

Самообучающаяся модель краткосрочного прогнозирования социально-экономической динамики

Задачу прогнозирования различных социально-экономических процессов решает практически каждый экономист, вне зависимости от области его исследования: точные прогнозы нужны всем, начиная от уровня предприятий (например, прогноз рыночной конъюнктуры) и заканчивая государственным уровнем (например, прогноз темпов инфляции). Все существующие методы прогнозирования можно классифицировать по типу исследуемого процесса, которые могут быть следующими:

1. Обратимые процессы;
 - 1.1. Стационарные;
 - 1.2. Нестационарные;
2. Необратимые процессы:
 - 2.1. Эволюционные;
 - 2.2. Хаотические.

Обратимый процесс характеризуется постоянством некоторых статистических характеристик, сохраняющихся вне зависимости от времени наблюдения. Например, если процесс описывается экспоненциальной функцией, то он описывается ею же вне зависимости от наблюдения, на котором он рассматривается: то есть меняется время наблюдения, уровень ряда, но не коэффициенты и тип описывающей функции. Такие процессы прогнозируются с помощью моделей теории вероятности и математической статистики. У них ошибка аппроксимации чаще всего распределена в соответствии с нормальным законом распределения, легко находится математическое ожидание (описываемое какой-то функцией) и дисперсия [1, с.33]. Такие процессы в экономике очень хорошо описываются и прогнозируются с использованием эконометрических методов. К ним можно отнести, например, процесс выпуска продукции на уровне предприятия в условиях стабильной экономико-политической системы [2, с.17] — в таком случае на результат влияет не так много факторов, наиболее важные из которых стационарны, и их можно учесть в модели.

Во втором случае тенденции процесса либо меняются во времени (процесс носит эволюционный характер), либо просто отсутствуют (хаотический характер). Такие процессы описать и прогнозировать крайне сложно, и наилучший результат для процессов с изменяющейся тенденцией дают адаптивные модели: например, модель Брауна, модель

Хольта, метод стохастической аппроксимации и тому подобное. Необратимыми является большая часть происходящих в экономике процессов, начиная от динамики курсов валют на рынке Форекс, заканчивая динамикой ВВП. На такие процессы влияет большое число факторов, учесть которые просто не представляется возможным. Влияние части из них с течением времени усиливается и прогнозируемая социально-экономическая система меняет свои свойства качественно, а не только количественно, адаптируясь к этому внешнему влиянию. В таком случае и построенная модель должна так или иначе корректироваться в зависимости от поступающей информации, то есть быть адаптивной.

Характерной чертой необратимых процессов является то, что увеличение числа наблюдений не улучшает характеристики модели. В случае, например, с ВВП России, если построить модель за 2000 — 2008 года, то результат прогноза по ней будет лучше, чем, если строить её по большему ряду данных (например, за 1990 — 2008 года). То есть увеличение числа наблюдений в данном случае только ухудшит прогнозные и аналитические свойства модели.

Очень часто перед исследователем стоит задача прогнозирования на краткосрочную перспективу. Одним из самых популярных адаптивных методов краткосрочного прогнозирования необратимых процессов является метод Брауна (также известный как «метод экспоненциального сглаживания»). Идея метода заключается в том, что прогнозное значение определяется через предыдущее спрогнозированное значение, но скорректированное на величину отклонения факта от прогноза:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha(Y_t - \hat{Y}_t). \quad (1)$$

Достаточно часто эту модель представляют в другом виде:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\hat{Y}_t. \quad (2)$$

Однако смысл модели от этого не меняется: она в той или иной степени (в зависимости от значения коэффициента α) адаптируется к новой поступающей информации.

Вообще же модель Брауна может применяться в двух случаях:

1. Когда нужно сгладить имеющийся ряд данных для выявления какой-либо тенденции (обычно в случае со стационарными процессами). Тогда обычно исследователь задаёт значение α в пределах от 0 до 1 [3, p.97].
2. Когда нужно сделать краткосрочный прогноз. В таком случае наилучший результат прогноза получается при задании α в пределах от 0 до 2 [4, с.9].

Дать трактовку запредельному случаю метода Брауна (когда $1 < \alpha < 2$) можно путём разложения α по правилу: $\alpha = 1 + \beta$. В таком случае формула (2) может быть преобразована к виду [4, с.10]:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t + \beta(Y_t - \hat{Y}_t). \quad (3)$$

То есть в случае, когда $\alpha > 1$, модель не только полностью учитывает текущую информацию, но ещё и корректируется на величину отклонения расчётного значения от фактического. Например, на Рис. 1 представлен ряд данных по функции $y = 5 \cdot \sin t$, состоящего из 20 наблюдений ($t = 1, 2, \dots, 20$), и прогноз этого ряда с помощью метода Брауна, для которого параметр α является наилучшим на множестве $1 < \alpha < 2$ по критерию минимума квадрата отклонения фактических данных от данных по модели (оптимальное $\alpha=1,56$). Для этого процесса модель полностью повторяет исходную синусоиду и корректирует её с учётом ошибки аппроксимации, однако из Рис. 1 видно, что модель «запаздывает» на один шаг, не успевая за реальными данными.

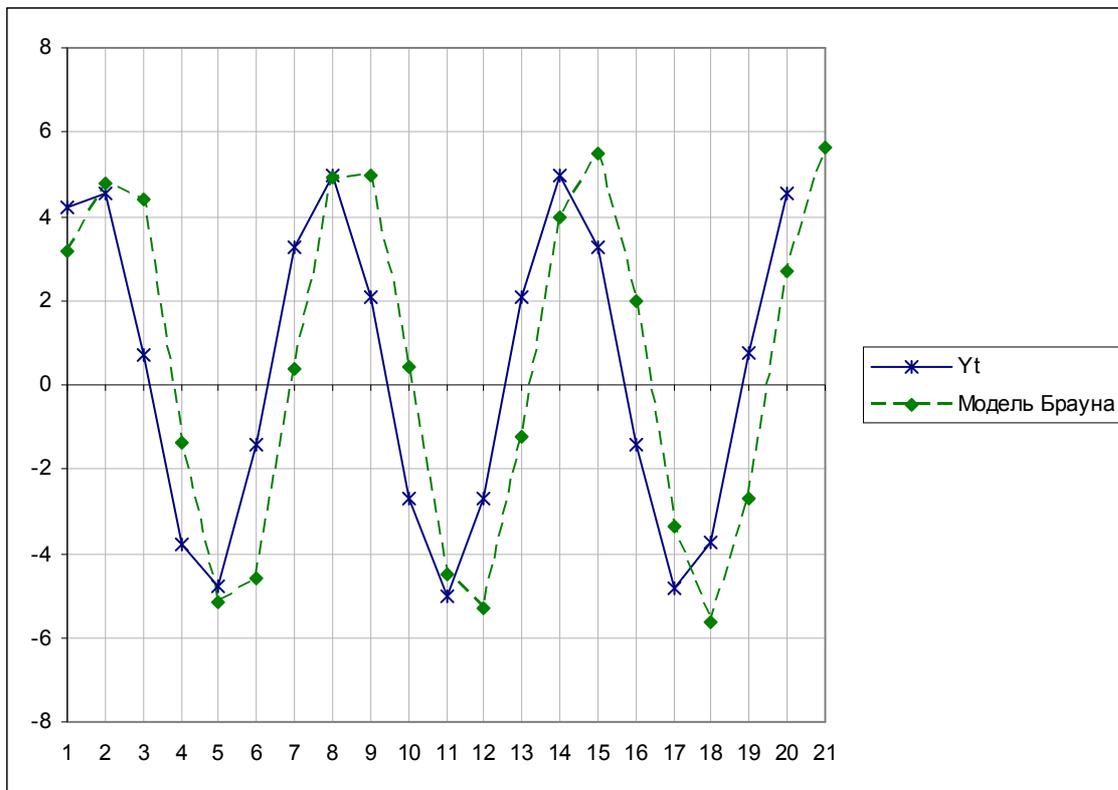


Рис. 1. Прогнозирование на условном примере с использованием метода Брауна, $\alpha = 1,56$.

Этот эффект «запаздывания» характерен для модели Брауна в целом и для решения этой проблемы были разработаны различные модификации метода Брауна, в которых предполагается априорное задание той или иной тенденции в ряде исходных данных. Например, такой моделью является аддитивная модель сезонных явлений с линейным ростом Тейла и Вейджа [5] или адаптивная модель с мультипликативной сезонностью Уинтерса [6]. Различных модификаций метода Брауна, решающих эту проблему с «запаздыванием» достаточно много (да и сам Браун в 1963 году разработал обобщённую модель, позволяющую включать в модель любые функции [7, с.76]), но у всех них есть недостатки, важнейшим из

которых является априорное задание вида тенденции: либо линейной, либо экспоненциальной, либо циклической и т.п.

На практике из всех перечисленных модификаций чаще остальных используется модель Хольта и модель Хольта-Уинтерса. Первая из них представляет собой систему уравнений с двумя постоянными сглаживания:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{t+\tau} = a_t + \tau b_t \\ a_t = \alpha_1 Y_t + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = \alpha_2 (a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2)b_{t-1} \end{cases}, \quad (4)$$

где $\hat{Y}_{t+\tau}$ - прогноз, делающийся на τ шагов вперёд, a_t - коэффициент уровня ряда, b_t - коэффициент пропорциональности, α_1, α_2 - постоянные сглаживания.

Для того чтобы получить прогноз по модели Хольта, нужно провести некоторую подготовительную работу, а именно - рассчитать значения коэффициентов a_0 и b_0 по имеющемуся ряду данных. После этого по какому-либо критерию подбираются постоянные сглаживания, в результате чего исследователь получает линейную модель, на каждом шаге адаптирующуюся к фактическим данным.

Модель Хольта-Уинтерса является развитием модели Хольта, в ней появляется сезонная составляющая, в результате чего получается система уравнений с тремя постоянными сглаживания:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{t+\tau} = (a_t + \tau b_t)c_{t-s+\tau} \\ a_t = \alpha_1 \frac{Y_t}{c_{t-s}} + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = \alpha_2 (a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2)b_{t-1} \\ c_t = \alpha_3 \frac{Y_t}{a_t} + (1 - \alpha_3)c_{t-s} \end{cases}. \quad (5)$$

Здесь $\hat{Y}_{t+\tau}$ - прогноз, делающийся на τ шагов вперёд, a_t - коэффициент уровня ряда, b_t - коэффициент пропорциональности, $c_{t-s+\tau}$ - сезонная составляющая с лагом в $s + \tau$ шагов, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - постоянные сглаживания.

Алгоритм построения модели заключается в том, что исследователь сначала рассчитывает коэффициенты a_0 и b_0 линейного тренда по какой-либо части, либо по всему ряду данных, после чего на некотором участке, состоящем из s наблюдений, рассчитываются сезонные составляющие c_t по формуле:

$$c_t = \frac{Y_t}{a_0 + b_0 t}. \quad (6)$$

В результате данных расчётов исследователь получает ряд данных по сезонным коэффициентам c_t , состоящий из s элементов, который затем используется в модели (5).

Очевидным достоинством этих моделей является то, что они позволяют учитывать тенденции в рядах исходных данных (как линейные тенденции в случае с моделью Хольта, так и некоторую цикличность в случае с моделью Хольта-Уинтерса). Однако к явным недостаткам модели можно отнести как раз то, что в основе этих моделей лежит допущение о наличии таких тенденций в рядах данных и общая идея о том, что эти тенденции не должны сильно меняться во времени. На практике это допущение редко выполняется: плавные линейные тенденции, в рядах данных сменяются резкими нелинейными, а периодичность циклической составляющей не постоянна. Из-за этого у моделей спустя некоторое время начинаются серьёзные расхождения по сравнению с реальными данными [7, с. 55]. Кроме того, большие сложности вызывает подбор постоянных сглаживания и выбор коэффициентов a_0 , b_0 и параметра c_t , так как их значения определяют прогнозные свойства модели, а никакого универсального алгоритма их задания не существует. В результате этого исследователю приходится много времени тратить на подбор значений коэффициентов, при которых прогноз получился бы более адекватным.

Стоит пару слов сказать по поводу постоянных сглаживания в моделях Хольта и Хольта-Уинтерса. Если в модели Брауна ограничение α промежутком от 0 до 2 было определено сутью модели, то в случае с модификациями модели Брауна вводимое некоторыми исследователями на постоянные сглаживания ограничение от 0 до 1 является некоторым чужеродным элементом, привнесённым в модель извне по аналогии со средневзвешенной. Однако это ограничение в итоге ограничивает саму модель и ухудшает её прогнозные свойства.

Учитывая выделенные нами недостатки модификаций метода Брауна (а ими обладают и модель Тейла-Вейджа, и обобщённая модель Брауна, и пр.), развивая логику, положенную в основе модели Брауна, когда та корректирует свои параметры с учётом ошибки, логично было бы не пытаться задать вид тенденций в ряде данных, а прогнозировать одновременно два параметра: значение \hat{Y}_t и его отклонение от фактического значения: $\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t$.

Наилучшим инструментом решения подобной задачи является аппарат теории функций комплексных переменных. Воспользовавшись идеей Савинова Г.В. [8] представим показатель и отклонение от него в виде комплексной переменной $Y_t + i\varepsilon_t$. Тогда и прогнозное значение этой комплексной переменной можно записать как: $\hat{Y}_t + i\hat{\varepsilon}_t$.

Тогда по аналогии с моделью Брауна (2) можно получить следующую модель:

$$\hat{Y}_{t+1} + i\hat{\varepsilon}_{t+1} = (\alpha_0 + i\alpha_1)(Y_t + i\varepsilon_t) + ((1+i) - (\alpha_0 + i\alpha_1))(\hat{Y}_t + i\hat{\varepsilon}_t), \quad (7)$$

здесь Y_t - фактическое значение, \hat{Y}_t - прогнозное, ε_t - фактическое значение

корректировочного показателя, $\hat{\varepsilon}_t$ - прогнозируемое значение корректировочного показателя, α_0 и α_1 - коэффициенты модели, t - номер наблюдения.

Особенности пары $Y_t + i\varepsilon_t$ позволяют расширить толкование мнимой составляющей ε_t . В самом простом случае корректировочный показатель может быть представлен как отклонение факта от прогноза (ошибка аппроксимации):

$$\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t. \quad (8)$$

Но поскольку это корректировочный показатель, то степень корректировки также может быть различной в зависимости от поставленных задач. Поэтому он может быть представлен и в более сложной форме, например:

$$\varepsilon_t = \lambda(Y_t - \hat{Y}_t), \quad (9)$$

где λ - некоторый множитель, оптимизация которого является отдельной процедурой. В ряде случаев такой способ задания корректировочного показателя способствует улучшению прогнозной точности модели. В простейшем случае этот множитель может быть представлен в виде номера наблюдения:

$$\varepsilon_t = t(Y_t - \hat{Y}_t), \quad (10)$$

В этом случае задается больший вес текущему отклонению, чем прошлому.

Вообще корректировочный показатель может быть никак и не связан с отклонением фактических значений от расчётных. Ничто не мешает исследователю задавать его какой-нибудь функцией (например, $\varepsilon_t = f(t)$) или константой ($\varepsilon_t = const$), если будет решено, что целесообразней задать его так и никак иначе. Например, этот показатель может быть представлен линейной функцией от времени вида:

$$\varepsilon_t = a + bt. \quad (11)$$

Рассмотрим в этой статье самый простой случай, когда корректировочный показатель выступает как аналог ошибки аппроксимации (8).

С учётом свойств комплексных переменных модель (7) может быть сведена к следующей системе действительных уравнений:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{t+1} = (\alpha_0 Y_t + (1 - \alpha_0) \hat{Y}_t) - (\alpha_1 \varepsilon_t + (1 - \alpha_1) \hat{\varepsilon}_t) = (\hat{Y}_t^0) - (\hat{\varepsilon}_t^1) \\ \hat{\varepsilon}_{t+1} = (\alpha_0 \varepsilon_t + (1 - \alpha_0) \hat{\varepsilon}_t) + (\alpha_1 Y_t + (1 - \alpha_1) \hat{Y}_t) = (\hat{\varepsilon}_t^0) + (\hat{Y}_t^1) \end{cases} \quad (12)$$

Из (12) видно, что прогнозируемое значение \hat{Y}_{t+1} определяется как некоторое спрогнозированное значение \hat{Y}_t^0 , найденное методом Брауна, скорректированное на некоторую также спрогнозированную методом Брауна величину $\hat{\varepsilon}_t^1$. В свою очередь прогнозируемое значение корректировочного показателя $\hat{\varepsilon}_{t+1}$ определяется также двумя

составляющими, найденными тем же самым методом Брауна, только путём их сложения: спрогнозированный корректировочный показатель $\hat{\varepsilon}_t^0$ и прогнозное значение \hat{Y}_t^1 . Здесь верхние индексы «0» и «1» указывают на то, какое значение α из двух используется при расчёте данных значений (α_0 или α_1).

Очевидно, что в модели (7) прогнозные значения формируются через предыдущие фактические с некоторыми комплексными весами, заданными по алгоритму, похожему на экспоненциальное сглаживание в методе Брауна, но несколько более сложному. Представим в формуле (7) расчётное значение $\hat{Y}_t + i\hat{\varepsilon}_t$ через предыдущее фактическое $Y_{t-1} + i\varepsilon_{t-1}$:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+1} + i\hat{\varepsilon}_{t+1} &= (\alpha_0 + i\alpha_1)(Y_t + i\varepsilon_t) + ((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))(\hat{Y}_t + i\hat{\varepsilon}_t) = \\ &= (\alpha_0 + i\alpha_1)(Y_t + i\varepsilon_t) + ((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))((\alpha_0 + i\alpha_1)(Y_{t-1} + i\varepsilon_{t-1}) + ((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))(\hat{Y}_{t-1} + i\hat{\varepsilon}_{t-1})) = \\ &= (\alpha_0 + i\alpha_1)(Y_t + i\varepsilon_t) + (\alpha_0 + i\alpha_1)((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))(Y_{t-1} + i\varepsilon_{t-1}) + ((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))^2(\hat{Y}_{t-1} + i\hat{\varepsilon}_{t-1}) \end{aligned}$$

Легко заметить, что комплексные веса в этой модели представляют собой ряд, похожий на ряд весов в модели Брауна:

$$(\alpha_0 + i\alpha_1), (\alpha_0 + i\alpha_1)((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1)), (\alpha_0 + i\alpha_1)((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))^2, \dots, \quad (13)$$

который есть ни что иное, как ряд геометрической прогрессии комплексных чисел. Если этот ряд не будет сходиться, то на текущее прогнозное значение будет большее влияние оказывать устаревшая информация, нежели новая поступающая, из-за чего модель будет давать не очень хороший прогноз. Как известно, ряд геометрической прогрессии сходится к некоторому числу, при выполнении следующего условия [9, 172]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_0 + i\alpha_1)((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))^n = 0,$$

для чего в свою очередь достаточно, чтобы выполнялось:

$$|(1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1)| < 1, \quad (14)$$

Для комплексных переменных условие (14) имеет вид:

$$\sqrt{(1 - \alpha_0)^2 + (1 - \alpha_1)^2} < 1,$$

откуда путём элементарных преобразований можно получить пределы, в которых должен лежать коэффициент α_1 для того, чтобы ряд сошёлся:

$$1 - \sqrt{1 - (1 - \alpha_0)^2} < \alpha_1 < 1 + \sqrt{1 - (1 - \alpha_0)^2}, \quad (15)$$

В свою очередь, очевидно, что условие (15) выполнимо только тогда, когда подкоренное выражение положительно (ситуацию, в которой α_1 может быть комплексным числом, мы сейчас не рассматриваем):

$$1 - (1 - \alpha_0)^2 \geq 0, \quad (16)$$

Из ограничения (16) легко выводятся пределы, в которых в таком случае должен лежать

коэффициент α_0 :

$$0 \leq \alpha_0 \leq 2. \quad (17)$$

Итак, мы получили границы, в которых должны лежать действительная и мнимая части комплексного коэффициента сглаживания для того, чтобы ряд комплексных весов (13) сходилась к некоторому числу

Однако остаётся нерешённым вопрос, к какому числу сходится ряд (13). В случае с моделью Брауна всё было интуитивно понятно: веса, представленные действительными числами, в пределе сходились к 1. В модели (7) мы сталкиваемся с комплексными весами, которые уже имеют совершенно другой смысл и не обязательно в сумме должны давать единицу (будь то действительную или комплексную). Для того чтобы понять, к какому числу ряд сходится, вычислим сумму этого ряда. По формуле геометрической прогрессии, которая актуальна не только для действительных, но и для комплексных чисел, имеем:

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_0 + i\alpha_1) \left((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1) \right)^j = \frac{\alpha_0 + i\alpha_1}{1 - \left((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1) \right)} \quad (18)$$

Формулу (18) можно преобразовать к более удобному виду, умножив числитель и знаменатель на комплексное число, сопряжённое числу в знаменателе. Получим:

$$S = \frac{\alpha_0 + i\alpha_1}{\alpha_0 - i(1 - \alpha_1)} = \frac{(\alpha_0 + i\alpha_1)(\alpha_0 + i(1 - \alpha_1))}{(\alpha_0 - i(1 - \alpha_1))(\alpha_0 + i(1 - \alpha_1))} = \frac{(\alpha_0^2 - \alpha_1 + \alpha_1^2) + i(\alpha_0)}{\alpha_0^2 + (1 - \alpha_1)^2}. \quad (19)$$

То есть ряд весов (13) сходится к комплексному числу, действительная часть которого может быть представлена любым действительным числом (как положительным, так и отрицательным), а мнимая – только любым положительным действительным числом.

В связи с тем, что мы имеем дело с комплексными постоянными сглаживания, ряд весов (13) может сходиться к комплексному числу (19) совершенно по-разному. Например, на Рис. 2 показано, как сходится сумма весов к числу $1,277 + 0,519i$ при $\alpha_0 + i\alpha_1 = 1,5 + 1,8i$. Видно, что процесс этот происходит медленно и веса принимают совершенно разные значения, в результате чего в прогнозе фактические значения временного ряда учитываются по-разному. Это интересное свойство в модели требует более детального изучения.

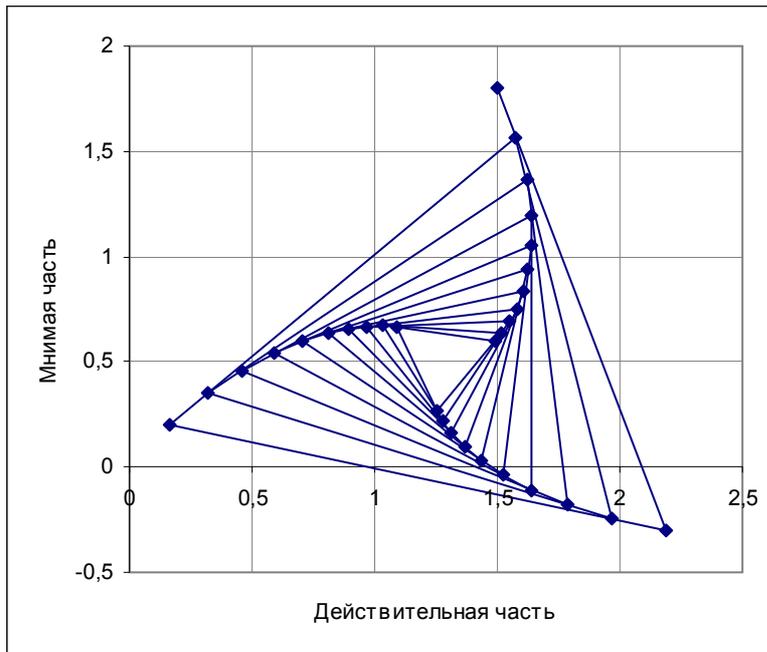


Рис. 2. Схождение ряда весов к комплексному числу.

Для практического применения модели (7) одинаково важны как то, к чему сходится ряд, так и то, насколько быстро он сходится к своему значению. Если это происходит медленно, значит, в формировании прогноза немалую роль играют устаревшие значения. Если же процесс происходит быстро, то и в модели учитываются в большей степени текущие значения. Но как оценить эту скорость схождения? Рассмотрим один из вариантов оценки этого параметра – рассчитаем величину остаточного члена v_k на каждом наблюдении k как величину отклонения k -й суммы от суммы всего ряда:

$$v_k = S - S_k = S - \sum_{j=1}^k (\alpha_0 + i\alpha_1) \left((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1) \right)^{j-1}, \quad (20)$$

Далее найдём сумму этих отклонений. Однако, учитывая то, что они могут быть как положительными, так и отрицательными, имеет смысл суммировать их модули, тем более, что нас интересует именно расстояние k -й суммы от S . Тогда наша характеристика будет рассчитываться по формуле:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left| S - \sum_{j=1}^k (\alpha_0 + i\alpha_1) \left((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1) \right)^{j-1} \right|. \quad (21)$$

При выполнении условий (15) и (17) сумма в правой части (21) будет конечна, поэтому можно найти значение, к которому она будет сходиться и это значение использовать для оценки скорости схождения ряда. Сумма первых k членов геометрической прогрессии находится по формуле:

$$S_k = \sum_{j=1}^k (\alpha_0 + i\alpha_1) \left((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1) \right)^{j-1} = (\alpha_0 + i\alpha_1) \frac{1 - \left((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1) \right)^k}{1 - \left((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1) \right)}, \quad (22)$$

Умножив дробь в (22) на сопряжённое знаменателю комплексное число и подставив полученный результат в (21), а также, подставив S из (19), после элементарных преобразований получим:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(\alpha_0 + i\alpha_1)((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))}{\alpha_0 - i(1 - \alpha_1)} ((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))^{k-1} \right|, \quad (23)$$

Умножив числитель и знаменатель дроби (23) на сопряжённое знаменателю число, и вынеся за знак суммы константу, получим:

$$v = \left| \frac{(\alpha_0^2 - \alpha_1 + \alpha_1^2 + i\alpha_0)((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))}{\alpha_0^2 + (1 - \alpha_1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} ((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))^{k-1} \right|, \quad (24)$$

В формуле (24) мы опять сталкиваемся с рядом геометрической прогрессии, который сходится при выполнении всё тех же условий (15) и (17) к следующему числу:

$$v = \left| \frac{(\alpha_0^2 - \alpha_1 + \alpha_1^2 + i\alpha_0)((1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1))}{\alpha_0^2 + (1 - \alpha_1)^2} \frac{1}{1 - |(1 - \alpha_0) + i(1 - \alpha_1)|} \right|,$$

или что равноценно действительному числу, вычисляемому по формуле:

$$v = \frac{\sqrt{(\alpha_0^2 - \alpha_1 + \alpha_1^2)^2 + \alpha_0^2} \sqrt{(1 - \alpha_0)^2 + (1 - \alpha_1)^2}}{(\alpha_0^2 + (1 - \alpha_1)^2) \left(1 - \sqrt{(1 - \alpha_0)^2 + (1 - \alpha_1)^2}\right)}. \quad (25)$$

Итак, с помощью формулы (25) можно получать своеобразную оценку того, насколько быстро ряд весов в модели (7) сходится к своему значению (19). Показатель v выступает в некотором роде показателем расстояния, пройденного от заданного значения комплексной постоянной сглаживания до величины S , к которой ряд весов (13) сходится. Чем больше число (25), тем более инертна модель (7) и тем большую роль в формировании прогноза играют устаревшие данные. Далее при изучении свойств модели (7) мы будем заодно рассчитывать характеристики (15), (17), (19) и (25) для того, чтобы можно было оценить, какими свойствами обладают выбранные нами постоянные сглаживания.

Перейдём теперь к изучению особенностей построения и использования модели с корректировкой (7) на условных и реальных примерах.

В первом примере для ряда данных, построенного по функции: $Y_t = 5 \cdot \sin(t)$ – состоящего из 20 наблюдений ($t = 1, 2, \dots, 20$), было подобрано (с помощью функции MS Excel «Поиск решения» по критерию «минимизация квадратов отклонений расчётных значений от фактических») значение комплексного коэффициента сглаживания $\alpha_0 + i\alpha_1$. Оно получилось равным $0,92 + 0,08i$, условия сходимости ряда (15) и (17) выполняются, ряд сходится к числу $S = 0,46 + 0,54i$, но при этом достаточно медленно: $v = 8,74$. При этом модель спрогнозировала ряд данных с высочайшей точностью: коэффициент детерминации R^2

составил 0,9956, средняя ошибка аппроксимации A — 3,02%, коэффициент соответствия [10] C — 97,18%. График с условными данными и полученной моделью представлен на Рис. 3.

Ранее на Рис. 1 было показано, как ведёт себя в этом случае модель Брауна, и насколько она плохо будет прогнозировать исследуемый процесс. По ней получились следующие показатели, характеризующие точность аппроксимации: $R^2 = 0,6399$, $A = 118,80\%$, $C = 65,29\%$.

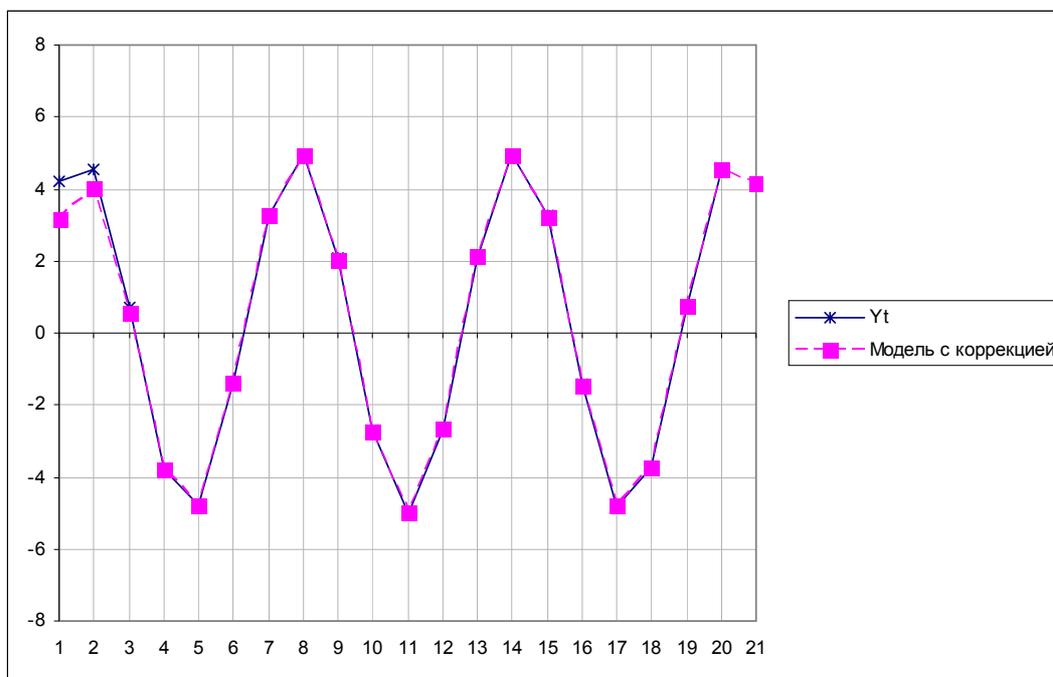


Рис. 3. Прогнозирование на условном примере с использованием метода коррекции

Увеличив число наблюдений с 20 до 100, не пересчитывая комплексный коэффициент сглаживания, мы получили всё тот же результат: расчётные значения по модели (7) практически сливаются с фактическими значениями, что демонстрирует Рис. 4.

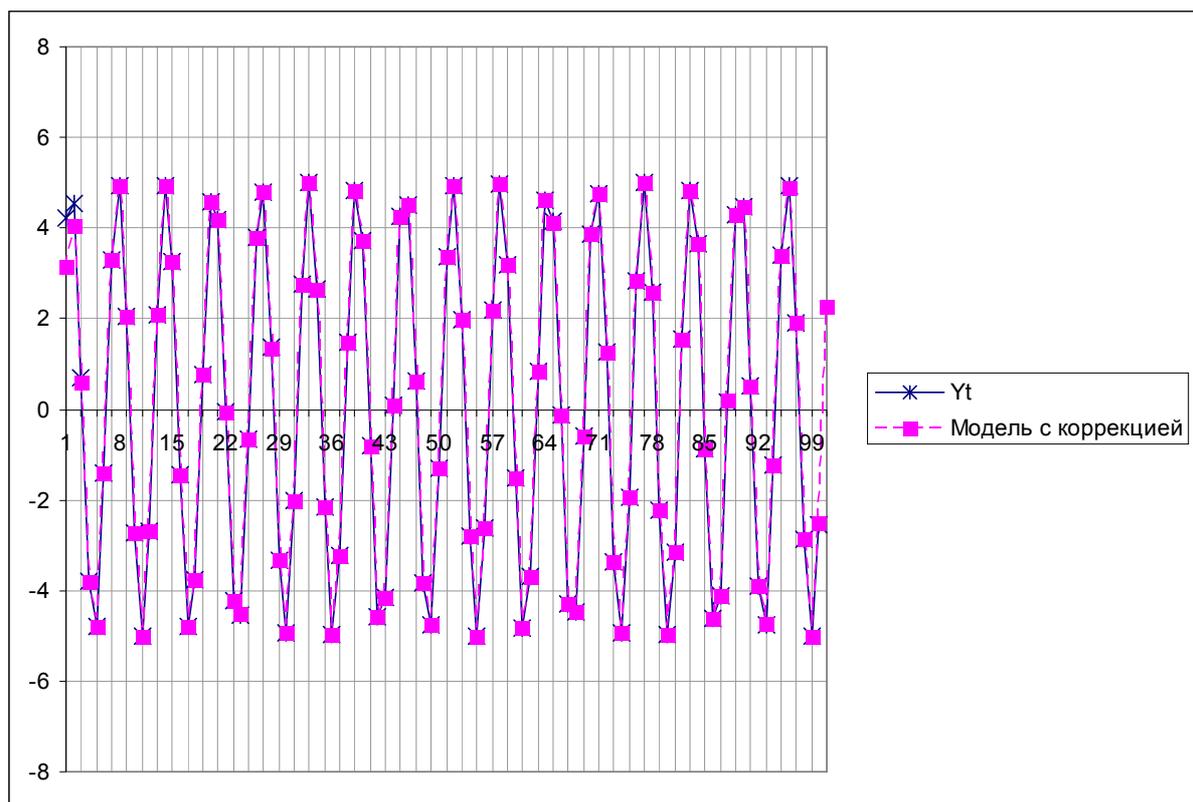


Рис. 4. Прогнозирование с использованием метода коррекции для 100 наблюдений

Стандартный метод Брауна, как уже было упомянуто выше, в лучшем случае даёт лишь результат с «запаздыванием». Стоит заметить, что в то время как в других моделях (различных модификациях метода Брауна) требуется априорное задание вида тенденции в ряде данных, модель (7) таких предположений не требует, что следует оценить как важное преимущество предложенной модели по сравнению с существующими.

Интересно взглянуть на то, как формируется значение модели по её составляющим по формуле (12) на условном примере с синусоидой (Рис. 5). В соответствии с первым равенством системы (12), результат прогноза складывается из составляющей, спрогнозированной методом Брауна \hat{Y}_t^0 (пунктирная линия на графике), такой, что α близок к 1, и спрогнозированного коэффициента коррекции (штрихпунктирная линия на графике). Причём оба они повторяют динамику исходного ряда, но с разным сдвигом, а их вычитание как раз и даёт нам практически полное повторение исходного ряда.

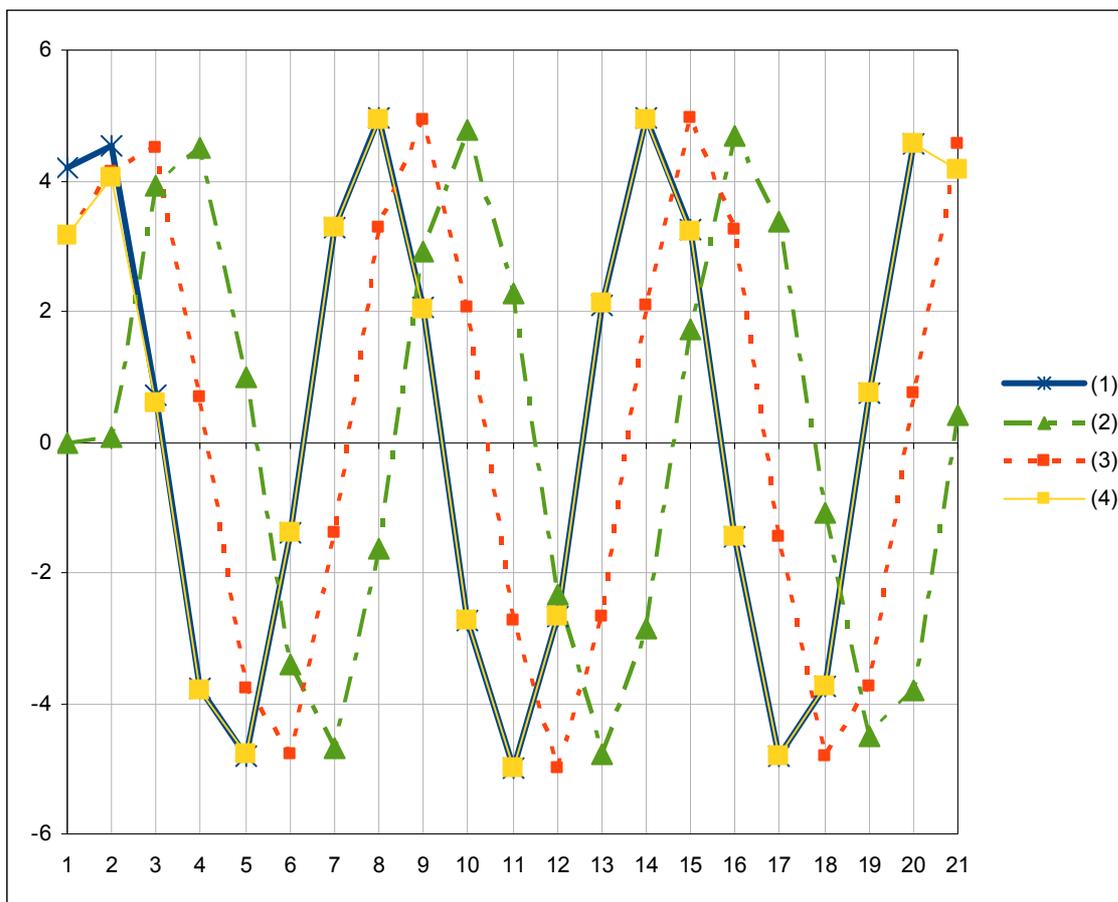


Рис. 5. Составляющие из первого равенства системы (8) для ряда, сгенерированного синусоидальной функцией, где (1) – ряд фактических данных Y_t , (2) – ряд \hat{Y}_t^0 , (3) – спрогнозированный коэффициент коррекции $\hat{\varepsilon}_t^1$, (4) – конечный прогноз \hat{Y}_t по модели (7).

В случае с экспоненциальной функцией $Y_t = 0,1e^{0,1t}$ разложение на эти составляющие представлено на Рис. 6. Из рисунка видно, что модель ведёт себя аналогично ситуации с синусоидой: фактические значения сдвигаются на 1 шаг, после чего корректируются на некоторую спрогнозированную величину и в результате прогноз совпадает с фактическими данными. Комплексный коэффициент в этом случае получился $\alpha_0 + i\alpha_1 = 1,15 + 1,13i$, условия сходимости выполняются, ряд сходится к числу $S = 1,10 + 0,85i$, причём значительно быстрее, чем ряд с синусоидой: $\nu = 0,36$. Так же, как и в случае с синусоидой, модель была построена по 20 наблюдениям, а увеличение числа наблюдений до 100 показало, что модель по-прежнему сливается с фактическими значениями.

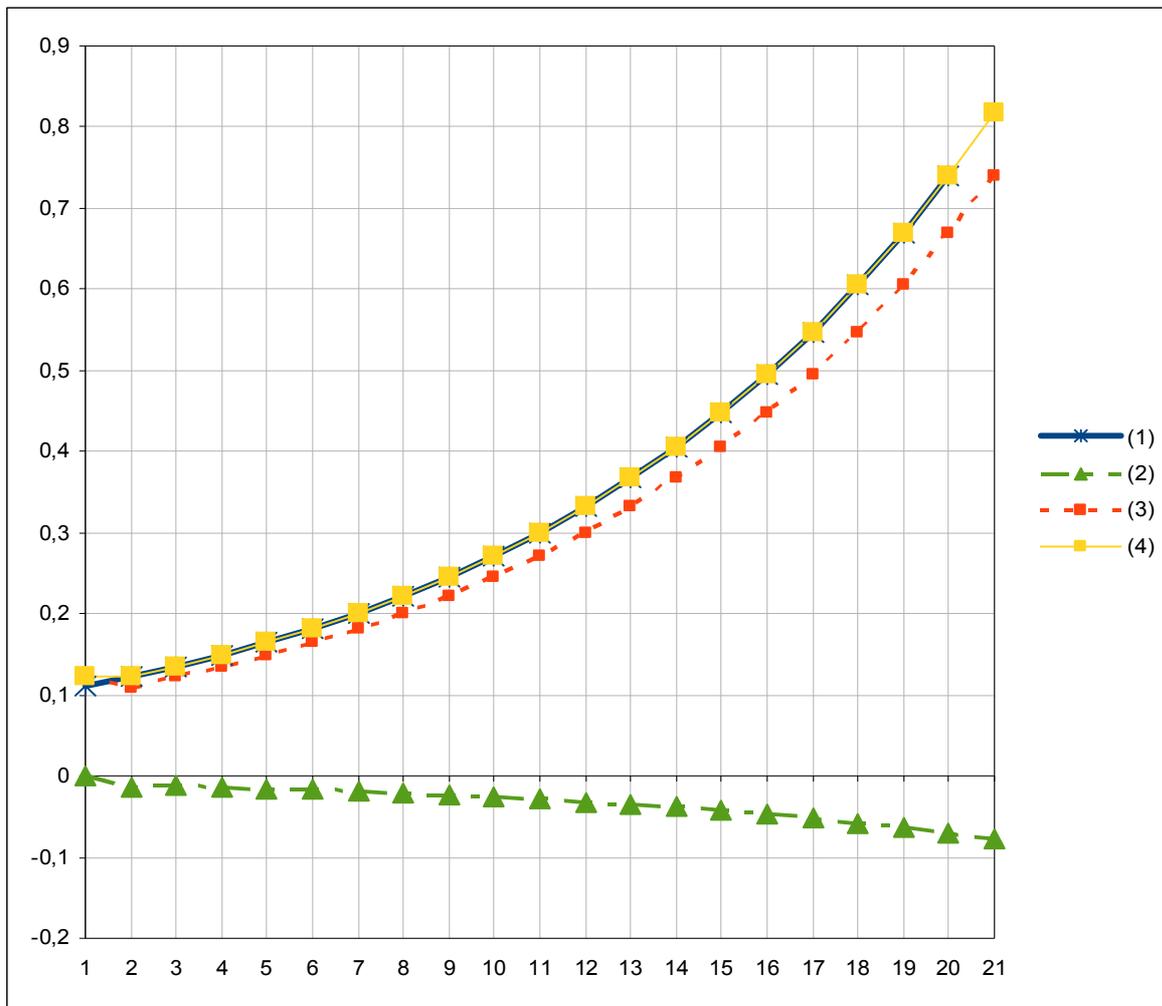


Рис. 6. Разложение прогноза экспоненты на составляющие, где (1) – ряд фактических данных Y_t , (2) – ряд \hat{Y}_t^0 , (3) – спрогнозированный коэффициент коррекции $\hat{\varepsilon}_t^1$, (4) – конечный прогноз \hat{Y}_t по модели (7).

Подобное поведение модели может быть объяснено так. Поскольку предложенная модель с корректировкой базируется на линейной функции комплексных переменных (7), то по формуле Эйлера [11, с.13] она может быть также представлена и в экспоненциальной форме:

$$\hat{R}_{t+1}e^{i\hat{\varphi}_{t+1}} = R_t e^{i\varphi_t} + \hat{R}_t e^{i\hat{\varphi}_t}, \quad (26)$$

и в тригонометрической форме:

$$\hat{Y}_{t+1} + i\hat{\varepsilon}_{t+1} = R_t \cos(\varphi_t) + \hat{R}_t \cos(\hat{\varphi}_t) + i(R_t \sin(\varphi_t) + \hat{R}_t \sin(\hat{\varphi}_t)), \quad (27)$$

где $\hat{R}_{t+1} = \sqrt{\hat{Y}_{t+1}^2 + \hat{\varepsilon}_{t+1}^2}$, $\hat{\varphi}_{t+1} = \text{Arg}(\hat{Y}_{t+1} + i\hat{\varepsilon}_{t+1})$, $R_t = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} \times \sqrt{Y_t^2 + \varepsilon_t^2}$,

$\varphi_t = \text{Arg}(\alpha_0 + i\alpha_1) + \text{Arg}(Y_t + i\varepsilon_t)$, $\hat{R}_t = \sqrt{(1-\alpha_0)^2 + (1-\alpha_1)^2} \times \sqrt{\hat{Y}_t^2 + \hat{\varepsilon}_t^2}$,

$\hat{\varphi}_t = \text{Arg}((1-\alpha_0) + i(1-\alpha_1)) + \text{Arg}(\hat{Y}_t + i\hat{\varepsilon}_t)$.

Поэтому нелинейный характер моделирования процессов, в частности - экспоненциальный и тригонометрический, - присущи самой модели (7).

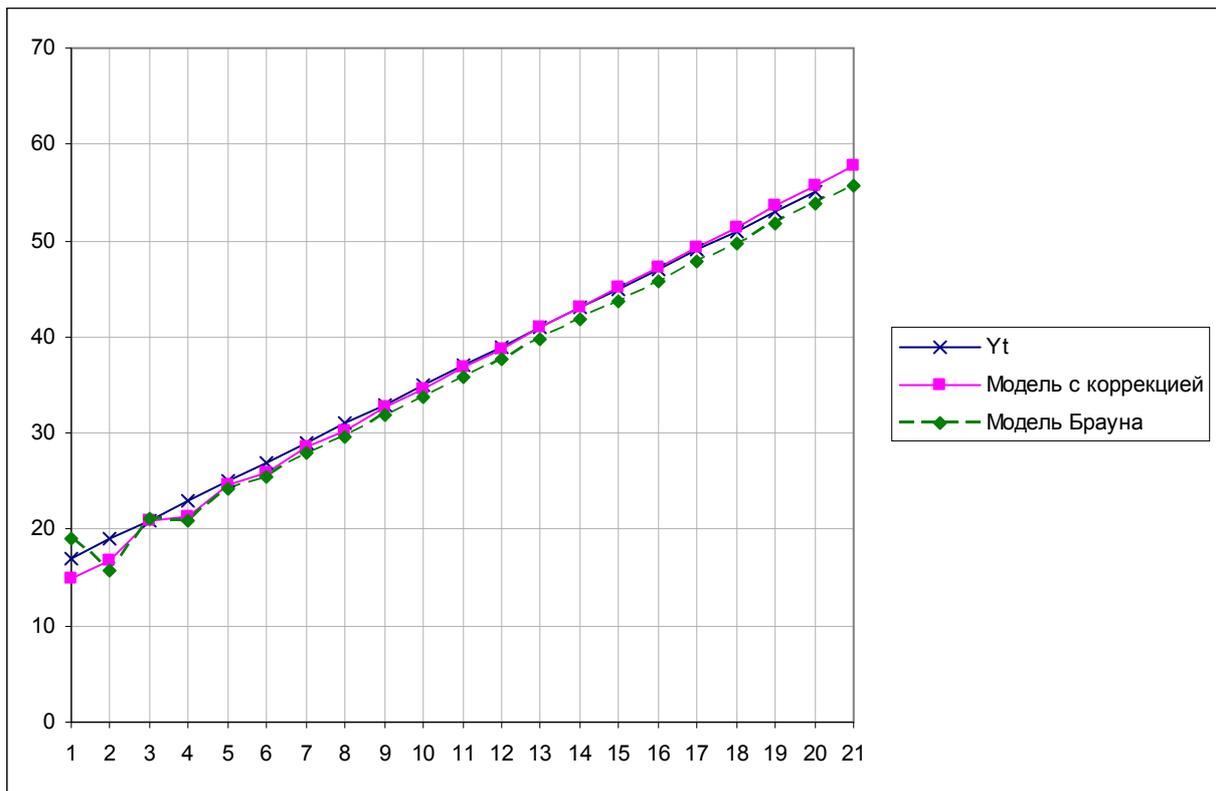


Рис. 7. Линейная функция $y = 2t + 15$ и её моделирование моделью с коррекцией (7) и моделью Брауна (1).

В случае с линейной тенденцией точного соответствия модели с корректировкой и фактических значений уже нет, тем не менее, модель с коррекцией на условном примере описала ряд данных, сгенерированных линейной функцией: $y = 2t + 15$ (Рис. 7) лучше, чем модель Брауна ($\alpha = 1,64$). Однако был найден такой оптимальный комплексный коэффициент $\alpha_0 + i\alpha_1 = 1,99 + 1,10i$, при котором ряд (13) сходится крайне медленно: $v = 66210870,71$ к числу $S = 1,03 + 0,50i$. То есть в модели (7) для прогнозирования такого условного ряда выбираются такие постоянные сглаживания, что веса распределяются во времени практически равномерно, модель как будто замедляется, перестаёт быть столь динамичной и гибкой. По модели (7) были получены следующие значения коэффициентов, характеризующих степень аппроксимации: $R^2 = 0,9965$, $A = 2,44\%$, $C = 97,62\%$, в то время как по модели Брауна: $R^2 = 0,9935$, $A = 4,44\%$, $C = 95,62\%$. Учитывая то, что в данном условном примере выполняется априорное предположение о наличии линейных тенденций в ряде данных, лучший прогноз может быть получен по одной из модификаций метода Брауна – по модели Хольта. Для неё получились следующие коэффициенты: $R^2 = 0,9974$, $A = 1,04\%$, $C = 98,98\%$.

Стоит заметить, что, если (применительно к рассматриваемому примеру) задать корректировочный показатель ε_t как линейную функцию от времени по формуле (11) и найти

наилучшие значения коэффициентов, то прогнозные свойства модели существенно улучшаются: модель достаточно быстро адаптируется к данным, после чего расчётные значения начинают практически совпадать с фактическими (что также подтверждается и соответствующими коэффициентами: $R^2 = 0,9988$, $A = 0,64\%$, $C = 99,36\%$). Эта интересная особенность демонстрирует гибкость модели с корректировкой и возможности, открывающиеся перед прогнозистом. Для нашего условного примера в этой ситуации получились следующие значения параметров: $\varepsilon_t = -1,59 + 0,05t$, $\alpha_0 + i\alpha_1 = 1,22 + 1,03i$, $S = 1,02 + 0,82i$, $\nu = 0,37$. То есть, когда мы задаём корректировочный показатель как линейную функцию от времени, оптимальный комплексный коэффициент сглаживания получается таким, что ряд комплексных весов сходится к своему значению очень быстро.

Перейдём от условных примеров, подтверждающих принципиальную возможность использования на практике модели с коррекцией и демонстрирующих её свойства, к реальным данным. В нашем распоряжении имеются данные по величине генерации электроэнергии ветровыми установками одного из штатов США. Поскольку эти данные предназначены исключительно для служебного пользования, мы, по договорённости с американской стороной, не приводим их здесь. На Рис. 8 показана часть ряда данных и значения, рассчитанные по этому ряду с использованием метода Брауна и метода коррекции.

В случае с методом Брауна α получился равен 0,28, что говорит о том, что модель медленно адаптируется к поступающей информации. Средняя относительная ошибка аппроксимации A в этом случае составила 7,54%, коэффициент детерминации $R^2 = 0,1485$, коэффициент соответствия $C = 94,22\%$. Эти показатели свидетельствуют о том, что модель не очень хорошо описывает и прогнозирует ряд ветрогенерации.

В случае с методом коррекции оптимальное значение комплексного коэффициента сглаживания равно $\alpha_0 + i\alpha_1 = 0,59 + 1,00i$, ряд сходится к $S = 1,01 + 1,78i$, $\nu = 1,59$, средняя относительная ошибка аппроксимации A составила 5,06%, коэффициент детерминации $R^2 = 0,6051$, коэффициент соответствия $C = 95,68\%$. По этим показателям, да и по графику, видно, что результаты прогноза методом коррекции получаются более точными, нежели с использованием метода Брауна.

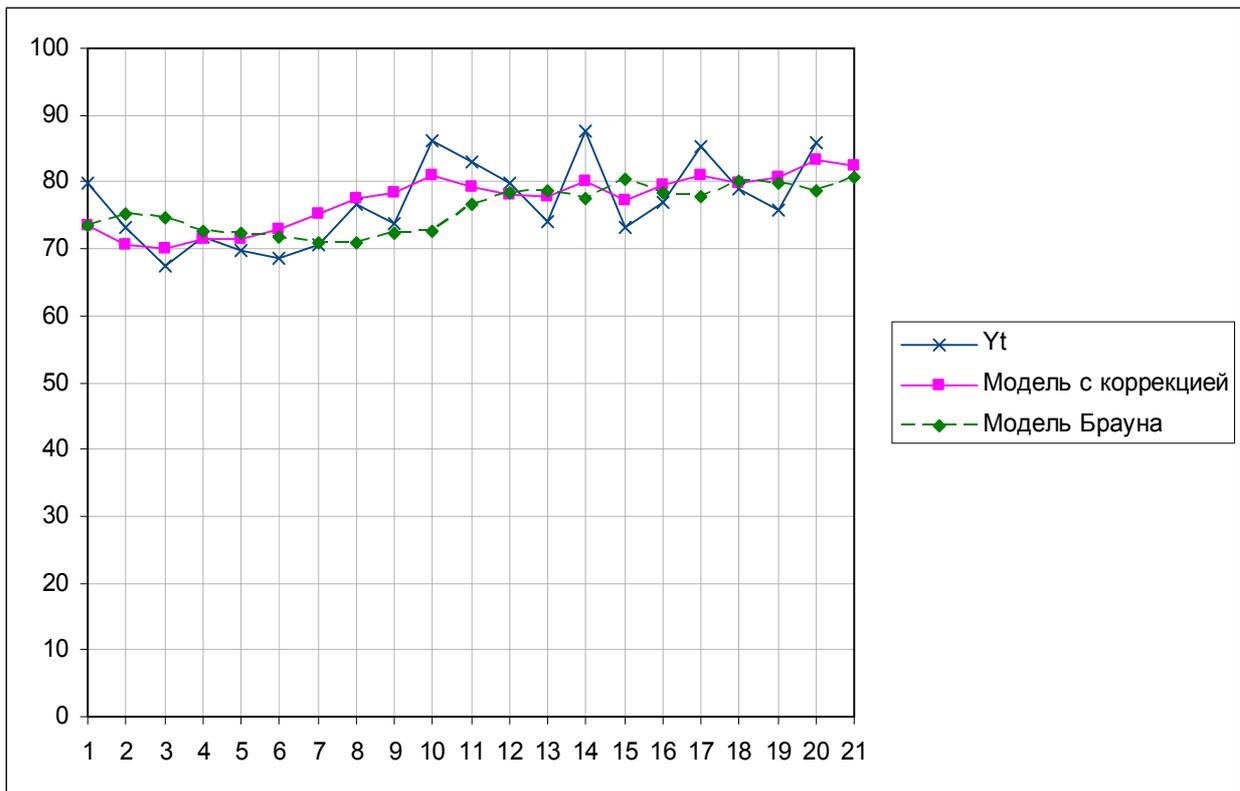


Рис. 8. Прогнозирование ветрогенерации США методом Брауна (1) и методом коррекции (7)

Мы в данной статье рассматриваем модель с корректировкой при корректировочном показателе ε_t , задаваемом самым простым способом (8). Если же в модели с коррекцией при задании корректировочного коэффициента оптимизировать не только значения $\alpha_0 + i\alpha_1$, но и значение λ для более сложного случая (9), то получим следующие оптимальные значения: $\lambda = 1,08$, $\alpha_0 + i\alpha_1 = 0,56 + 1,01i$. Адекватность модели повышается, что следует из показателей: $R^2 = 0,64$, $A = 4,85\%$, $C = 95,99\%$. То есть по всему видно, что прогнозные свойства модели в этом случае улучшаются. Оставим эту модель для дальнейших исследований и продолжим исследование свойств модели с коррекцией (7) при простом корректировочном показателе, рассматриваемом как отклонение фактических значений от расчётных.

Стоит обратить внимание на то, что модель с корректировкой отличается от всех существующих моделей краткосрочного прогнозирования тем, что улавливает тенденции в рядах данных и позволяет описывать их.

По Рис. 8 видно, что в то время как модель Брауна всё время «запаздывает», модель с корректировкой «предугадывает» динамику ряда. Если посмотреть на разложение прогноза с корректировкой на составляющие (Рис. 9), то можно заметить, что составляющая \hat{Y}_t^0 просто повторяет динамику ряда исходных данных, с некоторым сглаживанием, а уже это полученное значение модели модифицируется на величину корректировочного коэффициента

$\hat{\varepsilon}_t^1$, причём корректировка также повторяет характер динамики исходного ряда, но колеблется относительно нуля.

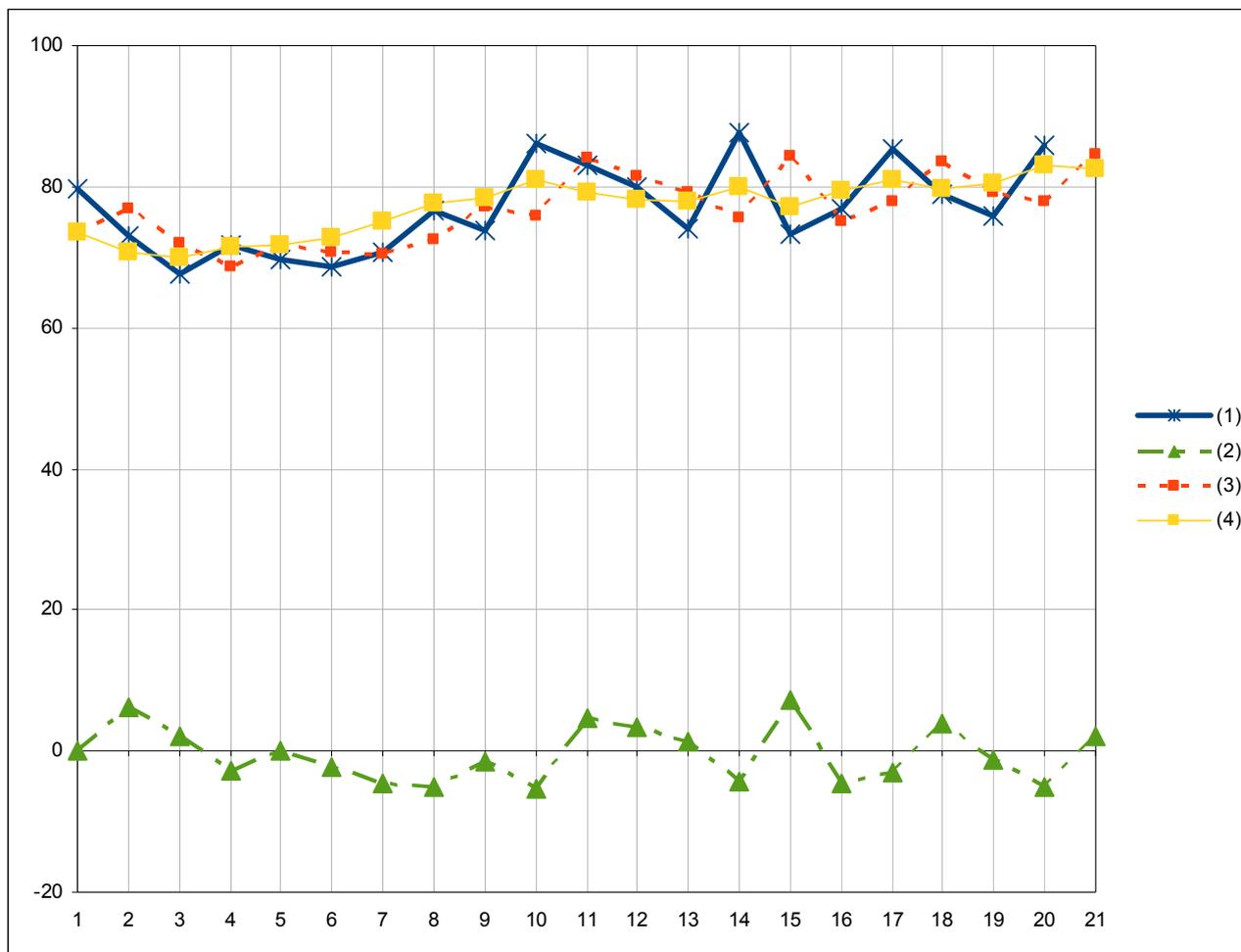


Рис. 9. Разложение модели с корректировкой на составляющие для случая

прогнозирования ветрогенерации, где (1) – ряд фактических данных Y_t , (2) – ряд \hat{Y}_t^0 , (3) – спрогнозированный коэффициент коррекции $\hat{\varepsilon}_t^1$, (4) – конечный прогноз \hat{Y}_t по модели (7).

Для более подробного изучения прогнозных свойств модели (7), проведём следующие испытания. Возьмём два ряда данных: ряд данных по курсу доллара США (рубль по отношению к доллару) с 10.10.2009 по 07.05.2010 [12] и ряд данных по мировым продажам гибридных автомобилей [13]. Эти ряды данных нам интересны, потому что их прогнозирование имеет чисто практический интерес: задача прогнозирования курса валют и задача прогнозирования продаж – ключевые, ради которых многие адаптивные методы и разрабатываются.

Выбранные ряды разобьём на несколько частей, и для каждой из них построим модель с корректировкой, модель Брауна, модель Хольта и модель Хольта-Уинтерса. После этого дадим прогнозы по каждой из моделей на одно наблюдение вперёд. Далее для того чтобы оценить полученные прогнозы, сравним их с фактическим значением на этом наблюдении,

после чего сведём все полученные результаты в единую таблицу. Дополнительно для модели с коррекцией рассчитаем выведенные нами коэффициенты S и ν по формулам (19) и (25).

Как модель с корректировкой, так и модель Брауна, и модель Хольта, и модель Хольта-Уинтерса являются рекуррентными, поэтому для них требуется задать первое расчётное значение. Для модели с корректировкой будем пользоваться одним из самых распространённых принципов – брать в качестве стартового значения среднее фактических наблюдений:

$$\hat{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}. \quad (28)$$

Для модели Брауна первое значение будем задавать по специально выведенной формуле, вытекающей из предпосылок самой модели [4, с.23]:

$$\hat{Y}_3 = \frac{\alpha Y_2 + \alpha(1 - \alpha)Y_1}{1 - (1 - \alpha)^2}.$$

Модель с корректировкой помимо этого ещё требует задать первое значение корректировочного параметра $\hat{\epsilon}_1$. Будем задавать его равным нулю.

Для модели Хольта требуется задать начальные значения коэффициентов a_0 и b_0 , а для Хольта-Уинтерса – помимо этого ещё и начальные сезонные параметры c_t по формуле (6). Поэтому для этих моделей исходные ряды данных будут чуть больше по размерам, однако прогнозироваться будут те же участки, что и для других моделей.

Подбор коэффициентов для всех моделей осуществляется функцией MS Excel «Поиск решения» по критерию «минимизация суммы квадратов отклонений расчётных значений от фактических».

Полученные прогнозы представлены в Таб. 1 и Таб. 2. Лучшие прогнозы в таблицах выделены курсивом.

Таб. 1. Краткосрочный прогноз курса доллара США по моделям с коррекцией, Брауна, Хольта и Хольта-Уинтерса.

№ участка	1	2	3	4	5
Фактическое значение	28,7459	29,9292	30,4666	29,4242	29,1381
Модель с коррекцией прогноза					
Оптимальное значение $\alpha_0 + i\alpha_1$	<i>0,456+1,001i</i>	<i>0,509+1,000i</i>	<i>0,443+1,002i</i>	<i>0,446+0,999i</i>	<i>0,661+0,999i</i>
Сумма ряда весов S	<i>1,001+2,192i</i>	<i>1,000+1,963i</i>	<i>1,007+2,260i</i>	<i>0,997+2,242i</i>	<i>0,998+1,151i</i>
Время схождения ряда ν	<i>2,874</i>	<i>2,122</i>	<i>3,116</i>	<i>3,048</i>	<i>0,928</i>
Прогнозное значение	<i>28,7518</i>	<i>29,7425</i>	<i>30,3427</i>	<i>29,4236</i>	<i>28,9687</i>
Абсолютная ошибка	<i>0,0059</i>	<i>0,1867</i>	<i>0,1239</i>	<i>0,0006</i>	<i>0,1694</i>
Относительная ошибка	<i>0,02%</i>	<i>0,62%</i>	<i>0,41%</i>	<i>0,002%</i>	<i>0,58%</i>
Модель Брауна					
Оптимальное значение α	0,909	0,965	1,071	1,159	<i>0,689</i>
Прогнозное значение	28,7128	30,4989	30,0160	29,3291	<i>29,1394</i>
Абсолютная ошибка	0,0331	0,5697	0,4506	0,0951	<i>0,0013</i>
Относительная ошибка	0,12%	1,90%	1,48%	0,32%	<i>0,01%</i>
Модель Хольта					

№ участка	1	2	3	4	5
Оптимальное значение $\alpha_1; \alpha_2$	0,991; -0,083	0,827; 0,031	2,247; -0,141	0,554; 0,368	0,403; -0,020
Прогнозное значение	28,7048	30,4837	30,2588	29,2401	29,0136
Абсолютная ошибка	0,0411	0,5545	0,2078	0,1841	0,1245
Относительная ошибка	0,14%	1,85%	0,68%	0,63%	0,43%
Модель Хольта-Уинтерса					
Оптимальное значение $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$	1,248; -0,079; 1,021	0,909; 0,023; 2,756	0,521; -0,174; 1,252	0,096; 0,750; 0,620	0,178; -0,029; 0,633
Прогнозное значение	28,5375	30,6968	30,0113	29,4134	29,0783
Абсолютная ошибка	0,2084	0,7676	0,4553	0,0108	0,0598
Относительная ошибка	0,78%	2,56%	1,49%	0,04%	0,21%

В результате прогноза курса доллара в четырёх случаях из пяти более точный результат был получен по модели с коррекцией. Только на пятом участке модель с коррекцией дала наихудший прогноз (по сравнению с остальными моделями), который был сделан с ошибкой в 0,58%. Для этого участка лучшей оказалась модель Брауна, в которой оптимальная постоянная сглаживания α составила 0,689 (что значительно меньше, чем на всех остальных участках). Этот участок был самым гладким из всех рассмотренных, резких изменений в нём не наблюдалось, и можно заметить, что именно для него были подобраны такие постоянные сглаживания в модели с коррекцией, для которых время схождения ряда весов v оказалось наименьшим.

Также стоит обратить внимание на то, какими получились постоянные сглаживания в модели Хольта и Хольта-Уинтерса: некоторые из них оказались отрицательными, а некоторые – значительно больше 1. Причём, если на них накладывать ограничение $(0; 1)$, то оптимальными становятся граничные значения (например, для первого участка модели Хольта получим $\alpha_1=0,991, \alpha_2=0$) и, как результат, прогнозы по этим моделям ухудшаются (ошибка для этого примера составит 0,30% вместо 0,14%).

Таб. 2. Краткосрочный прогноз мировых продаж гибридных автомобилей по моделям с коррекцией, Брауна, Хольта и Хольта-Уинтерса.

№ участка	1	2	3	4
Фактическое значение	23,80	29,80	36,50	28,20
Модель с коррекцией прогноза				
Оптимальное значение $\alpha_0+\alpha_1$	$0,493+1,002i$	$0,359+0,985i$	$0,431+0,990i$	$0,305+0,978i$
Сумма ряда весов S	$1,006+2,028i$	$0,882+2,775i$	$0,948+2,320i$	$0,769+3,262i$
Время схождения ряда v	2,327	5,187	3,310	11,000
Прогнозное значение	26,06	31,08	40,33	26,66
Абсолютная ошибка	2,26	1,28	3,83	1,54
Относительная ошибка	9,51%	4,28%	10,49%	5,47%
Модель Брауна				
Оптимальное значение α	1,215	1,002	0,489	0,935
Прогнозное значение	26,57	34,81	42,99	29,30
Абсолютная ошибка	2,77	5,01	6,49	1,10
Относительная ошибка	11,64%	16,80%	17,79%	3,89%
Модель Хольта				
Оптимальное значение $\alpha_1; \alpha_2$	1,208; -0,022	0,905; -0,035	0,659; -0,072	0,935; 0,000
Прогнозное значение	26,55	34,91	42,92	29,61
Абсолютная ошибка	2,75	5,11	6,42	1,41
Относительная ошибка	11,54%	17,16%	17,59%	5,02%

№ участка	1	2	3	4
Модель Хольта-Уинтерса				
Оптимальное значение α_1 ; α_2 ; α_3	0,679; -0,045; 0,269	0,181; 0,183; 1,073	0,777; -0,083; 0,954	-0,001; 63,039; 0,724
Прогнозное значение	21,46	42,23	43,16	28,04
Абсолютная ошибка	2,34	12,43	6,66	0,16
Относительная ошибка	9,84%	41,70%	18,23%	0,56%

По второму ряду данных модель с коррекцией также дала в большинстве случаев лучший прогноз (Таб. 2). Только на одном участке лучший прогноз дала модель Хольта-Уинтерса. Стоит обратить внимание на то, какими получились в этом случае постоянные сглаживания: $\alpha_1 = -0,001$, $\alpha_2 = 63,039$, $\alpha_3 = 0,724$. Если вводить на них ограничения, то ошибка прогноза увеличивается на два порядка и подскакивает с 0,56% до 33,57%, что в очередной раз подтверждает необоснованность таких ограничений в модификациях модели Брауна.

Вообще ряд автомобильных продаж обладает некоторой сезонностью и ожидалось, что лучший прогноз во всех случаях будет получен именно по модели Хольта-Уинтерса, но, как и было сказано ранее, проблема заключается в том, что периодичность этой сезонной составляющей меняется во времени, из-за чего и сезонные параметры не успевают за этими изменениями. В этих условиях модель с коррекцией, которая не предполагает априорного задания каких-либо тенденций, даёт лучший прогноз.

В качестве интересного наблюдения можно отметить, что практически для всех случаев комплексный коэффициент сглаживания получался достаточно близким к $0,5+i$ и при этом ряд весов сходился к числу $1+2i$.

После проведённых дополнительных исследований модели с коррекцией выяснилось, что, если корректировочный коэффициент считать по формуле (8) или (9), учитывающей отклонение факта от прогноза, модель становится очень чувствительной к первоначальным условиям и выбранному значению комплексного коэффициента сглаживания. Так изменение любого из этих параметров хотя бы на одну сотую может существенно изменить прогнозные свойства модели (как в лучшую, так и в худшую сторону). Поэтому к выбору начального значения $\hat{Y}_0 + i\hat{\varepsilon}_0$ и комплексного коэффициента сглаживания в этом случае надо подходить очень внимательно – при правильном их задании можно добиться более точного прогноза.

Кроме того, исследования, проведённые студенткой 5-го курса СПбГУЭФ, Цедяковой Екатериной, показали, что модель с коррекцией даёт лучшие прогнозы в рядах данных, имеющих хаотическую динамику, для которых оптимальный коэффициент сглаживания по модели Брауна получается близок к 0.

Подводя итог, следует сделать вывод о том, что модель с коррекцией прогноза может быть использована в практике прогнозирования социально-экономической динамики. В некоторых случаях этой модели следует отдать предпочтение перед другими моделями. Важным

преимуществом модели (7) по сравнению с другими модификациями модели Брауна является то, что она не требует априорного задания вида тенденции.

Список литературы

1. Светуных С.Г., Светуных И.С. Методы социально-экономического прогнозирования: Учебник для вузов. Том 1. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2009.
2. Френкель А.А., Прогнозирование производительности труда: методы и модели. – М.: Издательство «Экономика», 1989.
3. Brown G. Robert, Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. – N.Y.: Dover Phoenix Editions, 2004.
4. Светуных С.Г., Бутуханов А. В., Светуных И. С. Запредельные случаи метода Брауна в экономическом прогнозировании. — СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006.
5. Theil H., Wage S., Some observations on adaptive forecasting // Management Science. – 1964. – Vol. 10. – № 2.
6. Winters P.R. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages // Management Science. – 1960. – Vol. 6. – № 3.
7. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003.
8. Савинов Г.В., Светуных С. Г. Комплексные переменные в экономическом анализе и моделировании // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2006, № 4.
9. Справочник по математике для экономистов / В.Е. Барбаумов, В.И. Ермаков, Н.Н. Кривенцова, и др.; Под ред. В.И. Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987.
10. Светуных И.С. Альтернативные показатели оценки адекватности математических моделей // Информационные технологии в системе социально-экономической безопасности России и её регионов: Сборник трудов II Всероссийской научной конференции, Казань, 20 - 23 октября 2009 г / Под ред. И.Н. Голицыной – Казань: ТГГПУ, 2009.
11. Теория функций комплексного переменного / М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров. – М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002.
12. <http://www.cbr.ru/> - официальный Интернет-сайт Центробанка РФ.
13. <http://www.marklines.com/> - данные по мировым продажам автомобилей.