройки мы не досчитаемся граней многогранника S_P, но зато посчитаем грани только что появившегося многогранника S_Q. Следовательно, F-полиномы многогранников P и Q связаны следующим соотношением:

$$F_Q = F_P - F_{S_P} + F_{S_Q}.$$

Но тогда точно таким же соотношением связаны и H-полиномы, т.е.

$$H_Q = H_P - H_{S_P} + H_{S_Q}.$$

В разделе 1.1 мы установили, что H-полином k-мерного симплекса имеет вид

$$t^k + t^{k-1} + \cdots + 1 = \frac{t^{k+1} - 1}{t - 1}.$$

Следовательно,
$$H_Q(t) = H_P(t) + t^m + \cdots + t^{d-m}.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Элементарные перестройки высоких порядков $m > \frac{d+1}{2}$ являются обратными к перестройкам низких порядков $m \leqslant \frac{d+1}{2}$. Поэтому для случая $m > \frac{d+1}{2}$ имеет место следующая формула:

$$h_k(Q) = \begin{cases} h_k(P), & \text{если } k < d-m+1, \\ h_k(P)-1, & \text{если } d-m+1 \leqslant k \leqslant m-1, \\ h_k(P), & \text{если } k > m-1. \end{cases}$$

3.4. Действие элементарной перестройки на гранях. Мы пользуемся обозначениями раздела 3.2. Опишем действие элементарной перестройки на гиперплоских гранях.

Теорема 3.4.1. *Пусть многогранник P подвергается элементарной перестройке порядка m. Тогда*

- *грани $P\cap\Gamma_1, \ldots, P\cap\Gamma_m$ подвергаются элементарной перестройке порядка $m-1$,*
- *грани $P\cap\Gamma_{m+1}, \ldots, P\cap\Gamma_{d+1}$ подвергаются элементарной перестройке порядка m,*
- *остальные гиперплоские грани остаются аналогичными себе.*

Доказательство. Дело в том, что относительно граней $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ вершина O имеет индекс $m-1$. В самом деле, эти грани не содержат нижней сепаратрисы. Следовательно, каждая такая грань содержит все ребра, идущие вниз, кроме одного. Далее, грани $\Gamma_{m+1}, \ldots, \Gamma_{d+1}$ содержат нижнюю сепаратрису. Следовательно, относительно этих граней вершина O имеет индекс m. Все остальные грани многогранника Δ не содержат вершину O. С их гиперплоскими сечениями ничего не происходит при прохождении этой вершины.

3.5. Переходные многогранники (transition polytopes). Пусть простой многогранник Q получается из простого многогранника P при помощи элементарной перестройки порядка $0 < m < d+1$. Тогда можно считать, что P и Q являются горизонтальными сечениями некоторого $(d+1)$-мерного многогранника Δ, причем между ними находится ровно одна вершина многогранника Δ, и эта вершина имеет индекс m. Рассмотрим сечение T многогранника Δ горизонтальной гиперплоскостью, проходящей через эту вершину. Многогранник T называется *переходным многогранником*. При $1 < m < d$ этот многогранник уже не является простым: в одной вершине сходятся $d+1$ гиперплоская грань. Исключения составляют перестройки порядков $m = 1$ и $m = d$. В этих случаях переходный многогранник оказывается простым.

Сама элементарная перестройка порядка $1 < m < d$ происходит следующим образом. Сначала многогранник P изменяется, не выходя из своего класса аналогичных многогранников, потом в некоторый момент он вырождается, становясь переходным многогранником T, после чего из T уже в следующий момент получается многогранник, аналогичный многограннику Q. В случае $m = 1$ в переходный момент не происходит никакого вырождения, а уже в следующий момент разваливается некоторая вершина. На месте этой вершины возникает $(d-1)$-мерный симплекс. В случае $m = d$ происходит то же самое, но в обратном порядке. Некоторый $(d-1)$-мерный симплекс в переходный момент схлопывается в вершину.

Оказывается, что переходный многогранник T хранит информацию о том, в ходе какой именно элементарной перестройки он был получен (конечно, с точностью до перехода к противоположной перестройке – в течение перестроек порядков m и $d+1-m$ можно получить один и тот же переходный многогранник). Эта информация содержится в комбинаторике расположения гиперплоских граней, сходящихся в особой вершине.

Предложение 3.5.1. *Предположим, что переходный многогранник T получен в ходе элементарной перестройки порядка $m \leqslant \frac{d+1}{2}$. Тогда число m можно восстановить по самому многограннику T (точнее, исходя из взаимного расположения гиперплоских граней, сходящихся в особой вершине).*

Доказательство. Если многогранник T оказался простым, то $m = 1$. Теперь предположим, что в многограннике T имеется особая вершина, в которой сходится $d+1$ гиперплоская грань. Тогда в окрестности особой вершины многогранник T выглядит как конус над некоторым простым многогранником U размерности $d-1$. Заметим, что многогранник U имеет ровно $d+1$ гиперплоскую грань. Согласно предложению 1.1.1 многогранник U комбинаторно эквивалентен произведению двух симплексов $S_{m-1} \times S_{d-m}$. Поскольку различные произведения симплексов не являются комбинаторно эквивалентными (см. конец раздела 1.1), отсюда однозначно определяется число m.

Заметим, что каждой гиперплоской грани многогранника U соответствует гиперплоская грань переходного многогранника. Но гиперплоские грани U делятся на две категории: первой категории принадлежат грани вида

$$S_{m-1} \times (\text{гиперплоская грань } S_{d-m}),$$

а второй категории принадлежат грани вида

$$(\text{гиперплоская грань } S_{m-1}) \times S_{d-m}.$$

В случае, когда $m < \frac{d+1}{2}$, грани разных категорий имеют разные комбинаторные типы, и поэтому категории выделяются по внутренним признакам.

В случае $m = \frac{d+1}{2}$ гиперплоские грани тоже можно разбить на две категории, только эти категории окажутся совершенно равноправными. Итак, мы рассматриваем многогранник

$$U = S_{m-1} \times S_{m-1}.$$

Определим отношение эквивалентности на $(m-1)$-мерных симплициальных гранях многогранника U. Две грани называются эквивалентными, если они не пересекаются. Нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности, и оно индуцирует разбиение множества $(m-1)$-мерных симплициальных граней на два класса эквивалентности, состоящих из одного и того же числа элементов. Элементы различных классов эквивалентности обязательно пересекаются по точке и дают в прямом произведении весь многогранник U. Теперь разбиение гиперплоских граней U на две категории можно организовать следующим образом:

- к первой категории отнесем грани вида (элемент первого класса эквивалентности) $\times$ (гиперплоская грань элемента второго класса эквивалентности),
- ко второй категории отнесем грани вида (гиперплоская грань элемента первого класса эквивалентности) $\times$ (элемент второго класса эквивалентности).

Пусть $T_1, \dots, T_m$ – грани переходного многогранника, соответствующие граням U первой категории, а грани $T_{m+1}, \dots, T_{d+1}$ соответствуют граням второй категории. Для того чтобы по переходному многограннику T построить "многогранник до перестройки", нужно немного опустить (т.е. сдвинуть внутрь многогранника) грани $T_{m+1}, \dots, T_{d+1}$. На самом деле достаточно слегка сдвинуть только одну из этих граней.

Полученный простой многогранник назовем *регуляризацией* многогранника T и обозначим через $\operatorname{reg} T$. Заметим, что в случае $m < \frac{d+1}{2}$ любые две регуляризации одного и того же переходного многогранника аналогичны. Однако в исключительном случае $m = \frac{d+1}{2}$ это не так. Дело в том, что в этом случае

$$m - 1 = d - m = \frac{d-1}{2}$$

и непонятно, какую из двух категорий гиперплоских граней считать первой, а какую – второй. В рассматриваемом случае переходный многогранник обладает двумя неаналогичными регуляризациями. Элементарная перестройка типа $m = \frac{d+1}{2}$ замечательна еще в одном отношении: она совсем не меняет h-вектора (но, вообще говоря, меняет комбинаторный тип многогранника).

§ 4. Перестройки и многочлен объема

В настоящем параграфе описаны изменения многочлена объема и алгебры многогранника при элементарной перестройке. Элементарная перестройка порядка m прибавляет к многочлену объема степень аффинного функционала со знаком, зависящим от m. Явно описано изменение идеала, аннулирующего многочлен объема, при элементарной перестройке. Результаты, доказанные в этом параграфе, используются при доказательстве аналога соотношений Ходжа–Римана, но могут представлять и самостоятельный интерес.

4.1. Изменение многочлена объема. Пусть простой многогранник Q получается из простого многогранника P при помощи элементарной перестройки порядка m. Сохраняем обозначения раздела 3.2. Грани $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{d+1}$ многогранника Δ высекают в плоскости многогранника P некоторый симплекс S. Этот симплекс изображен на рис. 5 внутри аффинной оболочки многогранника P.

Лемма 4.1.1. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_{d+1}$ – направляющие ковекторы гиперплоских граней $P \cap \Gamma_1, \dots, P \cap \Gamma_{d+1}$ многогранника P. Тогда направляющие ковекторы гиперплоских граней симплекса S таковы*:

$$\xi'_1 = \xi_1, \ \dots, \ \xi'_m = \xi_m, \ \xi'_{m+1} = -\xi_{m+1}, \ \dots, \ \xi'_{d+1} = -\xi_{d+1}.$$

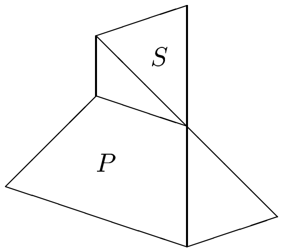

Рис. 5. Многогранник P и симплекс S

Соответственно опорные числа $H'_1, \dots, H'_{d+1}$ симплекса S связаны с опорными числами многогранника P следующим образом:

$$H'_1 = H_1, \ \dots, \ H'_m = H_m, \ H'_{m+1} = -H_{m+1}, \ \dots, \ H'_{d+1} = -H_{d+1}.$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями раздела 3.2. Пусть $e_1, \dots, e_m$ – направляющие векторы ребер многогранника Δ, идущих из вершины O вниз, а $e_{m+1}, \dots, e_{d+1}$ – направляющие векторы ребер, идущих из вершины O вверх. Тогда, выбирая подходящим образом длины векторов $e_1, \dots, e_{d+1}$ (т.е. умножая эти векторы на некоторые подходящие ненулевые коэффициенты), можно добиться того, чтобы точки

$$O + e_1, \ \dots, \ O + e_m, \ O - e_{m+1}, \ \dots, \ O - e_{d+1}$$

являлись вершинами симплекса S (и, тем самым, лежали бы в плоскости многогранника P). Введем в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ такую евклидову метрику, что $(e_1, \dots, e_{d+1})$ – ориентированный базис в смысле этой метрики. Тогда симплекс S состоит из таких векторов v, которые лежат в гиперплоскости многогранника P и удовлетворяют следующим неравенствам:

$$(v, e_1) \geqslant 0, \ \dots, \ (v, e_m) \geqslant 0, \ (v, e_{m+1}) \leqslant 0, \ \dots, \ (v, e_{d+1}) \leqslant 0.$$

Для сравнения заметим, что векторы $w \in P$ удовлетворяют неравенствам

$$(w, e_1) \geqslant 0, \ \dots, \ (w, e_m) \geqslant 0, \ (w, e_{m+1}) \geqslant 0, \ \dots, \ (w, e_{d+1}) \geqslant 0.$$

Теперь осталось только заметить, что направляющие ковекторы $\xi_1, \dots, \xi_{d+1}$ гиперплоских граней многогранника P являются ортогональными проекциями векторов $-e_1, \dots, -e_{d+1}$ на плоскость многогранника P (при помощи метрики мы, конечно, отождествим векторы с ковекторами).

Пусть многогранник P' аналогичен многограннику P. Тогда корректно определен симплекс S', соответствующий симплексу S. Симплекс S' ограничен гиперплоскими гранями многогранника P', соответствующими тем граням многогранника P, которые ограничивают симплекс S. Таким образом, с каждым многогранником $P' \in \mathscr{P}(P)$ связан симплекс $S' = S(P')$, причем линейным образом:

$$S(P' + P'') = S(P') + S(P''), \qquad S(\lambda P') = \lambda S(P').$$

Поставим в соответствие многограннику $P' \in \mathscr{P}(P)$ объем соответствующего симплекса S'. Получим функцию на конусе аналогичных многогранников, которая, очевидно, продолжается единственным образом до многочлена на пространстве $\mathscr{P}^*(P)$. Обозначим полученный многочлен через V_S. По определению,

$$V_S(H_1, \ldots, H_n) = \mathrm{Vol}(S),$$

где $H_1, \ldots, H_n$ – опорные числа многогранника P.

Заметим теперь, что если $1 < m < d$, то направляющие ковекторы гиперплоских граней многогранников P и Q совпадают. Следовательно, мы можем отождествить элементы пространств $\mathscr{P}^*(P)$ и $\mathscr{P}^*(Q)$, имеющие одинаковые опорные параметры (т.е. одинаковые координаты). Тем самым мы отождествили пространство $\mathscr{P}^*(P)$ с пространством $\mathscr{P}^*(Q)$. Однако настоящему многограннику при таком отождествлении соответствует всегда виртуальный многогранник.

Если же $m = 1$, то многогранник Q имеет на одну больше гиперплоских граней, чем многогранник P. В этом случае имеется естественный эпиморфизм пространства $\mathscr{P}^*(Q)$ на пространство $\mathscr{P}^*(P)$ – отображение, "забывающее" про опорный параметр, соответствующий дополнительной гиперплоской грани многогранника Q. Описанный эпиморфизм позволяет переносить многочлены с пространства $\mathscr{P}^*(P)$ на пространство $\mathscr{P}^*(Q)$. Согласно предложению 2.5.3 при перенесении многочлена объема с пространства $\mathscr{P}^*(P)$ на пространство $\mathscr{P}^*(Q)$ возникает изоморфизм соответствующих алгебр.

Если $m = 1$, то можно построить, наоборот, эпиморфизм пространства $\mathscr{P}^*(P)$ на пространство $\mathscr{P}^*(Q)$, позволяющий переносить на $\mathscr{P}^*(P)$ многочлены, определенные на пространстве $\mathscr{P}^*(Q)$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что если многогранник Q получен из многогранника P при помощи элементарной перестройки порядка $0 < m < d+1$, то многочлены V_P, V_Q и V_S можно рассматривать как многочлены, определенные на одном и том же пространстве.

Теорема 4.1.2. *Пусть простой многогранник Q получен из простого многогранника P при помощи элементарной перестройки порядка m. Тогда многочлены объема многогранников P и Q связаны следующим соотношением*:

$$V_Q = V_P + (-1)^{d-m} V_S. \tag{4.1.1}$$

Замечание. В формулировке теоремы мы использовали описанное выше отождествление пространств $\mathscr{P}^*(P)$ и $\mathscr{P}^*(Q)$ (или эпиморфизм одного пространства на другое). Заметим, что если набор переменных x состоит из опорных чисел некоторого *настоящего* многогранника P', аналогичного P, то в левой части выписанного равенства стоит объем *виртуального* многогранника из пространства $\mathscr{P}^*(Q)$. Наоборот, если переменные x равны опорным числам настоящего многогранника, аналогичного Q, то в правой части выписанного равенства стоят объем виртуального многогранника P', аналогичного P, и виртуального симплекса $S' = S(P)$.

Доказательство теоремы 4.1.2. Будем вести индукцию по $d-m$. Если $d=m$, то многогранник Q получается из многогранника P путем отрезания симплекса S. Совершенно естественно, что при этом объем многогранника Q равен объему многогранника P минус объем симплекса S. Допустим теперь, что $d>m$. В этом случае мы можем уменьшить размерность d, проделав тем самым индукционный переход.

Обозначим через S_i грань симплекса S, лежащую в аффинной оболочке грани $P\cap\Gamma_i$. Согласно теореме 3.4.1 и предположению индукции имеем:

(4.1.2) для $i=1,\dots,m$ $\quad \partial_i V_Q=\partial_i V_P+(-1)^{d-m}V_{S_i},$

(4.1.3) для $i=m+1,\dots,d+1$ $\quad \partial_i V_Q=\partial_i V_P+(-1)^{d-1-m}V_{S_i},$

(4.1.4) для остальных i $\quad \partial_i V_Q=\partial_i V_P$

(мы считаем, что x_i – это переменная многочлена объема, соответствующая гиперплоской грани $P\cap\Gamma_i$). Заметим, что увеличение координаты x_i при $i=1,\dots,m$ соответствует увеличению симплекса S, а увеличение координаты x_i при $i=m+1$, $\dots,d+1$ соответствует уменьшению симплекса S.

Согласно лемме 4.1.1

(4.1.5) для $i=1,\dots,m$ $\quad V_{S_i}=\partial_i V_S,$

(4.1.6) для $i=m+1,\dots,d+1$ $\quad V_{S_i}=-\partial_i V_S.$

Подставив (4.1.5) и (4.1.6) в формулы (4.1.2) и (4.1.3) соответственно, получим, что производная левой части соотношения (4.1.1) по любой переменной равна соответствующей производной правой части (4.1.1). Но однородный многочлен восстанавливается по своим первым производным (теорема Эйлера об однородных функциях). Следовательно, соотношение (4.1.1) имеет место.

4.2. Многочлен объема симплекса. Выясним теперь, как выглядит многочлен V_S.

Предложение 4.2.1. *Многочлен V_S равен φ^d, где φ – линейный функционал следующего вида*:

$$\varphi(x)=a_1x_1+\dots+a_mx_m-a_{m+1}x_{m+1}-\dots-a_{d+1}x_{d+1}.$$

Коэффициенты $a_1,\dots,a_{d+1}$ положительны. Переменные $x_1,\dots,x_{d+1}$ – это координаты в пространстве $\mathscr{P}^*(P)$, имеющие смысл опорных параметров, соответствующих граням $P\cap\Gamma_1,\dots,P\cap\Gamma_{d+1}$ многогранника P.

Доказательство. Многочлен V_S зависит только от переменных $x_1,\dots,x_{d+1}$. Заметим, что эти переменные совпадают (с точностью до знака) с опорными параметрами на пространстве $\mathscr{P}^*(S)$. Следовательно, многочлен V_S можно рассматривать как многочлен объема на пространстве виртуальных симплексов, аналогичных S. Единственная тонкость заключается в том, что этот многочлен объема выражен не через опорные параметры симплекса, а через переменные, совпадающие с этими опорными параметрами лишь с точностью до знака.

Обозначим через $x'_1, \dots, x'_{d+1}$ координаты в пространстве $\mathscr{P}^*(S)$, имеющие смысл опорных параметров симплекса S. Тогда согласно лемме 4.1.1 имеют место соотношения

$$x_1 = x'_1,\ \dots,\ x_m = x'_m,\ x_{m+1} = -x'_{m+1},\ \dots,\ x_{d+1} = -x'_{d+1}.$$

Теперь достаточно воспользоваться предложением 2.1.2.

Теорему 4.2.1 можно переписать теперь следующим образом:

$$V_Q = V_P + (-1)^{d-m}\varphi^d. \tag{4.2.1}$$

Это равенство будет играть ключевую роль в дальнейших рассуждениях.

Равенство (4.2.1) не ново. Оно встречается, например, в [14].

Переходный многогранник T можно рассматривать как виртуальный многогранник в пространстве $\mathscr{P}^*(P)$ (равно, как и в пространстве $\mathscr{P}^*(Q)$). Если $1 < m < d$, то направляющие ковекторы гиперплоских граней многогранников P и Q совпадают. Следовательно, пространства $\mathscr{P}^*(P)$ и $\mathscr{P}^*(Q)$ отождествляются по равенству координат. Таким образом, многогранники P, T и Q можно рассматривать как элементы одного и того же векторного пространства. Следовательно, на одном и том же пространстве определены операторы L_P, L_Q и L_T дифференцирования по направлениям многогранников P, Q и T соответственно.

Предложение 4.2.2. *Имеют место следующие соотношения*:

$$L_P\varphi > 0, \qquad L_T\varphi = 0, \qquad L_Q\varphi < 0.$$

Доказательство. Это утверждение почти очевидно. Неравенство $L_P\varphi > 0$ говорит о том, что симплекс S – настоящий. Величина $L_P\varphi$ представляет собой характерный линейный размер симплекса S. Равенство $L_T\varphi = 0$ соответствует тому факту, что в переходный момент симплекс сливается в точку. Наконец, неравенство $L_Q\varphi < 0$ может быть получено из соображений линейности. Именно, можно считать, что многогранник T лежит на отрезке между P и Q в пространстве $\mathscr{P}^*(P) = \mathscr{P}^*(Q)$. Функция φ линейна, принимает положительное значение на одном конце этого отрезка и обращается в нуль внутри отрезка. Следовательно, на другом конце функция φ принимает отрицательное значение.

Предложению 4.2.2 можно придать смысл и в случаях $m = 1$ или $m = d$.

В случае $m = 1$ оператор L_P определен не вполне однозначно. Многочлены объема мы рассматриваем на пространстве $\mathscr{P}^*(Q)$, которое эпиморфно отображается на пространство $\mathscr{P}^*(P)$. Однако многогранник P при этом эпиморфизме имеет много прообразов. Отнюдь не любой прообраз нам подходит. Нужно взять как раз такой прообраз, для которого $L_P\varphi > 0$. Аналогично, оператор L_Q в случае $m = d$ определяется условием $L_Q\varphi < 0$.

Для доказательства предложения 4.2.2 в случаях $m = 1$ и $m = d$ достаточно воспользоваться соображениями линейности.

Лемма 4.2.3. *Пусть линейный функционал φ и линейный дифференциальный оператор L таковы, что $L\varphi = 0$. Тогда для любых целых $r, s > 0$ имеет место равенство*

$$L^r\varphi^s = 0.$$

Доказательство. Если $r > s$, то утверждение очевидно. Если $r \leqslant s$, то по формуле дифференцирования степени

$$L^r\varphi^s = \frac{s!}{(s-r)!}\,(L\varphi)^r\varphi^{s-r} = 0.$$

Следствие 4.2.4. *Пусть φ – линейный функционал, определенный в предложении 4.2.1. Тогда $L_T^r\varphi^s = 0$, если только $r, s > 0$.*

4.3. Изменение алгебры многогранника при элементарной перестройке. Проследим теперь за тем, что происходит при элементарной перестройке с каждой компонентой A_k алгебры многогранника. Для этого достаточно проследить за изменением компоненты I_k идеала I, пользуясь теоремой 2.6.2. Воспользуемся обозначениями из предыдущих разделов.

Предложение 4.3.1. *Если $k < m$, то $I_k(P) = I_k(Q)$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.6.2 нам достаточно проверить следующее утверждение:

$$P \cap \Gamma_{i_1} \cap \dots \cap \Gamma_{i_k} = \varnothing \text{ тогда и только тогда, когда } Q \cap \Gamma_{i_1} \cap \dots \cap \Gamma_{i_k} = \varnothing.$$

Действительно, пусть, например,

$$P \cap \Gamma_{i_1} \cap \dots \cap \Gamma_{i_k} = \varnothing. \tag{4.3.1}$$

Тогда уж и подавно

$$P \cap \Gamma_{i_1} \cap \dots \cap \Gamma_{i_k} \cap \Gamma_{m+1} \cap \dots \cap \Gamma_{d+1} = \varnothing.$$

Группируя члены в последнем равенстве, видим, что левая часть представляет собой пересечение нескольких гиперплоских граней симплекса S_P. Но пересечение гиперплоских граней симплекса может быть пустым только в том случае, когда в пересечении участвуют *все* гиперплоские грани. Так что при $k < m$ равенство (4.3.1) никогда не выполняется. По тем же самым причинам невозможно и равенство

$$Q \cap \Gamma_{i_1} \cap \dots \cap \Gamma_{i_k} = \varnothing \tag{4.3.2}$$

(только вместо симплекса S_P здесь нужно рассматривать симплекс S_Q, который имеет еще большую размерность).

При $k = m$ равенство (4.3.1) уже реализуется. Например,

$$P \cap \Gamma_1 \cap \dots \cap \Gamma_m = \varnothing.$$

Это равенство соответствует тому факту, что пересечение всех гиперплоских граней симплекса S_P пусто. Таким образом, дифференциальный оператор

$$\sigma_k = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \cdots \partial x_m} D_{k-m}$$

(D_{k-m} – произвольный дифференциальный оператор степени $k-m$ с постоянными коэффициентами) лежит в компоненте $I_k(P)$ идеала $I(P)$. На оператор D_{k-m} мы накладываем только одно условие:

$$D_{k-m}\varphi^{k-m} \neq 0.$$

Теперь мы можем сказать, что происходит со старшими компонентами $I_k(P)$.

Предложение 4.3.2. *Если $m \leqslant k \leqslant d/2$, то $I_k(P) = I_k(Q) \oplus \langle \sigma_k \rangle$.*

Доказательство. В силу выписанного выше условия на D_{k-m} и равенства (4.2.1) оператор σ_k не лежит в пространстве $I_k(Q)$, но лежит в пространстве $I_k(P)$. Кроме того, пространство $I_k(Q)$ является подпространством пространства $I_k(P)$, поскольку равенство (4.3.2) не реализуется ни при каком $k < d - m$ (так что в пространстве $I_k(Q)$ не может быть лишних образующих). Итак,

$$I_k(P) \supset I_k(Q) \oplus \langle \sigma_k \rangle .$$

Однако соображения размерности (см. раздел 3.3) показывают, что на самом деле реализуется равенство.

§ 5. Аналог формы Ходжа–Римана

В этом параграфе доказываются аналоги соотношений Ходжа–Римана и разложения Лефшеца в алгебре простого выпуклого многогранника (по поводу настоящих соотношений Ходжа–Римана и разложения Лефшеца в когомологиях компактного кэлерова многообразия см. разделы 1.5 и 1.6).

5.1. Аналог формы Ходжа–Римана. В этом разделе мы сформулируем основные результаты настоящей работы.

Определение. Пусть P – простой выпуклый многогранник размерности d в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим однородный дифференциальный оператор α степени k с постоянными коэффициентами. Пусть V_P – многочлен объема на пространстве $\mathscr{P}^*(P)$, а L_P – оператор дифференцирования по направлению многогранника P (определение см. в разделе 2.3). Оператор α называется *примитивным* (относительно многогранника P), если имеет место равенство

$$\alpha L_P^{d-2k+1} V_P = 0.$$

Выписанное условие означает обращение в нуль некоторого однородного многочлена степени $k - 1$. Всякий элемент идеала $I(P)$ многогранника P примитивен. Поэтому можно говорить о примитивных элементах алгебры $A(P)$ многогранника P.

Определение. *Формой Ходжа–Римана* на однородной компоненте $A_k(P)$, $k \leqslant d/2$, алгебры многогранника P называется квадратичная форма

$$q(\alpha) = (-1)^k \alpha^2 L_P^{d-2k} V_P, \qquad \alpha \in A_k(P).$$

В правой части стоит результат применения однородного дифференциального оператора степени d к однородному многочлену степени d. Это число.

Теорема 5.1.1 (соотношения Ходжа–Римана). *Форма Ходжа–Римана положительно определена на примитивных элементах алгебры многогранника.*

Соотношения Ходжа–Римана можно сформулировать и без привлечения алгебры многогранника:

Пусть α – однородный дифференциальный оператор степени k с постоянными коэффициентами. Если оператор α примитивен относительно многогранника P, то справедливо неравенство

$$q(\alpha) = (-1)^k \alpha^2 L_P^{d-2k} V_P \geqslant 0,$$

причем равенство достигается только в том случае, если $\alpha V_P = 0$.

Сейчас мы сформулируем некоторый аналог соотношений Ходжа–Римана для переходных многогранников. Многочлен объема (алгебра) переходного многогранника – это многочлен объема (алгебра) его регуляризации. Если переходный многогранник допускает две неаналогичные регуляризации, то мы будем рассматривать два многочлена объема и две алгебры, связанные с этим переходным многогранником.

Определение. Пусть T – переходный многогранник, а P – его регуляризация. Рассмотрим однородный дифференциальный оператор α степени k с постоянными коэффициентами. Оператор α называется *примитивным* (относительно многогранника T и его регуляризации P), если имеет место равенство

$$\alpha L_T^{d-2k+1} V_P = 0.$$

Напомним, что оператор L_T определяется следующим способом:

$$L_T = \sum_{i=1}^{n} H_i(T) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где $H_i(T) = \max(\xi_i, T)$ – опорные числа многогранника T в направлениях гиперплоских граней многогранника P (ξ_i – направляющие ковекторы этих гиперплоских граней).

Определение. *Формой Ходжа–Римана* на однородной компоненте $A_k(T) = A_k(P)$ алгебры, соответствующей переходному многограннику T, называется квадратичная форма

$$q(\alpha) = (-1)^k \alpha^2 L_T^{d-2k} V_P, \qquad \alpha \in A_k(P).$$

Теорема 5.1.2 (соотношения Ходжа–Римана). *Форма Ходжа–Римана для простого или переходного многогранника положительно определена на примитивных элементах алгебры многогранника.*

Если переходный многогранник имеет две неаналогичные регуляризации, то теорема верна для обеих регуляризаций.

5.2. План доказательства. Мы будем доказывать соотношения Ходжа–Римана индукцией по размерности многогранника. Индукционный переход проходит в два этапа. На первом этапе из соотношений Ходжа–Римана в размерности $d-1$ выводится разложение Лефшеца в размерности d. Конкретно, предположение индукции используется при доказательстве следующей ключевой теоремы (см. раздел 5.5).

Сильная теорема Лефшеца. *Пусть P – простой или переходный многогранник. Тогда оператор умножения на элемент L_P^{d-2k} осуществляет изоморфизм между пространствами $A_k(P)$ и $A_{d-k}(P)$.*

Из сильной теоремы Лефшеца при помощи стандартных рассуждений чисто алгебраического характера (указанных еще в разделе 1.6) выводится разложение Лефшеца (см. раздел 5.3).

Разложение Лефшеца. *Имеет место следующее разложение в ортогональную прямую сумму*:

$$A_k(P) = \mathrm{Im}(L_P) \oplus \mathrm{Ker}(L_P^{d-2k+1}) \qquad (k > 0).$$

Ортогональность понимается в смысле формы Ходжа–Римана.

Разложение Лефшеца позволяет, зная сигнатуру формы Ходжа–Римана на каждой однородной компоненте алгебры многогранника, посчитать ее сигнатуру на всяком примитивном подпространстве. Поэтому на втором этапе достаточно посчитать сигнатуру формы Ходжа–Римана на каждой однородной компоненте.

В алгебре симплекса нет нетривиальных примитивных подпространств. Все однородные компоненты алгебры симплекса одномерны. Форма Ходжа–Римана на однородной компоненте степени k имеет знак $(-1)^k$.

Теперь мы воспользуемся теоремой 3.1.1. Согласно этой теореме любой простой многогранник можно получить из симплекса непрерывной деформацией, в ходе которой происходит лишь конечное число элементарных перестроек.

Предположим сначала, что простой многогранник P каким-то образом деформируется, оставаясь все время в своем классе аналогичных многогранников. В этом случае алгебра $A(P)$ не меняется вообще, а оператор L_P меняется непрерывно. Поэтому примитивные подпространства тоже меняются непрерывно (это связано с тем, что примитивные подпространства, отвечающие различным операторам L_P, имеют одну и ту же размерность – это вытекает из разложения Лефшеца, см. раздел 5.3). Форма Ходжа–Римана тоже меняется непрерывно и при этом никогда не вырождается (это следует из сильной теоремы Лефшеца, см. раздел 5.3). Следовательно, в ходе описанной деформации сигнатура формы Ходжа–Римана не меняется.

Далее, сигнатура не может поменяться, даже если многогранник P не остается аналогичным самому себе, а непрерывно деформируется, не меняя лишь комбинаторного типа (т.е. не подвергаясь никаким перестройкам). Этот вариант тоже предусмотрен теоремой 3.1.1. В нашем случае алгебра $A_k(P)$ меняется, но в некотором смысле меняется непрерывно. Точнее говоря, для каждого k компонента $I_k(P)$ меняется непрерывно (как конечномерное подпространство конечномерного пространства Diff_k). Утверждению о том, что всякая примитивная компонента вместе с определенной на ней формой Ходжа–Римана тоже меняется непрерывно, легко придать смысл. По крайней мере, отсюда вытекает, что сигнатура формы Ходжа–Римана не меняется и при таком способе шевеления многогранника.

Таким образом, мы видим, что сигнатура формы Ходжа–Римана может поменяться только в ходе перестройки. Итак, нам осталось проследить за изменением сигнатуры в течение элементарной перестройки порядка m. Это проделано в разделе 5.6. Ключевым соотношением здесь является равенство (4.2.1). В нем содержится вся информация о сигнатуре формы Ходжа–Римана.

5.3. Аналог разложения Лефшеца.

Теорема 5.3.1 (сильная теорема Лефшеца). *Пусть P – простой или переходный многогранник. Тогда оператор умножения на элемент L_P^{d-2k} осуществляет изоморфизм между $A_k(P)$ и $A_{d-k}(P)$.*

Эту теорему мы докажем позже, а сейчас выведем некоторые следствия из нее. При доказательстве мы будем пользоваться сильной теоремой Лефшеца в той же размерности, в какой сформулированы следствия. Таким образом, следствия, доказанные в настоящем разделе, мы сможем применять в ходе индукционных рассуждений (в частности, они нам пригодятся при доказательстве самой сильной теоремы Лефшеца).

Следствие 5.3.2. *Форма Ходжа–Римана невырождена в ограничении на каждую компоненту $A_k(P)$.*

Доказательство. Нам достаточно для каждого ненулевого элемента $\alpha \in A_k(P)$ предъявить такой элемент $\beta \in A_k(P)$, что

$$\alpha\beta L_P^{d-2k} V_P \neq 0. \tag{5.3.1}$$

Элемент $\alpha \in A_k(P)$ можно рассматривать как дифференциальный оператор, не обращающий в нуль многочлен объема. Тогда $\alpha V_P(x)$ – это ненулевой однородный многочлен степени $d-k$. Найдется такой дифференциальный оператор γ степени $d-k$, что $\gamma\alpha V_P \neq 0$. Согласно сильной теореме Лефшеца

$$\gamma = L_P^{d-2k}\beta \pmod{I(P)},$$

где β – дифференциальный оператор степени k, очевидно, удовлетворяющий соотношению (5.3.1). Следствие 5.3.2 доказано.

Следствие 5.3.3 (разложение Лефшеца). *Имеет место следующее разложение в ортогональную прямую сумму*:

$$A_k(P) = \operatorname{Im}(L_P) \oplus \operatorname{Ker}(L_P^{d-2k+1}) \qquad (k > 0).$$

Ортогональность понимается в смысле формы Ходжа–Римана.

Доказательство. Докажем сначала, что имеется разложение в прямую сумму. Для этого достаточно заметить, что оператор L_P^{d-2k+1} является изоморфизмом в ограничении на подпространство $\operatorname{Im}(L_P)$. Это вытекает из сильной теоремы Лефшеца, примененной к оператору

$$L_P^{d-2k+2}\colon A_{k-1}(P) \to A_{d-k+1}(P).$$

Осталось проверить, что выписанная прямая сумма ортогональна. Действительно, пусть

$$L_P\alpha \in \operatorname{Im}(L_P), \qquad \beta \in \operatorname{Ker}(L_P^{d-2k+1}).$$

Значение формы Ходжа–Римана на выбранных элементах равно

$$(L_P\alpha)\beta L_P^{d-2k} V_P = \alpha(L_P^{d-2k+1}\beta) V_P = 0,$$

так что выбранные элементы действительно ортогональны.

Следствие 5.3.4. *Размерность примитивного подпространства пространства* $A_k(P)$ *равна*
$$\dim \operatorname{Ker}(L_P^{d-2k+1}) = h_k - h_{k-1}.$$

В частности, эта размерность не зависит от конкретного выбора многогранника P в своем классе аналогичных многогранников. Следствие 5.3.4 непосредственно вытекает из следствия 5.3.3 и сильной теоремы Лефшеца.

Следствие 5.3.5. *Форма Ходжа–Римана невырождена в ограничении на каждое примитивное подпространство* $\operatorname{Ker}(L_P^{d-2k+1})$.

Это непосредственно вытекает из следствий 5.3.2 и 5.3.3.

5.4. Некоторые следствия. Сейчас мы выведем некоторые следствия из соотношений Ходжа–Римана. При доказательстве мы будем пользоваться соотношениями Ходжа–Римана в той же размерности, в какой сформулированы следствия (см. аналогичное замечание из предыдущего раздела).

Пусть P и Q – простые выпуклые d-мерные многогранники в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что многогранник Q получается из многогранника P при помощи элементарной перестройки порядка m. Обозначим через T соответствующий переходный многогранник. Рассмотрим однородный дифференциальный оператор α степени k с постоянными коэффициентами.

Лемма 5.4.1. *Если* $k \leqslant d/2$, *то* $\alpha L_T^{d-2k+1} V_P = \alpha L_T^{d-2k+1} V_Q$.

Доказательство вытекает из леммы 4.2.3 и равенства (4.2.1).

Следующее предложение представляет собой некоторый вариант соотношений Ходжа–Римана для переходных многогранников.

Предложение 5.4.2. *Пусть простой многогранник* Q *получен из простого многогранника* P *при помощи элементарной перестройки порядка* $m \leqslant \frac{d+1}{2}$. *Обозначим через* T *соответствующий переходный многогранник. Тогда*

$$(-1)^k \alpha^2 L_T^{d-2k} V_Q \geqslant 0$$

для всякого однородного дифференциального оператора α *степени* $k < d/2$ *с постоянными коэффициентами такого, что* $\alpha L_T^{d-2k+1} V_Q = 0$.

Доказательство. В самом деле, пусть дифференциальный оператор α степени k удовлетворяет условию
$$\alpha L_T^{d-2k+1} V_Q = 0.$$

Тогда согласно лемме 5.4.1 выполняется также равенство:

$$\alpha L_T^{d-2k+1} V_P = 0$$

(т.е. оператор α является примитивным относительно многогранника T). Теперь мы можем воспользоваться стандартными соотношениями Ходжа–Римана (теорема 5.1.1):
$$(-1)^k \alpha^2 L_T^{d-2k} V_P \geqslant 0.$$

Однако точно так же, как и лемма 5.4.1, доказывается следующее равенство:

$$(-1)^k\alpha^2 L_T^{d-2k}V_P = (-1)^k\alpha^2 L_T^{d-2k}V_Q$$

(здесь существенен тот факт, что $k < d/2$). Таким образом, теорема вытекает из стандартных соотношений Ходжа–Римана.

Докажем еще один вариант соотношений Ходжа–Римана для переходных многогранников.

Предложение 5.4.3. *Пусть простой многогранник Q получается из простого многогранника P элементарной перестройкой порядка m. Обозначим через T соответствующий переходный многогранник. Тогда*

$$(-1)^k\alpha^2 L_T^{d-2k}V_Q \geqslant 0$$

для всякого однородного дифференциального оператора α степени $k = m$ такого, что $\alpha L_T^{d-2k+1} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим семейство многогранников

$$Q_\lambda = (1-\lambda)Q + \lambda T.$$

Если $\lambda < 1$, то многогранник Q_λ аналогичен многограннику Q. Только в самый последний момент $\lambda = 1$ многогранник Q_λ вырождается и совпадает с переходным многогранником T. Рассматриваемому семейству многогранников отвечает семейство форм Ходжа–Римана

$$q_\lambda(\alpha) = (-1)^k\alpha^2 L_{Q_\lambda}^{d-2k}V_{Q_\lambda}.$$

Вплоть до самого последнего момента $\lambda = 1$ все эти формы невырождены и положительно определены. Однако каждая форма q_λ определена на своем собственном примитивном подпространстве. Если мы докажем, что все примитивные подпространства (в том числе и самое последнее) имеют одинаковую размерность, то мы сможем утверждать (пользуясь соображениями непрерывности), что на последнем примитивном пространстве

$$\Lambda_k^Q = \{\alpha \in A_k(Q) \mid \alpha L_T^{d-2k+1}V_Q = 0\}$$

предельная форма $q_1(\alpha) = (-1)^k\alpha^2 L_T^{d-2k}V_Q$ неотрицательно определена. Размерность примитивного пространства

$$\Lambda_k^P = \{\alpha \in A_k(P) \mid \alpha L_T^{d-2k+1}V_P = 0\}$$

можно вычислить, воспользовавшись следствием 5.3.4:

$$\dim(\Lambda_k^P) = h_k(P) - h_{k-1}(P).$$

Рассмотрим пространство

$$\Lambda_k = \{\alpha \in \mathrm{Diff}_k \mid \alpha L_T^{d-2k+1}V_Q = \alpha L_T^{d-2k+1}V_P = 0\}.$$

Заметим, что имеют место следующие изоморфизмы:

$$\Lambda_k^P = \frac{\Lambda_k}{I_k(P)}, \qquad \Lambda_k^Q = \frac{\Lambda_k}{I_k(Q)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\dim(\Lambda_k^Q) &= \dim(\Lambda_k^P) + \dim(I_k(P)) - \dim(I_k(Q))\\ &= h_k(P) - h_{k-1}(P) + h_k(Q) - h_k(P) = h_k(Q) - h_{k-1}(P).\end{aligned}$$

Теперь мы воспользуемся условием $k = m$. Это условие говорит нам о том, что $h_{k-1}(P) = h_{k-1}(Q)$. Следовательно, $\dim(\Lambda_k^Q) = h_k(Q) - h_{k-1}(Q)$.

Следствие 5.4.4. *Пусть многогранник Q получается из многогранника P при помощи элементарной перестройки порядка $m = d/2$. Тогда*

$$(-1)^k \alpha^2 L_T^{d-2k} V_Q \geqslant 0$$

для всякого однородного дифференциального оператора α степени k с постоянными коэффициентами такого, что $\alpha L_T^{d-2k+1} V_Q = 0$.

Доказательство. При $k < d/2$ это вытекает из предложения 5.4.2, а при $k = d/2$ – из предложения 5.4.3.

5.5. Сильная теорема Лефшеца. В этом разделе приведено доказательство сильной теоремы Лефшеца 5.3.1.

Доказательство для простого многогранника. Сейчас мы дадим доказательство сильной теоремы Лефшеца для случая простого многогранника. В случае переходного многогранника потребуются некоторые дополнительные соображения.

Пространства $A_k(P)$ и $A_{d-k}(P)$ имеют одинаковую размерность. Следовательно, достаточно доказать инъективность отображения

$$L_P^{d-2k} \colon A_k(P) \to A_{d-k}(P).$$

Пусть α – однородный дифференциальный оператор степени k с постоянными коэффициентами такой, что

$$\alpha L_P^{d-2k} V_P = 0. \tag{5.5.1}$$

Нам нужно доказать, что в этом случае $\alpha V_P = 0$. Применим к обеим частям равенства (5.5.1) оператор ∂_i:

$$\alpha L_P^{d-2k} \widetilde{V}_{P_i} = 0. \tag{5.5.2}$$

Пусть V_{P_i} – многочлен объема гиперплоской грани P_i, рассматриваемой внутри своей выпуклой оболочки. Согласно предложению 2.5.3 мы можем отождествить алгебры $A(\widetilde{V}_{P_i})$ и $A(V_{P_i})$. Так мы и сделаем. При этом сопоставлении оператору L_P соответствует оператор L_{P_i}.

Многогранник P_i имеет на единицу меньшую размерность, чем многогранник P. Следовательно, равенство (5.5.2) говорит о том, что оператор α является примитивным относительно многогранника P_i. Но тогда по предположению индукции имеет место соотношение Ходжа–Римана:

$$(-1)^k \alpha^2 L_{P_i}^{d-1-2k} \widetilde{V}_{P_i} \geqslant 0. \tag{5.5.3}$$

Теперь заметим, что

$$L_P^{d-2k} V_P = \sum_{i=1}^{n} H_i(P) L_P^{d-1-2k} \frac{\partial}{\partial x_i} V_P = \sum_{i=1}^{n} H_i(P) L_P^{d-1-2k} \widetilde{V}_{P_i}.$$

Отсюда понятно, что форму Ходжа–Римана для многогранника P можно получить, суммируя левые части формулы (5.5.3) с коэффициентами $H_i(P)$. Однако всегда можно выбрать начало координат внутри многогранника P, так что все опорные числа

$H_i(P)$ окажутся положительными. Итак, суммируя неравенства (5.5.3) с положительными коэффициентами, мы получаем следующее неравенство:

$$(-1)^k\alpha^2 L_P^{d-2k} V_P \geqslant 0.$$

Но в этом неравенстве на самом деле реализуется равенство (согласно соотношению (5.5.1)). Следовательно, равенство реализуется и во всех неравенствах (5.5.3). Но тогда согласно предположению индукции

$$\alpha\widetilde{V}_{P_i} = \alpha\frac{\partial}{\partial x_i}V_P = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Многочлен $\alpha V_P(x)$ является однородным степени $d-k$. Следовательно, по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\alpha V_P = \frac{1}{d-k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha V_P = \frac{1}{d-k}\sum_{i=1}^{n}\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}V_P = 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство для переходного многогранника. Докажем сильную теорему Лефшеца для переходного многогранника T. Предположим сначала, что индекс многогранника T удовлетворяет неравенству $m < \frac{d+1}{2}$. Тогда приведенное выше доказательство проходит дословно. Следует иметь в виду только тот факт, что гиперплоская грань регуляризации $\operatorname{reg} T$ служит регуляризацией соответствующей гиперплоской грани многогранника T.

Рассмотрим теперь исключительный случай $m = \frac{d+1}{2}$. В этом случае у многогранника T имеется целых два многочлена объема V_P и V_Q, соответствующие двум различным регуляризациям P и Q. В соответствии с этим у многогранника T имеется сразу две различные алгебры $A(P)$ и $A(Q)$. Докажем сильную теорему Лефшеца для алгебры $A(P)$. Предположим, что

$$\alpha L_P^{d-2k} V_P = 0.$$

Случай $k = d/2$ очевиден (в этом случае мы имеем дело с тождественным отображением). Поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $k < d/2$. Применим к обеим частям равенства (4.2.1) оператор αL_T^{d-2k} и воспользуемся леммой 4.2.3. Получим:

$$\alpha L_T^{d-2k}(V_Q) = \alpha L_T^{d-2k}(V_P) = 0.$$

Согласно теореме 5.1.1 и следствию 5.4.4 выполнены следующие нестрогие неравенства:

$$(-1)^k\alpha^2 L_T^{d-1-2k}\widetilde{V}_{P_i} \geqslant 0, \tag{5.5.4}$$

$$(-1)^k\alpha^2 L_T^{d-1-2k}\widetilde{V}_{Q_i} \geqslant 0. \tag{5.5.5}$$

Эти неравенства соответствуют неравенствам (5.5.3) для случая простого многогранника. Конечно, мы уже не можем говорить о невырожденности квадратичных форм в левых частях неравенств (5.5.4) и (5.5.5). В полной аналогии с доказательством для простого многогранника мы можем заключить, что оба выписанных только что неравенства (5.5.4) и (5.5.5) обращаются в равенство:

$$(-1)^k\alpha^2 L_T^{d-1-2k}\widetilde{V}_{P_i} = 0, \tag{5.5.6}$$

$$(-1)^k\alpha^2 L_T^{d-1-2k}\widetilde{V}_{Q_i} = 0. \tag{5.5.7}$$

Равенства (5.5.6) и (5.5.7) соответствуют обращению неравенства (5.5.3) в равенство. Заметим, что регуляризацией гиперплоской грани T_i многогранника T является либо грань P_i, либо грань Q_i. Следовательно, для каждого i

$$\text{либо } \alpha\widetilde{V}_{P_i} = 0, \tag{5.5.8}$$

$$\text{либо } \alpha\widetilde{V}_{Q_i} = 0. \tag{5.5.9}$$

Предположим, что $k < \frac{d-1}{2}$. В этом случае $A_k(P_i)$ и, следовательно, равенства (5.5.8) и (5.5.9) эквивалентны. Но тогда они оба справедливы (поскольку известно, что выполнено хотя бы одно из них). Далее, аналогично доказательству для простого многогранника заключаем, что $\alpha V_P = 0$ и $\alpha V_Q = 0$, т.е. сильная теорема Лефшеца доказана. Осталось рассмотреть случай $k = \frac{d-1}{2}$. В этом случае обе квадратичные формы, стоящие в левых частях равенств (5.5.6) и (5.5.7), невырождены. Дело в том, что никакой оператор L в этих формах не фигурирует. Но тогда равенство (5.5.6) влечет равенство (5.5.8), а равенство (5.5.7) влечет равенство (5.5.9), так что опять равенства (5.5.8) и (5.5.9) выполнены одновременно. Сильная теорема Лефшеца тем самым полностью доказана.

5.6. Сигнатура формы Ходжа–Римана.

Определение. Пусть q – квадратичная форма на конечномерном векторном пространстве, которая в некотором базисе записывается в виде

$$q(\alpha) = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_a^2 - \alpha_{a+1}^2 - \dots - \alpha_{a+b}^2,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_{a+b}, \dots, \alpha_N$ – координаты в рассматриваемом базисе. Тогда разность $a - b$ называется сигнатурой квадратичной формы q.

Проследим за изменением сигнатуры формы Ходжа–Римана при элементарной перестройке.

Предложение 5.6.1. *Перестройка порядка m не меняет сигнатуры формы Ходжа–Римана на однородных компонентах $A_k(P)$, $k < m$, алгебры простого выпуклого многогранника.*

Доказательство. Применим к обеим частям равенства (4.2.1) дифференциальный оператор $(-1)^k\alpha^2 L_T^{d-2k}$, $\alpha \in A_k(P)$:

$$(-1)^k\alpha^2 L_T^{d-2k} V_Q = (-1)^k\alpha^2 L_T^{d-2k} V_P. \tag{5.6.1}$$

(Поскольку $k < m \leqslant (d+1)/2$, то $k \leqslant m-1 \leqslant (d-1)/2$ и, следовательно, $2k < d$. Отсюда вытекает в силу следствия 4.2.4, что $L_T^{d-2k}\varphi^d = 0$.)

Заметим, что форма в левой части имеет ту же сигнатуру, что и форма Ходжа–Римана для многогранника P. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим процесс деформации многогранника P в многогранник T. При этом форма Ходжа–Римана для многогранника P продеформируется в форму Ходжа–Римана для многогранника T, т.е. в форму, стоящую в правой части равенства (5.6.1). В течение этого процесса компонента A_k вообще не будет меняться, а оператор L будет меняться непрерывно. Таким образом, мы получим однопараметрическое семейство форм Ходжа–Римана, непрерывно зависящих от параметра. В силу следствия 5.3.2 все эти формы невырождены. Следовательно, сигнатуры всех этих форм совпадают. Поскольку форма в правой части равенства (5.6.1) невырождена, то же самое можно сказать и про форму в левой части. Но тогда ее сигнатура (по изложенным выше соображениям) совпадает с сигнатурой формы Ходжа–Римана для многогранника Q. Следовательно, формы Ходжа–Римана для многогранников P и Q имеют одинаковые сигнатуры, что и требовалось доказать.

Следствие 5.6.2. *Элементарная перестройка порядка $m > d/2$ не меняет сигнатуры формы Ходжа–Римана на компоненте $A_k(P)$, $k > d - m$.*

Предложение 5.6.3. *Перестройка порядка m добавляет к сигнатуре формы Ходжа–Римана на компоненте $A_k(P)$, $m \leqslant k \leqslant d/2$, число $(-1)^{k-m}$.*

При доказательстве этого утверждения мы воспользуемся следующим простым общим фактом из линейной алгебры.

Лемма 5.6.4. *Пусть на конечномерном линейном пространстве заданы три квадратичные формы q, q_1, q_2, причем*

$$q = q_1 + q_2.$$

Предположим, что ранг формы q_2 совпадает с размерностью ядра формы q_1, а сама форма q_2 невырождена в ограничении на это ядро. Обозначим через a, a_1 и a_2 сигнатуры форм q, q_1, q_2 соответственно. Тогда

$$a = a_1 + a_2.$$

Доказательство предложения 5.6.3. Применим теперь к обеим частям равенства (4.2.1) оператор $(-1)^k\alpha^2 L_P^{d-2k}$. Получим:

$$q^P(\alpha) = q_1^P(\alpha) + q_2^P(\alpha), \tag{5.6.2}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} q^P(\alpha) &= (-1)^k\alpha^2 L_P^{d-2k} V_Q, \\ q_1^P(\alpha) &= (-1)^k\alpha^2 L_P^{d-2k} V_P, \\ q_2^P(\alpha) &= (-1)^k\alpha^2 L_P^{d-2k}((-1)^{d-m}\varphi^d). \end{aligned}$$

Можно считать, что $\alpha \in A_k(Q)$. В самом деле, согласно предложению 4.3.2 пространство $A_k(P)$ является факторпространством пространства $A_k(Q)$.

Заметим, что форма q_1^P имеет на пространстве $A_k(Q)$ одномерное ядро, порожденное элементом σ_k. Действительно, профакторизуем пространство $A_k(Q)$ по этому элементу. Получим пространство $A_k(P)$, на котором форма q_1^P невырождена (в силу следствия 5.3.2).

Форма q_2^P имеет единичный ранг и невырождена в ограничении на прямую, порожденную элементом σ_k. Согласно лемме 5.6.4 сигнатура формы q^P равна сумме сигнатур форм q_1^P и q_2^P.

Начнем деформировать многогранник P к многограннику Q. После деформации равенство (5.6.2) запишется в виде

$$q^Q(\alpha) = q_1^Q(\alpha) + q_2^Q(\alpha), \tag{5.6.3}$$

где

$$\begin{aligned} q^Q(\alpha) &= (-1)^k \alpha^2 L_Q^{d-2k} V_Q, \\ q_1^Q(\alpha) &= (-1)^k \alpha^2 L_Q^{d-2k} V_P, \\ q_2^Q(\alpha) &= (-1)^k \alpha^2 L_Q^{d-2k}((-1)^{d-m}\varphi^d). \end{aligned}$$

В процессе деформации ядро формы q_1 остается неизменным. Форма q_2 в переходный момент вырождается и, вообще говоря, меняет знак. Однако после перестройки она снова невырождена. Таким образом, сигнатура формы q^Q получается из сигнатуры формы q_1^Q добавлением знака числа $q_2^Q(\sigma_k)$.

Нам осталось только посчитать этот знак. Имеем:

$$q_2^Q(\sigma_k) = (-1)^k \sigma_k^2 L_Q^{d-2k}((-1)^{d-m}\varphi^d) = (-1)^{k-m}\frac{d!}{(d-2k)!}(-L_Q\varphi)^{d-2k}\sigma_k^2(\varphi^{2k}).$$

Знак последнего выражения равен $(-1)^{k-m}$. Дело в том, что $-L_Q\varphi > 0$ согласно предложению 4.2.2, а $\sigma_k^2(\varphi^{2k}) = \binom{2k}{k}(\sigma_k\varphi^k)^2$.

Следствие 5.6.5. *Элементарная перестройка порядка $d+1-m$, $m \leqslant k \leqslant d/2$, уменьшает сигнатуру формы Ходжа–Римана на однородной компоненте A_k алгебры многогранника на величину $(-1)^{k-m}$.*

Введем теперь некоторые обозначения:

$$g_k = h_k - h_{k-1}.$$

Это просто размерности примитивных подпространств. Пользуясь доказанными выше предложениями, нетрудно вычислить сигнатуру формы Ходжа–Римана:

Теорема 5.6.6. *Сигнатура формы Ходжа–Римана на однородной компоненте $A_k(P)$ алгебры многогранника P (простого или переходного) равна*

$$s_k = g_k - g_{k-1} + g_{k-2} - g_{k-3} + \cdots.$$

Теперь мы можем посчитать сигнатуру формы Ходжа–Римана, ограниченной на примитивное подпространство $\mathrm{Ker}(L_P^{d-2k+1})$ однородной компоненты $A_k(P)$ алгебры многогранника P. Пусть q_k – форма Ходжа–Римана на однородной компоненте $A_k(P)$, а α – произвольный элемент $A_k(P)$. Согласно следствию 5.3.3 имеет место ортогональное разложение Лефшеца $\alpha = \beta + L_P\gamma$, в котором элемент β принадлежит примитивному подпространству. Умножим обе части последнего равенства на $(-1)^k L_P^{d-2k}$ и применим их к многочлену объема. В результате получим, что $q_k(\alpha) = q_k(\beta) - q_{k-1}(\gamma)$.

Следовательно, форма $\beta \mapsto q_k(\beta)$ (это просто ограничение формы q_k на примитивное подпространство однородной компоненты $A_k(P)$ алгебры многогранника) имеет сигнатуру

$$s_k + s_{k-1} = g_k.$$

Таким образом, форма Ходжа–Римана положительно определена на примитивном подпространстве в каждой однородной компоненте, что и требовалось доказать.

5.7. Смешанные соотношения Ходжа–Римана.

Определение. Пусть P – простой выпуклый многогранник, а $P_1, \dots, P_{d-2k}$ – простые многогранники, аналогичные P. Рассмотрим однородный дифференциальный оператор α степени k с постоянными коэффициентами. Оператор α называется *примитивным* (относительно системы многогранников $P, P_1, \dots, P_{d-2k}$), если

$$\alpha L_P \Omega(V_P) = 0, \quad \text{где} \quad \Omega = L_{P_1} \cdots L_{P_{d-2k}}.$$

Всякий элемент идеала $I(P)$ примитивен. Поэтому можно говорить о примитивных элементах алгебры $A(P)$.

Определение. Смешанной формой Ходжа–Римана на однородной компоненте $A_k(P)$, $k \leqslant d/2$, алгебры многогранника называется квадратичная форма

$$q(\alpha) = (-1)^k \alpha^2 \Omega(V_P), \qquad \alpha \in A_k(P).$$

Теперь мы можем сформулировать смешанный аналог билинейных соотношений Ходжа–Римана для простых многогранников.

Теорема 5.7.1. *Смешанная форма Ходжа–Римана положительно определена на примитивных элементах алгебры многогранника.*

Смешанные соотношения доказываются следующим образом: сначала устанавливается смешанный вариант сильной теоремы Лефшеца (точно так же, как и обычный вариант), потом доказываются формальные следствия из этой теоремы (абсолютно аналогичные следствиям из раздела 5.3), после чего смешанную форму Ходжа–Римана можно продеформировать к обычной форме Ходжа–Римана, причем согласно аналогу следствия 5.3.2 в ходе деформации форма не выродится. Следовательно, смешанная форма Ходжа–Римана имеет ту же сигнатуру, что и обычная. Теперь можно посчитать знаки, пользуясь смешанным разложением Лефшеца, и установить тем самым смешанные соотношения Ходжа–Римана. Заметим, что сформулированные соотношения обобщают классическое неравенство Александрова–Фенхеля для многогранников:

Следствие 5.7.2. *Пусть $P_1, \dots, P_d$ – простые аналогичные многогранники. Тогда имеет место следующее неравенство на смешанные объемы*:

$$\mathrm{Vol}(P_1, P_2, \dots, P_d)^2 \geqslant \mathrm{Vol}(P_1, P_1, \dots, P_d) \cdot \mathrm{Vol}(P_2, P_2, \dots, P_d).$$

Неравенства Александрова–Фенхеля вытекают из того, что положительный индекс инерции смешанной формы Ходжа–Римана на компоненте A_1 равен единице. Для таких квадратичных форм во внутренности изотропного конуса выполняется обращенное неравенство Коши–Буняковского. Обращенное неравенство Коши–Буняковского, записанное для смешанной формы Ходжа–Римана, совпадает с неравенствами Александрова–Фенхеля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Fulton W. Introduction to toric varieties. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993. (Ann. of Math. Stud. V. 131.)

[2] Kempf G., Knudzen F., Mumford D., Saint-Donat B. Toroidal embeddings I. Berlin: Springer-Verlag, 1973.

[3] Oda T. Convex bodies and algebraic geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[4] Данилов В.И. Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. №2. С. 85–134.

[5] Stanley R.P. The number of faces of a simplicial convex polytope // Adv. Math. 1980. V. 35. P. 236–238.

[6] Пухликов А.В., Хованский А.Г. Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №4. С. 188–216.

[7] McMullen P. On simple polytopes // Invent. Math. 1993. V. 113. P. 419–444.

[8] Александров А.Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. II. Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения // Матем. сб. 1937. Т. 2. №6. С. 1205–1238.

[9] Хованский А.Г. Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20. №1. С. 50–61.

[10] Billera L.J., Lee C.W. A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes // J. Combin. Theory. Ser. A. 1981. V. 31. P. 237–255.

[11] Вейль А. Введение в теорию кэлеровых многообразий. М.: ИЛ, 1961.

[12] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.

[13] Пухликов А.В., Хованский А.Г. Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №2. С. 161–185.

[14] Варченко А.Н. Комбинаторика и топология расположения аффинных гиперплоскостей в вещественном пространстве // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. №1. С. 11–22.

Независимый московский университет
E-mail: `timorin@mccme.ru`

Поступила в редакцию
08.02.1999