УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РОБАСТНОЙ МОДЕЛИ

В.Н. Афанасьев, Е.В. Окунькова
МИЭМ, Москва
afanval@mail.ru

Введение

Рассматривается задача управления нелинейным объектом, находящегося под воздействием внешних возмущений, с функционалом качества, весовые параметры которого зависят от состояния объекта. Применение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJBE) для синтеза управляющих воздействий наталкивается, как правило, на сложности аналитического и вычислительного порядков. С другой стороны, использование уравнения HJBE дает возможность исследовать системы, параметры которых зависят от состояния (SDC) [1,2]. Этот тип нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет перейти при синтезе управления от использования уравнения HJBE к алгебраическому уравнению Риккати с параметрами, зависящими от состояния объекта (SDRE). Другим словами, если существует положительно определенная матрица $S(x)$, параметры которой зависят от состояния объекта, и которая удовлетворяет SDRE и существует положительно определенная скалярная функция $V(x)$, удовлетворяющая решению $dV(x)/dt = S(x)x(t)$, тогда эта функция удовлетворяет уравнению HJBE.

Следует отметить, что использование метода SDRE для решения HJBE наталкивается на проблему неоднозначного представления нелинейной системы в форме SDC [2]. Таким образом, решение SDRI может дать различные положительно определенные матрицы $S(x)$. Кроме того, аналитическое решение SDRE в общем случае получить невозможно.

В работе разрабатывается метод синтеза гарантированного управления нелинейным объектом, основанный на представлении исходной системы в виде ее робастной модели с постоянными параметрами [3].

.

1. Постановка задачи

Пусть нелинейный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t) = f(t,x) + g_1(t,x)w(t) + g_2(t,x)u(t),\ x(t_0) = x_0,\\
&y(t) = h(t,x),\\
&f,\, g_1,\, g_2 : T\times\Omega \to R^n,\ h : T\times\Omega \to R^m,\\
&(t,x) \to f(t,x),\, g_1(t,x),\, g_2(t,x),\, h(t,x).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь $T-$ интервал $[0,\infty)$; $\Omega-$область (открытое связанное множество) R^n, содержащая начало; $x \in R^n$ −состояние системы; $x_0 \in X_0$, X_0- область возможных начальных состояний системы; $y \in R^m$, $m \le n$ − выход системы; $u \in R^r$ −управление, подлежащее нахождению; $w \in R^m$ –неизвестное возмущение; матрицы $f(t,x),\ g_1(t,x),\ g_2(t,x),\ h(t,x)$ действительны и непрерывны. Предполагается, что при вех (t,x) пары $\langle f(t,x), g_1(t,x) \rangle$ и $\langle f(t,x), g_2(t,x) \rangle$ являются управляемыми, пара $\langle f(t,x),\ h(t,x) \rangle$ наблюдаемой. Кроме того, функции $f(t,x),\ g_1(t,x),\ g_2(t,x),\ h(t,x)$ будем предполагать достаточно гладкими, чтобы через любые $(0,x_0) \in T \times \Omega$ проходило одно и только одно решение (1) $x(t,0,x_0)$ и был бы единственный соответствующий выход системы $y(t) = h(t, x(t,0,x_0))$.

Рассматривая задачу синтеза закона управления, как дифференциальную игру двух игроков U и W на $[0,\infty)$, введем функционал

$$J(x,u,w) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^T \left\{ y^T(t)Q(x)\,y(t) + u^T(t)R(x)u(t) - w^T(t)P(x)w(t) \right\} dt. \qquad (2)$$

Матрица $Q(x)$ может быть положительно полуопределенной; матрицы $R(x)$, $P(x)$– положительно определенные. Дополнительным требованием является требование детектируемости. Предположим, что пара $\left\langle f(t,x),\ h^T(t,x),\ Q^{1/2}(x) \right\rangle$ детектируема при всех $(t,x) \in \Omega$. Требования к значениям параметров матриц $Q(x),\ R(x),\ P(x)$ будут определены далее.

Задача заключается в построении оптимальной стратегии с обратной связью для игроков U и W. Ограничения на управляющие воздействия учитываются при назначении матриц $P(x)$ и $R(x)$.

2. Дифференциальная игра: общее решение

Предполагая, что функции $f(t,x), g_1(t,x), g_2(t,x),\ h(t,x)$, $Q(x), R(x), P(x)$ достаточно гладкие, введем функцию стоимости игры

$$V(x) = J(x,u,w), \qquad (3)$$

где $V(x)$ дифференцируемая функция при любых допустимых стратегиях игроков $U, W \in L_2(t_0,T)$. Уравнение Гамильтона-Якоби при незаданном времени окончания переходного процесса (задача стабилизации), т.е. при $F = 0$ и $t \in (0,\infty)$, учитывая, что $V(x)$ в явном виде не зависит от времени, будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\left[f(t,x) + \frac{1}{2} g_1(t,x)w(t) + \frac{1}{2} g_2(t,x)u(t) \right] + \frac{1}{2} h^T(t,x)Q(x)\,h(t,x) + \\ &+ \frac{1}{2} w^T(t)\left[g_1^T(t,x)\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} - P(x)w(t) \right] + \frac{1}{2} u^T(t)\left[g_2^T(t,x)\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} + R(x)u(t) \right] = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

с граничным условием $V(0) = 0$, так как $\lim\limits_{t\to\infty} h(t,x) = 0$.

Назначим управления $u(t)$ и $w(t)$ так, чтобы последние два слагаемых (4) равнялись нулю, т.е.

$$w(t) = P^{-1} g_1^T(t,x)\left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T, \quad u(t) = -R^{-1} g_2^T(t,x)\left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T. \qquad (5)$$

Тогда уравнение Гамильтона-Якоби примет вид

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} f(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\left[g_1(t,x)P^{-1}g_1^T(t,x) - g_2(t,x)R^{-1}g_2^T(t,x)\right]\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\right\}^T + \\ + \frac{1}{2}h^T(t,x)Q(x)\,h(t,x) = 0. \qquad (6)$$

Назначим матрицы $R(x)$ и $P(x)$ так, чтобы матрица

$$\Theta(t,x) = \left[g_2(t,x)R^{-1}g_2^T(t,x) - g_1(t,x)P^{-1}g_1^T(t,x)\right] \qquad (7)$$

была бы, по крайней мере, положительно полуопределенной.

3. SDC-параметризация нелинейных объектов и синтез управлений

Пусть нелинейный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением (1). Представим исходную систему в несколько ином, эквивалентном виде. Для этого используем метод SDC-параметризации (State-Dependent Coefficient, [2]).

Пусть

$$f(t,x) = f_1(t,x) + f_2(t,x), \qquad (8)$$

где $f_1(t,x)$ − нелинейность низкого порядка, т.е. $\left|f_1(t,x)\right|/\left|x\right| \le \delta$, δ − малая величина, $f_2(t,x)$ − нелинейность высшего порядка [4], т.е. $\left|f_2(t,x)\right|/\left|x\right| \le \delta$ при $\left|x\right| \to 0$.

Учитывая свойства рассматриваемых нелинейностей, запишем

$$f(t,x) = \left[A_1(t) + A_2(x)\right]x(t),$$

$$g_1(t,x) = \left[G_{11}(t) + G_{12}(x)\right],\ g_2(t,x) = \left[G_{21}(t) + G_{22}(x)\right],\ h(t,x) = \left[C_1(t) + C_2(x)\right]x(t).$$

Тогда нелинейная система (1) может быть преобразована в k эквивалентных систем относительно исходной, но не эквивалентных относительно друг друга, с параметрами, зависящими от состояния (SDC)

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = \left[A_1^i(t) + A_2^i(x_i)\right]x(t) + \left[G_{11}(t) + G_{12}(x_i)\right]w(t) + \left[G_{21}(t) + G_{22}(x_i)\right]u_i(t), \\ x_i(0) = x_0,\ y(t) = \left[C_1^i(t) + C_2^i(x)\right]x(t). \qquad (9)$$

Следует отметить, что представление системы (1), если $n > 1$, в виде (9) не является единственным [3].

Определение. Представление системы (1) в виде (9) является эквивалентным, если матрицы $\left\langle\left[A_1(t) + A_2(x)\right],\ g_1(x)\right\rangle$ и $\left\langle\left[A_1(t) + A_2(x)\right],\ g_2(x)\right\rangle$ образуют управляемые пары, а матрицы $\left\langle\left[A_1(t) + A_2(x)\right],\ \left[C_1(t) + C_2(x)\right]\right\rangle$ образуют наблюдаемую пару при всех возможных $(t,x) \in \Omega$.

Синтез структуры управления произведем на i-модели системы с использованием функционала вида (9). Определим $\left\{\partial V(x_i)/\partial x_i(t)\right\}^T = S(x_i)x_i(t)$. Тогда из уравнения (6) нетрудно получить уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния,

$$S_i(x_i)\left[A_1^i(t) + A_2^i(x_i)\right] + \left[A_1^i(t) + A_2^i(x_i)\right]^T S_i(x_i) + \\ + S_i(x_i)\Theta(t,x)S_i(x_i). + \left[C_1^i(t) + C_2^i(x)\right]^T Q(x)\left[C_1^i(t) + C_2^i(x)\right] = 0.$$

Управления определяются выражениями

$$u_i(t) = -R^{-1}\left[G_{21}(t) + G_{22}(x)\right]^T S_i(x_i)x_i(t),$$
$$\omega(t) = -P^{-1}\left[G_{11}(t) + G_{12}(x)\right]^T S_i(x_i)x_i(t).$$

4. Модель нелинейной системы и синтез робастного управления

Синтез управления для нелинейной системы (1) с функционалом качества (2) осуществляется, в предположении об интервальном изменении параметров системы и функционала качества, с использованием модели с постоянными параметрами и соответствующим функционалом качества. Это позволяет получить гарантированное управление для исходной системы.

Теорема. Если $z(t)$ является решение дифференциального уравнения с постоянными параметрами

$$\frac{d}{dt}z(t) = \left\{[\overline{A}_1 + A_2(x_0)] + \left[\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(x_0)\right]P^{-1}\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(x_0)\right]^T - \underline{G}_{21}\, R^{-1}\, \underline{G}_{22}^T\ \right]S\right\}z(t),$$
$$z(0) = x_0,$$

а $x(t)$ возможные решения исходного нелинейного уравнения,

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t,x) +$$
$$+\left[g_1(t,x)P^{-1}\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(x_0)\right]^T - g_2(t,x)R^{-1}\underline{G}_{21}^T\ \right]Sx(t),\ x(0) = x_0,$$

где положительно определенная матрица S является решением алгебраического уравнения Риккати

$$S[\overline{A}_1 + A_2(x_0)] + [\overline{A}_1 + A_2(x_0)]^T S + S\left\{g_1(x_0)P^{-1}g_1(x_0)^{\ T} - \underline{g}_2 R^{-1}\underline{g}_2^{\ T}\right\}S +$$
$$+\left[\overline{C}_1 + C_2(x_0)\right]^T Q(x_0)\left[\overline{C}_1 + C_2(x_0)\right] = 0,$$

то при всех возможных $(t,x) \in \Omega$ справедливо соотношение $\|z(t)\| \geq \|x(t)\|$.

При выполнении условий теоремы, робастное управление $u_i(t) = -R^{-1}\underline{g}_2^T Sx(t)$ обеспечивает стабилизацию исходной нелинейной системы (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 10-08-00677.

Литература

1. *Van der Schaft A.J.* L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control // *IEEE. Trans. On Automatic Control*. 1992. V.37. P. 770 – 784.

2. *Sakayanagi Y., Nakayama D., Shigeki N. et al.* Clarification of Free Parameters of State-dependent Coefficient Form: Effect on Solving State-dependent Riccati Inequality // *17th WC IFAC. Seoul,* 2008. P. 182-187.

3. *Афанасьев В.Н.* Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенными объектами. Известия РАН. ТиСУ. №1, 2010.

4. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 3-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 552 с.