Функциональный анализ и его приложения
2006, т. 40, вып. 2, с. 33–43

УДК 514.124

Диффеоморфизмы, переводящие прямые в окружности, и кватернионные расслоения Хопфа

© 2006. В. А. Тиморин

§1. Введение

Пусть U — открытое подмножество четырехмерного вещественного проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^4$, а V — открытое подмножество четырехмерной сферы S^4. Мы изучаем диффеоморфизмы $f\colon U \to V$, переводящие отрезки прямых, заключенные в U, в дуги окружностей, заключенные в V. Для краткости мы всегда будем говорить, что f *переводит прямые в окружности*. Цель настоящей статьи — дать полный список таких диффеоморфизмов.

Будем считать, что S^4 вложена в $\mathbb{R}^5$ стандартным образом, т. е. как множество точек, заданное уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1.$$

Пример 1. Например, возьмем произвольную гиперплоскость в $\mathbb{R}^5$ и произвольную точку в проективном замыкании пространства $\mathbb{R}^5$ (это может быть бесконечно удаленная точка). Очевидно, что проекция данной гиперплоскости на сферу S^4 из данной точки переводит все прямые в окружности. Ограничение этой проекции на некоторое открытое подмножество гиперплоскости является диффеоморфизмом между этим подмножеством и его образом. Диффеоморфизмы, полученные таким образом, будем называть *классическими проекциями.* Конечно, классические проекции живут во всех размерностях, а не только в размерности 4.

Сфера S^4 отождествляется с кватернионной проективной прямой $\mathbb{H}\mathrm{P}^1$ (как с левой, так и с правой). Напомним, как выглядит это отождествление. Точка из $\mathbb{H}\mathrm{P}^1$ задается парой однородных координат — кватернионов, которые не обращаются одновременно в нуль и определены с точностью до одновременного умножения на один и тот же кватернион (справа или слева, в зависимости от типа кватернионной прямой). Точке из $\mathbb{H}\mathrm{P}^1$ с однородными координатами (q_0, q_1) соответствует точка на сфере S^4 с координатами

$$\left(\frac{2q_0q_1}{|q_0|^2 + |q_1|^2}, \frac{|q_0|^2 - |q_1|^2}{|q_0|^2 + |q_1|^2}\right). \tag{1}$$

Пример 2. Другой пример приходит из *кватернионного расслоения Хопфа.* Напомним определение. Рассмотрим стандартную проекцию множества ненулевых векторов левого (соответственно правого) двумерного кватернионного векторного пространства $\mathbb{H}^2$ на левую (соответственно правую) кватернионную проективную прямую $\mathbb{H}\mathrm{P}^1$. Последняя отождествляется с S^4 так, как описано выше. Ясно, что эта проекция пропускается через $\mathbb{R}\mathrm{P}^7$ — вещественную проективизацию кватернионной плоскости $\mathbb{H}^2$. Таким образом, мы получаем отображение из $\mathbb{R}\mathrm{P}^7$ в S^4. Это кватернионное расслоение Хопфа. Известно (см., например, [1]), что кватернионное расслоение Хопфа переводит все прямые в окружности. Следовательно, то же самое верно для его ограничения на любое четырехмерное проективное подпространство пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^7$.

Сформулируем основной результат:

Теорема 1. *Предположим, что диффеоморфизм f между открытым множеством в $\mathbb{R}\mathrm{P}^4$ и открытым множеством в S^4 переводит все прямые в окружности. Тогда это либо классическая проекция, либо композиция (левого или правого) кватернионного расслоения Хопфа с некоторым вложением пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^4$ в $\mathbb{R}\mathrm{P}^7$ в качестве проективного подпространства.*

Мы предполагаем, что f имеет достаточное число производных.

История вопроса. Задача нахождения преобразований, переводящих прямые в окружности, пришла из номографии (введение в номографию можно найти в [2]). Г. С. Хованский в 1970-х годах поставил такую задачу: найти все диффеоморфизмы между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^2$, переводящие прямые в окружности, или, на языке номографии, преобразующие номограммы из выровненных точек в циркулярные номограммы. Циркулярные номограммы удобнее на практике, в то время как номограммы из выровненных точек проще теоретически. Эта задача была решена А. Г. Хованским [3], который доказал, что все такие диффеоморфизмы приходят из проекций плоскостей в $\mathbb{R}^3$ на евклидовы сферы. Этот результат был сформулирован в другой форме: с точностью до проективного преобразования в прообразе и преобразования Мёбиуса в образе, есть только три таких диффеоморфизма, и они отвечают классическим геометриям. Изади [4] перенес результаты Хованского на трехмерный случай.

Как выяснилось (см. [5]), теорема Хованского не переносится в размерность 4. Простейший контрпример — это комплексное проективное преобразование. Оно переводит прямые в окружности, но не получается из проекции гиперплоскости на сферу. Это частный случай примера 2, приведенного выше. В [5] доказано, что все достаточно обильные выпрямляемые (некоторым диффеоморфизмом) пучки окружностей, проходящих через некоторую точку в $\mathbb{R}^4$, получаются из примера 2 (те, что получаются из примера 1, также могут быть получены и из примера 2). Это первый шаг в доказательстве теоремы 1. Настоящая статья завершает доказательство.

Я благодарен А. Г. Хованскому за полезные обсуждения, советы и внимание к работе, а также рецензенту за полезные замечания.

§ 2. Дифференциальное уравнение

В этом параграфе мы выпишем дифференциальное уравнение на диффеоморфизм, переводящий прямые в окружности, и получим условие интегрируемости для этого уравнения.

Напомним обозначения: мы изучаем диффеоморфизм f между открытыми областями $U \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^4$ и $V \subseteq S^4$, переводящий все прямые в окружности. Теорему 1 достаточно доказать для достаточно малых областей U и V. В самом деле, допустим, что теорема верна в каждой достаточно малой окрестности $U \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^4$.

Тогда она верна и в любой открытой области, так как отображение, локально, в окрестности каждой точки, совпадающее с некоторым аналитическим отображением из данного класса аналитических отображений, само является аналитическим и принадлежит данному классу. Доказательство теоремы 1, приводимое ниже, не использует аналитичности отображения f — аналитичность выясняется апостериори.

Итак, области U и V можно считать достаточно малыми. В частности, можно считать, что $U \subset \mathbb{R}^4$ и что V не содержит северного полюса. На U можно ввести аффинную структуру. В частности, мы будем говорить о постоянных векторных полях на U. При отождествлении сферы S^4 с $\mathbb{HP}^1$ по формуле (1) координата q_1 нигде не обращается в 0 на V. Следовательно, $q_1^{-1}q_0$ (в случае левой проективной прямой) или $q_0q_1^{-1}$ (в случае правой проективной прямой) является кватернионной координатой на V. При выбранных системах координат отображение f можно рассматривать как кватернионнозначную функцию от четырех переменных.

Для всякого вектора α (постоянного векторного поля на U) обозначим через ∂_α оператор дифференцирования вдоль α. Положим $A_\alpha = \partial_\alpha f$. Для каждой точки $x \in U$ кватернион $A_\alpha(x)$ линейно (над $\mathbb{R}$) зависит от α. О совокупности кватернионнозначных функций A_α полезно думать как о кватернионнозначной дифференциальной 1-форме A: каждой точке $x \in U$ соответствует вещественно-линейный функционал $A(x)\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}$, сопоставляющий вектору α кватернион $A_\alpha(x)$.

Из результатов работы [5] непосредственно вытекает, что в каждой точке x найдется кватернион B_α, линейно зависящий от α и такой, что производная $\partial_\alpha A_\alpha$ в точке x равна $B_\alpha A_\alpha(x)$ или $A_\alpha(x)B_\alpha$ для всех α. Умножение на B_α происходит либо слева, либо справа; порядок не зависит от α, но априори может зависеть от x.

Определить порядок умножения можно следующим образом. Зафиксируем точку $x \in U$. Поскольку f является локальным диффеоморфизмом, для каждого кватерниона q найдется единственный вектор $\alpha \in \mathbb{R}^4$, такой, что $q = A_\alpha(x)$. Рассмотрим отображение Φ, переводящее q в $\partial_\alpha A_\alpha(x)$. Это отображение квадратично над вещественными числами.

Обозначим через $\mathbb{H}^\mathbb{C}$ алгебру бикватернионов — комплексификацию алгебры кватернионов. В [5] доказано следующее. Комплексификация $\Phi^\mathbb{C}: \mathbb{H}^\mathbb{C} \to \mathbb{H}^\mathbb{C}$ отображения Φ является квадратичным отображением, сохраняющим конус $\mathscr{N} = \{q\overline{q} = 0\}$. Имеется два семейства двумерных плоскостей, лежащих целиком в $\mathscr{N}$, причем отображение $\Phi^\mathbb{C}$ сохраняет по крайней мере одно из этих семейств почленно (т. е. переводит каждую плоскость одного из этих семейств в себя). Одно семейство соответствует левому умножению на B_α, а второе — правому. Если отображение Φ представляется как левым, так и правым умножениями на B_α, т. е. $\Phi^\mathbb{C}$ сохраняет оба семейства плоскостей, то $\Phi(q) = \lambda(q)q + aq\overline{q}$, где a — постоянный кватернион, а λ — вещественнозначный линейный (над $\mathbb{R}$) функционал. В этом случае, полагая $\mu_\alpha = \lambda(A_\alpha)$, получаем

$$\partial_\alpha A_\alpha = \mu_\alpha A_\alpha + aA_\alpha\overline{A}_\alpha.$$

Лемма 2. *Область U можно выбрать настолько маленькой, чтобы всюду на U для любого вектора α выполнялось одно из следующих двух равенств*:

$$\partial_\alpha A_\alpha = B_\alpha A_\alpha, \tag{2}$$

$$\partial_\alpha A_\alpha = A_\alpha B_\alpha. \tag{3}$$

Здесь B — некоторая кватернионнозначная 1-форма. Если в некоторой точке выполнены оба равенства, то в ней

$$\partial_\alpha A_\alpha = \mu_\alpha A_\alpha + aA_\alpha \overline{A}_\alpha. \tag{4}$$

Здесь a — некоторый кватернион, а μ_α — некоторое вещественное число.

Равенство (4) влечет за собой как равенство (2), так и равенство (3), в которых $B_\alpha = \mu_\alpha + a\overline{A}_\alpha$. Это вытекает из того, что действительное число μ_α коммутирует с кватернионом A_α, действительное число $A_\alpha\overline{A}_\alpha$ коммутирует с кватернионом a и, наконец, сопряженные кватернионы A_α и $\overline{A}_\alpha$ коммутируют.

Доказательство леммы 2. Согласно сказанному выше, в каждой точке выполняется либо равенство (2), либо равенство (3). Множество точек, в которых выполнены оба равенства, задается уравнением (4) с неизвестными μ_α и a. Условие разрешимости этого уравнения — система равенств на A_α и $\partial_\alpha A_\alpha$; поэтому множество точек, в которых уравнение (4) разрешимо, замкнуто. Таким образом, область определения отображения f содержит открытое всюду плотное множество, на каждой компоненте которого выполняется одно из соотношений (2), (3) или оба. Достаточно доказать теорему 1 на каждой из этих компонент, так как различные ответы гладко не склеиваются. □

Лемма 2 определяет дифференциальные уравнения на f. Заметим, что уравнения (2) и (3) аналогичны друг другу. Более того, одно переводится в другое сопряжением. Поэтому достаточно решить только одно из них, например (2).

§ 3. Первое условие интегрируемости

В этом параграфе мы выведем дифференциальное условие на B, необходимое для интегрируемости уравнения (2).

Прежде всего перепишем это уравнение в более удобной форме. Поскольку A_α являются производными, имеем $\partial_\alpha A_\beta = \partial_\beta A_\alpha$. Из этого уравнения и из уравнения (2) немедленно следует, что

$$\partial_\alpha A_\beta = \frac{1}{2}(B_\alpha A_\beta + B_\beta A_\alpha). \tag{5}$$

Условие интегрируемости для уравнения (2) можно получить из равенства $\partial_\alpha\partial_\beta A_\gamma = \partial_\beta\partial_\alpha A_\gamma$, выражая из (5) производные коэффициентов формы A. Если мы введем тензор C, заданный в координатах формулой

$$C_{\alpha\beta} = \partial_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}B_\alpha B_\beta,$$

то условие интегрируемости записывается так:

$$C_{\alpha\beta}A_\gamma + C_{\alpha\gamma}A_\beta = C_{\beta\alpha}A_\gamma + C_{\beta\gamma}A_\alpha. \tag{6}$$

Если мы применим к уравнению (6) транспозицию индексов $\beta \leftrightarrow \gamma$, то получим

$$C_{\alpha\beta}A_\gamma + C_{\alpha\gamma}A_\beta = C_{\gamma\alpha}A_\beta + C_{\gamma\beta}A_\alpha.$$

Прибавим к этому уравнению уравнение (6). Сумму можно записать следующим образом:
$$(C_{\beta\gamma}+C_{\gamma\beta})A_\alpha=(2C_{\alpha\gamma}-C_{\gamma\alpha})A_\beta+(2C_{\alpha\beta}-C_{\beta\alpha})A_\gamma. \tag{7}$$

Положим $\beta=\gamma$ в уравнении (6). Получим, что
$$(2C_{\alpha\beta}-C_{\beta\alpha})A_\beta=C_{\beta\beta}A_\alpha, \tag{8}$$
или, заменяя β на γ,
$$(2C_{\alpha\gamma}-C_{\gamma\alpha})A_\gamma=C_{\gamma\gamma}A_\alpha. \tag{9}$$
Заменим $2C_{\alpha\beta}-C_{\beta\alpha}$ и $2C_{\alpha\gamma}-C_{\gamma\alpha}$ в (7) выражениями для них, полученными из (8) и (9) соответственно. Тогда
$$C_{\beta\gamma}+C_{\gamma\beta}=C_{\beta\beta}A_\alpha(A_\beta^{-1}A_\gamma)A_\alpha^{-1}+C_{\gamma\gamma}A_\alpha(A_\gamma^{-1}A_\beta)A_\alpha^{-1}. \tag{10}$$

Возьмем точку из U. В уравнении (10), записанном в этой точке, α, β и γ могут быть произвольными векторами. Зафиксируем β и γ и будем менять α. Тогда A_α пробегает все кватернионы, поскольку f является диффеоморфизмом. Нам нужна следующая

Лемма 3. *Пусть a и b — произвольные кватернионы, а x — мнимый кватернион (т.е. кватернион, не являющийся вещественным числом). Предположим, что число $ay+by^{-1}$ одно и то же для всех кватернионов y, полученных из x внутренними сопряжениями (т.е. $y=qxq^{-1}$ для некоторого ненулевого кватерниона q). Тогда $b=a|x|^2$.*

Доказательство. Обозначим через x_0 вещественную часть кватерниона x. Нетрудно видеть, что
$$ay+by^{-1}=\left(a-\frac{b}{|x|^2}\right)y+\frac{2bx_0}{|x|^2}\,.$$
Второй член в правой части не зависит от y. Следовательно, первый член тоже не должен зависеть от y, а это возможно, только если коэффициент $a-b/|x|^2$ обращается в нуль. □

Мы можем применить эту лемму к уравнению (10), в котором положим $a=C_{\beta\beta}$, $b=C_{\gamma\gamma}$ и $x=A_\beta^{-1}A_\gamma$. Если вектор β не параллелен вектору γ, то кватернион x мнимый (т. е. не является вещественным числом). Таким образом, согласно лемме 3,
$$\frac{C_{\beta\beta}}{|A_\beta|^2}=\frac{C_{\gamma\gamma}}{|A_\gamma|^2}\,.$$
Отсюда следует, что левая часть не зависит от β. Значит,
$$C_{\beta\beta}=C|A_\beta|^2, \tag{11}$$
где C — кватернион, не зависящий от вектора β, но, возможно, зависящий от точки и поэтому являющийся кватернионнозначной функцией на U. В дальнейшем, если в формуле встречается буква C без индексов, то имеется в виду кватернионнозначная функция C, а не тензор с компонентами $C_{\alpha\beta}$.

Подставим (11) в (10):
$$C_{\beta\gamma}+C_{\gamma\beta}=C(\overline{A_\beta}A_\gamma+\overline{A_\gamma}A_\beta).$$

Сравнивая это уравнение (в котором β заменен на α, а γ — на β) с (8), заключаем, что

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} C(\overline{A_\alpha} A_\beta + \overline{A_\beta} A_\alpha + A_\alpha \overline{A_\beta}). \tag{12}$$

Это *первое условие интегрируемости.*

§ 4. Примеры

Посмотрим внимательнее на примеры 1 и 2 из § 1. В частности, найдем функцию C для этих примеров.

Пример 2 (продолжение примера 2 из § 1). Рассмотрим левое расслоение Хопфа $\pi\colon \mathbb{RP}^7 \to S^4 = \mathbb{HP}^1$. Напомним, что в выбранных выше координатах оно задается формулой $\pi(q_0, q_1) = q_1^{-1} q_0$, в которой пара кватернионов (q_0, q_1) задает 8 однородных координат в проективном пространстве $\mathbb{RP}^7$.

Предположим, что отображение f получено как композиция расслоения π с некоторым проективным вложением части пространства $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{RP}^7$. Это проективное вложение отправляет точку $x \in \mathbb{R}^4$ в точку пространства $\mathbb{RP}^7$ с координатами

$$q_0 = L(x), \qquad q_1 = M(x),$$

где L и M — некоторые аффинные отображения из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$. Таким образом, в данных координатах отображение f выглядит так:

$$f\colon x \mapsto L(x)^{-1} M(x), \tag{13}$$

где умножение и взятие обратного понимаются в смысле кватернионов.

Обозначим через $\overrightarrow{L}$ и $\overrightarrow{M}$ линейные части отображений L и M соответственно. Это значит, что $\overrightarrow{L}$ (соответственно $\overrightarrow{M}$) — линейный оператор, такой, что L (соответственно M) является композицией оператора $\overrightarrow{L}$ (соответственно $\overrightarrow{M}$) с параллельным переносом. Другими словами, $\overrightarrow{L}$ и $\overrightarrow{M}$ — дифференциалы отображений L и M в любой точке.

Подсчитаем $A_\alpha = \partial_\alpha f$ для нашего отображения f:

$$A_\alpha(x) = -L^{-1}(x)\,\overrightarrow{L}(\alpha) L^{-1}(x) M(x) + L^{-1}(x) \overrightarrow{M}(\alpha).$$

Дифференцируя еще раз вдоль α, мы получаем

$$B_\alpha = -2L^{-1}(x)\,\overrightarrow{L}(\alpha).$$

Отсюда видно, что $\partial_\alpha B_\beta = \frac{1}{2} B_\alpha B_\beta$; поэтому в данном случае $C = 0$.

Случай $C = 0$. Разберем случай, когда C всюду обращается в 0 на U. В этом случае первое условие интегрируемости (12) записывается так:

$$\partial_\alpha B_\beta = \frac{1}{2} B_\alpha B_\beta.$$

Рассмотрим это уравнение вместе с уравнением (5). Это система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, выражающая все производные форм A и B через значения этих форм. Другими словами, это система Пфаффа. Обозначим ее через $\mathbb{S}$. Зафиксируем любую точку $x \in U$ и начальные значения 1-форм A и B в точке x. Таким образом, для всякого вектора α в точке x мы знаем A_α и B_α. Заметим, что если решение системы $\mathbb{S}$ с данными начальными значениями существует, то оно единственно. Это следует из теоремы единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений (для доказательства единственности достаточно ограничить систему $\mathbb{S}$ на произвольную кривую в U).

Существование решения вытекает из примера 1. В этом примере в данной точке x линейные отображения $A\colon \alpha \mapsto A_\alpha$ и $B\colon \alpha \mapsto B_\alpha$ могут быть произвольными.

Мы только что доказали следующее

Предложение 4. *Если $C = 0$ тождественно на U, то общее решение уравнений* (5) *и* (12) *дается формулой* (13).

Пример 1 (продолжение примера 1 из §1). Рассмотрим евклидову сферу S в $\mathbb{R}^5$ с центром в 0 и радиусом 1. Введем конформную систему координат на S при помощи стереографической проекции j на экваториальную гиперплоскость с центром в северном полюсе. Имеется ортогональное разложение $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$, в котором первый член — экваториальная гиперплоскость, а второй член — прямая между северным и южным полюсами. Таким образом, всякая точка из $\mathbb{R}^5$ представлена парой (y, z), в которой $y \in \mathbb{R}^4$ и $z \in \mathbb{R}$. Точка на сфере S, соответствующая точке $y \in \mathbb{R}^4$ при стереографической проекции, выражается формулой

$$j^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1 + |y|^2}, \frac{|y|^2 - 1}{1 + |y|^2}\right).$$

Предположим, что f — центральная проекция горизонтальной гиперплоскости $\{x_5 = z_1\}$ на S с центром в точке $(0, z_0)$. При этой проекции точка (x, z_1) соответствует точке $j^{-1}(y)$ на S тогда и только тогда, когда

$$x = \frac{2y(z_0 - z_1)}{(z_0 + 1) + (z_0 - 1)|y|^2}\,.$$

Теперь мы можем перемасштабировать y и выбрать специальные значения z_0 и z_1 так, что

$$x = \frac{y}{1 + |y|^2}\,. \tag{14}$$

Это неявное уравнение, определяющее отображение $f\colon x \mapsto y$. Напомним, что отображение f было определено как классическая проекция. Другая интерпретация: f устанавливает соответствие между моделями Клейна и Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Умножив обе части уравнения (14) на общий знаменатель, получим $y = (1 + |y|^2)x$, а затем продифференцируем обе части вдоль α:

$$A_\alpha = \frac{2\langle y, A_\alpha\rangle y}{1 + |y|^2} + (1 + |y|^2)\alpha. \tag{15}$$

Здесь $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ обозначает евклидово (не гиперэрмитово) скалярное произведение, соответствующее данной кватернионной структуре. Конкретно, для двух векторов ξ и η имеем $\langle\xi, \eta\rangle = \mathrm{Re}(\xi\overline{\eta})$, где в правой части ξ и η рассматриваются как кватернионы.

Для того чтобы выразить A_α только через y, нам нужно найти выражение для $\langle y, A_\alpha\rangle$. Для этого скалярно умножим обе части уравнения (15) на y. Это приводит к линейному уравнению на $\langle y, A_\alpha\rangle$. Решая это уравнение, мы получим

$$\langle y, A_\alpha\rangle = \frac{(1+|y|^2)^2}{1-|y|^2}\,\langle y,\alpha\rangle. \tag{16}$$

Подставим (16) в (15). Теперь у нас есть формула для A_α в терминах y:

$$A_\alpha = (1+|y|^2)\left(\frac{2\langle y,\alpha\rangle y}{1-|y|^2}+\alpha\right). \tag{17}$$

Дифференцируя уравнение (17) вдоль α, мы видим, что

$$B_\alpha = 2\left(2\,\frac{1+|y|^2}{1-|y|^2}\,\langle y,\alpha\rangle + \frac{y\overline{A_\alpha}}{1-|y|^2}\right).$$

Еще раз продифференцируем это уравнение вдоль α:

$$\partial_\alpha B_\alpha - \frac{1}{2}B_\alpha^2 = \frac{6|A_\alpha|^2}{(1-|y|^2)^2}\,.$$

Из уравнения (11) следует, что в этом примере

$$C = \frac{6}{(1-|y|^2)^2}\,.$$

В частности, C может быть ненулевым. Заметим, что в данном примере C всюду вещественно.

§5. Второе условие интегрируемости

Случай $C=0$ уже был разобран в предыдущем параграфе. Теперь предположим, что $C\neq 0$ в данной точке. Априори C — кватернионнозначная функция. Однако имеет место

Лемма 5. *Функция C вещественнозначна.*

Эта лемма не следует из уравнения (2). Нам нужно напрямую использовать тот факт, что f переводит прямые в окружности.

Доказательство леммы 5. Возьмем произвольную точку $x_0\in U$ и вектор α в x_0. Прямая l, проходящая через x_0 в направлении α, переходит в некоторую окружность при отображении f. Пусть $t\mapsto x=x(t)$ — аффинная параметризация прямой l, такая, что $x(0)=x_0$ и $\dot x(0)=\alpha$.

Сначала предположим, что B_α вещественна в точке x_0. Тогда кривая $f(l)$ должна быть прямой. Следовательно, форма $\mathrm{Im}(B_\alpha)$ (мнимая часть формы B_α) должна обращаться в нуль тождественно на l. Отсюда следует, что функция C в этом случае тоже вещественна.

Теперь предположим, что $\mathrm{Im}(B_\alpha)\neq 0$. Согласно предложению 5.4 из [5], центр окружности $f(l)$ находится в точке

$$f(x) - (\mathrm{Im}\,B_\alpha(x))^{-1}A_\alpha(x).$$

Следовательно, это выражение не зависит от выбора точки $x\in l$. Продифференцируем его по t:

$$A_\alpha + (\mathrm{Im}\,B_\alpha)^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(B_\alpha^2)+\mathrm{Im}(C)|A_\alpha|^2\right)(\mathrm{Im}\,B_\alpha)^{-1}A_\alpha - (\mathrm{Im}\,B_\alpha)^{-1}B_\alpha A_\alpha = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Im}(C)=0$. □

Первое условие интегрируемости — дифференциальное уравнение с частными производными на B. Попробуем выписать условие интегрируемости для этого уравнения.

Воспользуемся языком кватернионнозначных дифференциальных форм. По определению алгебра кватернионнозначных дифференциальных форм получается из алгебры обычных дифференциальных форм тензорным умножением на кватернионы над полем вещественных чисел. В частности, это определение говорит, как перемножать кватернионные формы. Как мы уже говорили, A и B можно рассматривать как кватернионные 1-формы.

Из первого условия интегрируемости вытекает, что

$$dB = \frac{1}{2}B \wedge B + \frac{1}{3}C(A \wedge \overline{A}). \tag{18}$$

Возьмем дифференциалы от обеих частей этого уравнения, используя соотношения $d^2B = 0$ и $dA = 0$:

$$dC \wedge A \wedge \overline{A} = \frac{C}{2}(B \wedge A \wedge \overline{A} - A \wedge \overline{A} \wedge B). \tag{19}$$

Предложение 6. *Предположим, что значения* 1*-форм A и B и функции C даны в некоторой точке и что линейное отображение $\alpha \mapsto A_\alpha$ взаимно однозначно в этой точке. Если решение f уравнений* (5) (*в которых $A_\alpha = \partial_\alpha f$*) *с этими начальными значениями существует, то оно единственно.*

Доказательство. Рассмотрим оператор правого внешнего умножения на кватернионную 2-форму $A \wedge \overline{A}$, отображающий кватернионные 1-формы в кватернионные 3-формы. Напомним, что внешнее умножение кватернионных форм понимается как умножение в тензорном произведении алгебры вещественнозначных дифференциальных форм на алгебру кватернионов. Поскольку отображение $\alpha \mapsto A_\alpha$ обратимо в начальной точке, оператор правого внешнего умножения на $A \wedge \overline{A}$ обратим в этой точке (т. е. всякую кватернионную 3-форму можно однозначно разделить справа на 2-форму $A \wedge \overline{A}$). Это можно проверить простым (но технически громоздким) непосредственным вычислением. В частности, 1-форма dC однозначно восстанавливается по 3-форме $dC \wedge A \wedge \overline{A}$.

Таким образом, уравнение (19) выражает все первые производные функции C через A и B. Рассмотрим это уравнение вместе с уравнениями (5) и (12). Мы получаем систему дифференциальных уравнений с частными производными, выражающую все первые производные от A, B и C только через значения A, B и C. Предложение теперь вытекает из теоремы единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений (так как достаточно доказать единственность вдоль любой кривой). □

Заметим также, что A, B и C определяют 3-струю отображения f. А именно, из уравнений (5) и (12) вытекает, что

$$f(x) = f(x_0) + A_{x-x_0} + \frac{B_{x-x_0}A_{x-x_0}}{2} + \frac{(\frac{3}{2}B^2_{x-x_0} + C|A_{x-x_0}|^2)A_{x-x_0}}{6} + \cdots$$

для точки x, достаточно близкой к x_0. Многоточие обозначает члены четвертого порядка малости и выше относительно расстояния от x до x_0. В частности, предложение 6 можно переформулировать следующим образом:

Предложение 7. *Если существует диффеоморфизм $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^4 \to V \subseteq \mathbb{R}^4$ с данной 3-струей в некоторой точке $x_0 \in U$, такой, что образ каждого прямолинейного отрезка, лежащего в U, — это дуга окружности или прямолинейный отрезок в V, то такой диффеоморфизм только один.*

§ 6. Допустимые 3-струи

Мы выяснили, что для описания всех гладких отображений $f\colon U \to V$, переводящих прямые в окружности, достаточно изучить все возможные 3-струи отображения f в некоторой выделенной точке $x_0 \in U$. Это задача из линейной алгебры, которую мы решим в настоящем параграфе.

Начиная с этого места, мы отождествляем пространство прообраза с пространством образа и предполагаем, что выделенная точка — начало координат, что $f(0) = 0$ и что $A_\alpha(0) = \alpha$ для всех векторов α в 0. Этого можно добиться линейной заменой переменных в прообразе вместе с параллельным переносом в образе. Таким образом, если $x = x^0 + ix^1 + jx^2 + kx^3$ — конформная кватернионная координата, то $A(0) = dx = dx^0 + idx^1 + jdx^2 + kdx^3$.

Уравнение (19) налагает ограничение на B благодаря тому факту, что функция C вещественна. Найдем все допустимые значения формы B в 0, решая (19) как линейную систему на B и dC/C. Имеем $A \wedge \overline{A} = dx \wedge \overline{dx} = i\omega_1 + j\omega_2 + k\omega_3$, где ω_1, ω_2 и ω_3 — вещественные 2-формы, заданные в координатах формулами

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= 2(dx^1 \wedge dx^0 + dx^3 \wedge dx^2),\\
\omega_2 &= 2(dx^2 \wedge dx^0 + dx^1 \wedge dx^3),\\
\omega_3 &= 2(dx^3 \wedge dx^0 + dx^2 \wedge dx^1).
\end{aligned}
$$

Обозначим через γ вещественную 1-форму $2dC/C$ и предположим, что $B = B^0 + iB^1 + jB^2 + kB^3$, где B^0, B^1, B^2 и B^3 — вещественные 1-формы. Уравнение (19) теперь можно переписать в виде следующей системы:

$$
\begin{aligned}
2(B^2 \wedge \omega_3 - B^3 \wedge \omega_2) &= \gamma \wedge \omega_1,\\
2(B^3 \wedge \omega_1 - B^1 \wedge \omega_3) &= \gamma \wedge \omega_2,\\
2(B^1 \wedge \omega_2 - B^2 \wedge \omega_1) &= \gamma \wedge \omega_3.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Обозначим через B^μ_ν и γ_ν $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ компоненты 1-форм B^μ и γ, так что

$$
B^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} B^\mu_\nu \, dx^\nu, \qquad \gamma = \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_\nu \, dx^\nu.
$$

Система (20) приводит к следующим уравнениям:

$$
\begin{gathered}
2(-B^2_3 + B^3_2) = -\gamma_1, \quad 2(-B^2_2 - B^3_3) = \gamma_0, \quad 2(B^2_1 - B^3_0) = -\gamma_3, \quad 2(B^2_0 + B^3_1) = \gamma_2,\\
2(-B^3_1 + B^1_3) = -\gamma_2, \quad 2(B^3_0 + B^1_2) = \gamma_3, \quad 2(-B^3_3 - B^1_1) = \gamma_0, \quad 2(B^3_2 - B^1_0) = -\gamma_1,\\
2(-B^1_2 + B^2_1) = -\gamma_3, \quad 2(B^1_3 - B^2_0) = -\gamma_2, \quad 2(B^1_0 + B^2_3) = \gamma_1, \quad 2(-B^1_1 - B^2_2) = \gamma_0.
\end{gathered}
$$

Исключим γ_ν из этих уравнений:

$$
B^1_1 = B^2_2 = B^3_3, \quad B^1_0 = B^2_3 = -B^3_2, \quad B^2_0 = B^3_1 = -B^1_3, \quad B^3_0 = B^1_2 = -B^2_1.
$$

Соотношения, приведенные выше, означают, что $B_\alpha = p(\alpha) + \alpha q$, где p — некоторая вещественнозначная 1-форма, а q — кватернион. Следовательно, 3-струя отображения f в 0 должна выглядеть так:

$$x + \frac{(p(x)+xq)x}{2} + \frac{(\frac{3}{2}(p(x)+xq)^2 + C|x|^2)x}{6}. \tag{21}$$

Предложение 8. *Для всякой вещественнозначной линейной функции p на $\mathbb{R}^4$ и произвольного кватерниона q существует локальный диффеоморфизм с 3-струей* (21). *Более того, его можно выбрать среди классических проекций.*

Доказательство. Сначала рассмотрим отображение, заданное неявным уравнением

$$x = \frac{y}{1 - \frac{C}{6}|y|^2}.$$

Ясно, что это отображение из примера 2. Его 3-струя равна $x + \frac{C}{6}|x|^2 x$. Это частный случай выражения (21), в котором $p = q = 0$. Чтобы реализовать остальные значения p и q, возьмем композицию рассмотренного отображения со следующим преобразованием Мёбиуса:

$$y \mapsto 2q^{-1}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}qy}{1 - \frac{1}{2}p(y)}\right)^{-1} - 2q^{-1}.$$

Легко видеть, что эта композиция имеет 3-струю (21). □

Заключительные замечания. Нам теперь нужно свести концы с концами в доказательстве теоремы 1. Мы всегда предполагали, что $\partial_\alpha A_\alpha = B_\alpha A_\alpha$ — умножение на B_α происходит слева. Случай правого умножения рассматривается аналогично. Единственная разница в том, что для $C = 0$ возникает правое кватернионное расслоение Хопфа вместо левого.

Если $C = 0$ тождественно на U, то, согласно предложению 4, мы имеем кватернионное расслоение Хопфа. В противном случае C нигде не обращается в 0 на некотором открытом подмножестве в U. Тогда, согласно предложениям 7 и 8, отображение f является классической проекцией на этом подмножестве. Отсюда вытекает, что f является классической проекцией на всей области определения, поскольку классическую проекцию нельзя гладко склеить с отображением, приходящим из расслоения Хопфа.

Литература

1. *Lam K. Y.* Some new results in composition of quadratic forms. Invent. Math., **79**, 467–474 (1985).
2. *Хованский Г. С.* Основы номографии. Наука, М., 1976.
3. *Хованский А. Г.* Выпрямление окружностей. Сиб. матем. ж., **21**, 221–226 (1980).
4. *Izadi F. A.* Rectification of circles, spheres, and classical geometries. PhD thesis, University of Toronto, 2001.
5. *Timorin V. A.* Rectification of circles and quaternions. Michigan Math. J., **51**, No. 1, 153–167 (2003).

Независимый московский университет
Institute for Mathematical Sciences,
State University of New York at Stony Brook
e-mail: timorin@math.sunysb.edu

Поступило в редакцию
21 декабря 2004 г.