

В. А. Лапшин¹

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРОЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Срочная структура процентных ставок, описываемая бескупонной кривой доходности, в развитых странах рассматривается как главный индикатор состояния финансового рынка, один из важнейших макроэкономических параметров и эталон для оценки ценных бумаг в других секторах рынка инструментов фиксированной доходности. В настоящей работе предлагается новый численный метод построения срочной структуры процентных ставок по котировкам группы облигаций однородного кредитного качества и ликвидности.

Ключевые слова: кривая доходности, экспоненциально-синусоидальные сплайны, разрывная замена времени, принцип максимума Понтрягина.

1. Введение. Срочная структура процентных ставок (бескупонная кривая доходности), лежащая в основе теории оценки активов с фиксированным доходом и являющаяся одним из наиболее дискуссионных вопросов проведения эффективной долговой и денежной политики, составляет предмет интенсивных зарубежных исследований уже более 30 лет. В России широко используется модифицированная кривая доходности к погашению, где вместо срока до погашения используют дюрацию, отвечающую плоской срочной структуре процентных ставок, а общепризнанной в мире модели построения кривой бескупонной доходности до сих пор не существует [1]. Тем не менее, для ряда приложений необходима именно бескупонная кривая доходности. Например, ее необходимо использовать для оценки инвестиционных проектов, для оценки приведенной стоимости потока платежей, для задач ценообразования некоторых финансовых инструментов, таких, как облигации, векселя, процентные свопы и др.

Под облигацией будет пониматься долговое обязательство, расписание платежей по которому заранее известно (т.е. мы рассматриваем облигации с фиксированным купоном), обращающееся на вторичном рынке. В настоящей работе анализируются кривые, построенные по группе облигаций, имеющих равную степень рискованности (кредитный риск, связанный с неисполнением эмитентом своих обязательств) и ликвидности. В качестве упрощающих, но общепринятых предположений, рассмотрим “идеальный” рынок, на котором торгуются облигации со всеми возможными номиналами и временами до погашения той же степени рискованности и ликвидности, что и данные.

¹Факультет ВМиК МГУ, асп., e-mail: victor.lapshin@gmail.com.

Рассмотрим бескупонную облигацию с единовременной выплатой основного долга со временем до погашения T и номиналом 1. Обозначим ее цену в текущий момент времени $d(T)$. Эта зависимость называется функцией дисконтирования.

Задача определения срочной структуры процентных ставок непосредственно связана с задачей нахождения функции дисконтирования. Предполагается, что стоимость любой купонной облигации равна стоимости портфеля бескупонных облигаций с соответствующими сроками погашения. Тогда зависимость цены P облигации от сроков $t_i, i = 0, \dots, n$, и объемов выплат $F_i, i = 0, \dots, n$, имеет вид $P = \sum_{i=0}^n d(t_i)F_i$, где $d(t)$ — функция дисконтирования. И пусть на рынке торгуются N инструментов с ценами $P_k, k = 1, \dots, N$, и объемами выплат $F_{i,k}, i = 0, \dots, n, k = 1, \dots, N$, в моменты времени $t_i, i = 0, \dots, n$, причем моменты t_i выбираются общими для всех инструментов. При этом требуется, чтобы цены инструментов, предсказанные по найденной функции дисконтирования в соответствии с формулой цены, были приблизительно равны текущим рыночным ценам. Кроме того, требуется, чтобы эта функция была достаточно гладкой. Таким образом, приходим к задаче: найти функцию дисконтирования $d(t), t \geq 0$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $d(t)$ не возрастает на всей области определения;
- 2) $d(t) > 0, \quad d(0) = 1$;
- 3) $\sum_{i=0}^n d(t_i)F_{i,k} = P_k$ для всех $k = 1, \dots, N$.

Связь между кривой доходности и функцией дисконтирования определяется способом начисления процентов; наиболее удобным является непрерывное начисление процентов. В этом случае кривая доходности $r(t)$ и функция дисконтирования $d(t)$ связаны соотношением $d(t) = \exp(-r(t)t)$. Соответственно, мгновенные форвардные процентные ставки определяются соотношением $r(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$.

В такой постановке эта задача является некорректно поставленной. В самом деле: из приведенных условий можно определить только значения функции дисконтирования в точках разбиения, т.е. определить $d(t_i)$, причем единственным образом это можно сделать лишь в случае, когда система в условии 3 является определенной, что априори можно гарантировать только в тривиальном случае, когда ни одна облигация не имеет купонных выплат (времена погашения облигаций обычно не совпадают). Иначе требуется специальным образом сформированная выборка облигаций, что сильно ограничивает общность метода. Таким образом, в общем случае однозначному определению не поддаются даже $d(t_i)$, не говоря уже о значениях $d(t)$ в промежуточных точках. Кроме того, нетрудно убедиться в неустойчивости задачи даже в фиксированных точках.

Принципы решения некорректно поставленных задач описаны в [19]. В соответствии с принципами, описанными там, а также с учетом того, что гладкость срочной структуры процентных ставок — экономически разумное требование [2, 10, 11, 12, 15], для регуляризации в дальнейшем мы наложим на структуру процентных ставок условие максимальной гладкости.

2. Обзор существующих методов. Подходы, традиционно используемые для определения срочной структуры процентных ставок (нахождения функции дисконтирования) можно разделить на три группы: “наивные”, или инженерные методы; параметрическое оценивание и интерполяционные методы.

К “наивным” методам относятся, например, использование доходности похожей облигации, использование кривой доходности к погашению, метод пошагового определения процентных ставок (bootstrapping) [2], метод ядер [3].

Параметрический подход был впервые описан в работе [4]. По сей день широкое распространение имеют методы Нельсона—Зигеля [5], Свенсона [6]. Модели с произвольно задаваемым количеством параметров были предложены в [7] (экспоненциальные функции), [8] (экспоненциально-полиномиальные). На российском рынке также используется G-кривая, в плане параметризации являющаяся вариацией метода Нельсона—Зигеля [9].

Среди интерполяционных методов можно выделить сплайновый подход, который был впервые предложен в работе [10]. В [10] использовались квадратичные, в [11] и [12] — кубические сплайны. В [13] впервые были использованы В-сплайны, а в [14] — экспоненциальные. В работах [15] и [16] была подчеркнута важность гладкости решения и, соответственно, были использованы сглаживающие сплайны. Потом в [17] гладкость была поставлена в зависимость от срочности (от участка кривой). Путем комбинации экспоненциальных сплайнов и требования гладкости для регуляризации задачи, в [18] были получены² экспоненциально-синусоидальные сплайны.

Параметрические методы имеют ряд недостатков: экономически противоречивые результаты (использование параметрических методов, в частности, широко известных методов Нельсона—Зигеля и Свенсона, иногда приводит к результатам, абсурдным с экономической точки зрения); некорректные результаты в случае отсутствия сделок по бумагам с малыми или большими сроками до погашения; численная неустойчивость результата (часто отбрасывание одной бумаги существенно меняет форму кривой, особенно на коротком ее конце, около $t = 0$).

²Этот результат де-факто был получен Смирновым и Захаровым в 2003 году и представлен в виде доклада на заседании Европейской комиссии по облигациям (EFFAS-EBC).

К недостаткам сплайновых (и непараметрических в целом) методов можно отнести высокую сложность получаемых моделей и связанную с ней трудоемкость оценки параметров модели. Также зачастую результат трудно интерпретируется с экономической точки зрения.

Подход, предлагаемый в настоящей работе, относится к сплайновым методам и может рассматриваться как развитие описанного в [16] подхода, хотя исходные посылки иные. Его отличие от традиционных сплайновых методов состоит в том, что о виде функции не делается заранее никаких предположений, но накладывается условие гладкости на функцию дисконтирования. Такой подход является экономически обоснованным: он позволяет учесть непрерывность ожиданий участников рынка, что практически всегда имеет место на практике. Поиск решения в виде сплайна при данном подходе – математически обоснованный результат.

3. Новый подход к задаче. Используя идею, предложенную в статье [16], сделаем замену переменных: $d(t) = \exp(-z(t))$. Теперь рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{z} = f(x), \\ \dot{x} = u. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u(t)$ — новая неизвестная функция, а f — некоторая заданная функция. Для обеспечения условий 1 и 2 потребуем, чтобы $f(x) \geq 0$ и $z(0) = 0$. Для обеспечения условия 3 потребуем, чтобы решение доставляло минимум функционалу

$$J(u) = \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{2} \left(\sum_{i=0}^n e^{-z(t_i)} F_{i,k} - P_k \right)^2.$$

Для регуляризации, в соответствии с [19], мы добавим в этот функционал слагаемое, отвечающее за “гладкость” получаемого решения: $\frac{\alpha^2}{2} \int_0^T u^2(\tau) d\tau$, где α — параметр регуляризации, регулирующий соотношение между гладкостью и желаемой точностью приближения.

После сказанного выше задачу можно переформулировать так:

$$\begin{cases} \dot{z} = f(x), \\ \dot{x} = u, \\ J(u) = \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T u^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w_k \left(\sum_{i=0}^n e^{-z(t_i)} F_{i,k} - P_k \right)^2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Введем новые переменные $y_k(t) = \sum_{i=0}^{t_i \leq t} F_{i,k} e^{-z(t_i)}$, $k = 1, \dots, N$. Тогда задачу можно

записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = f(x), \quad z(0) = 0, \\ \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y}_k = \sum_{i=0}^n F_{i,k} e^{-z} \delta(t - t_i), \quad y_k(0) = 0, \\ J(x_0, u) = \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T u^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w_k (y_k(T) - P_k)^2 \rightarrow \min, \end{array} \right.$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, сосредоточенная в нуле. Для применения принципа максимума Понтрягина мы воспользуемся “разрывной” заменой времени. Введем функцию $\nu(t)$, останавливающую время, и запишем функционал как еще одну фазовую переменную:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = f(x)\nu(t)m \quad z(0) = 0, \\ \dot{x} = u\nu(t) \quad , x(0) = x_0, \\ \dot{y}_k = \sum_{i=0}^n F_{i,k} e^{-z} (1 - \nu_i(t)) \quad y_k(0) = -P_k, \\ \dot{x}_0 = \frac{\alpha^2}{2} u^2 \nu(t) + \sum_{k=1}^N w_k (y_k - P_k) \sum_{i=0}^n F_{i,k} e^{-z} (1 - \nu_i(t)), \\ J(x_0, u) = x_0(T) \rightarrow \min. \end{array} \right.$$

Здесь

$$\nu(t) = \min_{i=0, \dots, n} \nu_i(t), \quad \nu_i(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_i + i; t_i + i + 1], \quad i = 0, \dots, n, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

“Остановленное” время будет иметь динамику $\dot{t} = \nu(t)$. Ниже будет показано, что решение, если оно существует, единственно и является сплайном некоторого специального вида. Вопрос о существовании и единственности решения у задачи в такой постановке остается открытым. Но при экономически разумных ограничениях (в частности, ограниченности мгновенной форвардной процентной ставки $f(x(t))$) будет существовать единственное решение задачи.

Гамильтониан системы

$$\begin{aligned} H(z, x, y, \psi, u, t) = & -\frac{\alpha^2}{2} u^2 \nu(t) - \sum_{k=1}^N w_k (y_k - P_k) \sum_{i=0}^n F_{i,k} e^{-z} (1 - \nu_i(t)) + \\ & + \psi_z f(x) \nu(t) + \psi_x u \nu(t) + \sum_{k=1}^N \psi_k \sum_{i=0}^n F_{i,k} e^{-z} (1 - \nu_i(t)). \end{aligned}$$

Здесь $\psi = (\psi_0, \psi_z, \psi_x, \psi_k)$ (мы сразу положили $\psi_0 = -1$).

В соответствии с принципом максимума для оптимальной пары $((z, x, y), u^*)$ суще-

ствуют функции ψ_z, ψ_x, ψ_k , такие, что

$$\begin{aligned} H(z, x, y, \psi, u^*, t) &= \max_u H(z, x, y, \psi, u, t), \\ \dot{\psi}_z &= - \sum_{k=1}^N w_k(y_k - P_k) \sum_{i=0}^n F_{i,k} e^{-z} (1 - \nu_i(t)) - \sum_{k=1}^N \psi_k \sum_{i=0}^n F_{i,k} e^{-z} (1 - \nu_i(t)), \\ \dot{\psi}_x &= -\psi_z f'(x) \nu(t), \\ \dot{\psi}_k &= w_k \dot{y}_k. \end{aligned}$$

Условия трансверсальности дадут

$$\psi_z(T) = \psi_x(0) = \psi_x(T) = \psi_k(T) = 0.$$

С учетом этого найдем u при $\nu(t) = 1$: $u = \frac{\psi_x}{\alpha^2}$. Очевидно, значение u при $\nu(t) = 0$ ни на что не влияет.

Кроме того, попытаемся найти ψ . Введем новую переменную $q_k = y_k(T)$:

$$\begin{aligned} \psi_k &= w_k(y_k - q_k), \\ \dot{\psi}_z &= - \sum_{k=1}^N w_k(q_k - P_k) \sum_{i=0}^n F_{i,k} e^{-z} (1 - \nu_i(t)). \end{aligned}$$

Учитывая структуру $\nu_i(t)$, а также то, что $z, x = \text{const}$ при $\nu(t) = 0$,

$$\psi_z = \sum_{k=1}^N w_k(q_k - P_k) \sum_{i, t_i+i > t} F_{i,k} e^{-z(t_i)}$$

Видно, что ψ_z — кусочно-постоянная функция. Пусть $\psi_z = c_i$ на $[t_{i-1} + i, t_i + i)$, где

$$c_i = \sum_{k=1}^N w_k(q_k - P_k) \sum_{s=i}^n F_{s,k} e^{-z(t_s+s)}.$$

Решая систему, находим:

$$\ddot{x} = -\frac{c_i}{\alpha^2} f'(x) \nu(t), \quad t \in [t_{i-1} + i, t_i + i).$$

Здесь все упирается в вид функции $f(x)$, про которую мы предположили только неотрицательность. Для дальнейшего изложения будет разумно положить $f(x) = x^2$, как это было сделано в [18]³, тогда имеем:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{2c_i}{\alpha^2} x \nu(t), \\ (\ddot{x} - \lambda x) \nu(t) &= 0, \quad \lambda = -\frac{2c_i}{\alpha^2}, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, \\ \dot{x} &= 0 \text{ при } \nu(t) = 0. \end{aligned}$$

³Стоит, однако, заметить, что это не единственно возможный вариант. Так, например, заслуживает рассмотрения выбор $f(x) = e^x$, также дающий аналитическое решение.

Решая это уравнение, получим

$$x = p_{i-1}\phi_{\lambda_i}(t_i - \tau) + p_i\phi_{\lambda_i}(\tau - t_{i-1}), \tau \in [t_{i-1}, t_i], \quad (2)$$

где $\dot{\tau} = \nu(t)$, $\tau(0) = 0$,

$$\phi_{\lambda_i}(\tau) = \begin{cases} \frac{sh\sqrt{\lambda_i}\tau}{sh\sqrt{\lambda_i}(t_i - t_{i-1})}, & \lambda_i > 0, \\ \frac{\sin\sqrt{-\lambda_i}\tau}{\sin\sqrt{-\lambda_i}(t_i - t_{i-1})}, & \lambda_i < 0, \\ \frac{\tau}{t_i - t_{i-1}}, & \lambda_i = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что если существует оптимальное решение, то существует также оптимальное решение, которое удовлетворяет условию $x \geq 0$. В самом деле, рассмотрим точку t^1 , в которой $x = 0$, а $u < 0$. Если таких точек нет, $x \geq 0$ везде, так как $x(0) \geq 0$. Начиная с этой точки ($t > t^1$), положим $u^1 = -u$, $x^1 = -x$. Значения z и $\int u^2 d\tau$ останутся такими же в силу того, что туда входят только квадраты величин x, u . После этого берем следующую точку t^2 , в которой $x = 0, u < 0$. В результате получим x^*, u^* , такие, что $x^* \geq 0$.

Указанное свойство влечет $\lambda_i \geq -\frac{\pi^2}{(t_i - t_{i-1})^2}$ (см. выражение (3)).

Запишем теперь условие непрерывной дифференцируемости $x(t)$ (этот факт следует из того, что $\ddot{x}$ кусочно-непрерывна):

$$-p_{i-1}\phi'_{\lambda_i}(0) + p_i\phi'_{\lambda_i}(t_i - t_{i-1}) = -p_i\phi'_{\lambda_{i+1}}(t_{i+1} - t_i) + p_{i+1}\phi'_{\lambda_{i+1}}(0).$$

Это условие а также условия $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$ можно записать как $B_\lambda p = B_c p = 0$, так как λ_i и c_i связаны взаимно однозначным соотношением. Но матрица B_c квадратная, а у уравнения $B_c p = 0$ существует нетривиальное решение. Следовательно, B_c имеет неполный ранг, и можно положить одну переменную (p_0) свободной, а остальные выразить через нее. Уравнение примет вид $A_c p = f_c p_0$, а переменные p будут выражаться так: $p = p_0 A_c^{-1} f_c$, где матрица A_c треугольная с ненулевыми элементами на диагонали.

Таким образом, мы получаем $2n + 1$ уравнений и $2n + 1$ неизвестную:

$$\begin{cases} c_i = \sum_{k=1}^N w_k (q_k - P_k) \sum_{s=i}^n F_{s,k} e^{-z(t_s)}, \\ A_c p = f_c p_0, \\ \det A_c = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Значение $z(t)$ находится при известных p, c_i , т.к. для $\dot{z}$ известно выражение (1),(2).

Но практика показывает, что решение этой системы происходит довольно медленно. Гораздо лучше зарекомендовал себя следующий метод: требование удовлетворения уравнению (4) нужно вставить в функционал, который минимизируется в методе, описанном в [18]. Заметим, что в рамках подхода, использованного для получения указанного метода, уравнение (4) получить невозможно. В то же время экспериментально

подтверждено, что указанная добавка существенно повышает скорость сходимости итерационного процесса.

4. Выбор начального приближения. Предложим также метод нахождения начального приближения для итерационных алгоритмов минимизации. Введем новый набор параметров $d_i = d(t_i)$, $d = (d_0, \dots, d_n)^T$, и перенесем требование гладкости на функцию $d(t)$. Получим задачу

$$\begin{cases} Fd = P, \\ \int_{t_0}^{t_n} (d''(t))^2 dt \rightarrow \min, \\ d_0 = 1, \quad d_i \geq d_{i+1} > 0, \end{cases}$$

где F — матрица потоков платежей, $F_{i,k}$ — размер платежа по k -му инструменту в момент t_i , а $P = (P_1, \dots, P_k)^T$ — вектор цен инструментов. Как и прежде, условие равенства $Fd = P$ заменим на условие минимума квадрата невязки $\|Fd - P\|^2 \rightarrow \min$. Кроме этого, заменим интеграл на интегральную сумму по решетке с узлами в t_i , а производную заменим на ее разностный аналог на той же сетке.

Понятно, что адекватного приближения можно добиться лишь при подходящем расположении узлов. Возникает соблазн просто доразбить слишком большие промежутки между узлами, вставив фиктивные узлы, либо ввести в рассмотрение новую, равномерную сетку. Однако, при этом придется пересчитывать матрицу F . Преимущество равномерной сетки в том, что качество приближения вторых производных на ней на порядок выше, чем на неравномерной сетке. За это мы расплачиваемся “отрывом от реальности”, так как встает вопрос о выборе узлов сетки. Если раньше он решался сам собой, то здесь приходится приводить дополнительные экспертные аргументы в пользу того или иного разбиения. Увеличение количества узлов сетки также отрицательно сказывается на быстродействии, так как размерность задачи совпадает с числом узлов сетки. Кроме того, в нашу задачу входит получение не точного решения задачи, а лишь разумного начального приближения. Для этих целей вполне достаточно естественной сетки.

Таким образом, получим задачу

$$\begin{cases} \|Fd - P\|^2 \rightarrow \min, \\ \|D^2 d\|^2 \rightarrow \min, \\ d_0 = 1, \quad d_i \geq d_{i+1} > 0, \end{cases}$$

которую можно переписать в виде задачи квадратичного программирования

$$\begin{cases} \|Hd - f\|^2 \rightarrow \min, \\ Ad \leq b. \end{cases}$$

Для ее решения существуют высокоэффективные алгоритмы.

Для использования решения полученной задачи в качестве начального приближения для минимизации J необходимо привести его к тому виду, с которым оперируют описанные выше методы минимизации.

Для перехода от переменных d_i к переменным p_i , λ_j можно использовать следующий алгоритм.

- 1) Определим вспомогательные величины f_k из выражения

$$d_i = \exp\left\{-\sum_{k=1}^i f_k\right\}; \quad f_k = \ln \frac{d_{k-1}}{d_k}.$$

- 2) Зафиксируем произвольные p_i , $i = 0, \dots, n$.

- 3) Определим λ_i из равенств

$$f_k = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)^2 dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (p_{i-1}\phi_{\lambda_i}(t_i - t) + p_i\phi_{\lambda_i}(t - t_{i-1}))^2 dt.$$

- 4) Рассмотрим функционал

$$I(p_0, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (f'(t_i + 0) - f'(t_i - 0))^2 + f'(t_0 + 0)^2 + f'(t_n - 0)^2,$$

где $f(t)$ определена выражением (2),(3) с найденными $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, и решим задачу

$$I(p_0, \dots, p_n) \rightarrow \min_{p_0, \dots, p_n}.$$

Найденные значения $p_0, \dots, p_n$ и соответствующие им $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и будут определять найденную приближенным методом функцию.

Полученные величины можно использовать как начальные значения в итерационной процедуре минимизации.

5. Основные результаты. В работе проведено еще одно исследование задачи определения временной структуры процентных ставок. Использованный подход является новым в части экономического обоснования сделанных предположений и наложенных априори условий. Предлагается новая формализация задачи, которая позволила глубже захватить внутреннюю структуру модели и получить более качественный результат по сравнению с предшествующими работами [16] и [18], развитием которых является данная статья. Тем не менее, предложенная формализация вполне отвечает духу подхода

[18] и сохраняет все его преимущества: экономическую обоснованность предположений и экономический смысл решения. В частности, свойство невозрастания результирующей функции дисконтирования.

Полученный результат является замкнутым решением задачи. Это означает, что получено столько же уравнений, сколько неизвестных. Предыдущие результаты [16], [18] предполагали решение минимизационных подзадач, так как количество уравнений не было достаточным. На основе полученного решения построен и реализован численный алгоритм нахождения функции дисконтирования по реальным данным.

Предложенный метод может также использоваться в смежных прикладных задачах, требующих построения функции дисконтирования, в частности, в задачах определения кредитных спредов.

Автор выражает глубокую признательность академику РАН Куржанскому Александру Борисовичу за внимание к работе, к.ф.-м.н. доц. Смирнову Сергею Николаевичу за постановку задачи и ценные замечания и к.ф.-м.н. Дарьину Александру Николаевичу за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балабушкин А., Гамбаров Г., Шевчук И. Оценка срочной структуры процентных ставок // Рынок ценных бумаг. 2004. № 13. С. 44–52.
2. Carleton W. T., Cooper I. A. Estimation and uses of the term structure of interest rates // J. Finance. 1976. **31**. N 4. P. 1067–1083.
3. Tanggaard C. Kernel smoothing of discount functions // Working Paper. Aarhus School of Business. 1992. N 21. P. 1–10.
4. Cooper I. A. Asset values. interest rate changes. and duration // J. Fin. Quant. Anal. 1977. N 12. P. 701–724.
5. Nelson C., Siegel A. Parsimonious modeling of yield curves // J. Bus. 1987. N 60. P. 473–489.
6. Svensson L. Estimating forward interest rates with extended Nelson & Siegel method // Sveriges Riskbank Quartely Review. 1995. N 3. P. 13–26.
7. Wiseman J. The exponential yield curve model // European Fixed Income Research. Technical Specification. JP Morgan, 1994.
8. Bjork T., Christensen J. Interest rate dynamics and consistent forward rate curves // Working Paper Series in Economics and Finance. Stockholm: Stockholm School of Economics, 1997. P. 1–38.

9. Балабушкин А., Гамбаров Г., Никитин А., Шевчук И. Кривая бескупонной доходности на рынке ГКО-ОФЗ // Рынок ценных бумаг. 2006. № 3. С. 68–77.
10. McCulloch J. Measuring the term structure of interest rates // J. Bus. 1971. 44. N 1. P. 19–31.
11. McCulloch J. The tax adjusted yield curve // J. Finance. 1975. N 30. P. 811–829.
12. Shea G. Pitfalls in smoothing interest rate term structure data // J. Fin. Quant. Anal. 1984. 19. N 3. P. 253–269.
13. Steeley J. Estimating the gilt-edged term structure: Basis splines and confidence intervals // J. Bus. Fin. Acc. 1991. 18. N 4. P. 513–529.
14. Vasicek O., Fong G. Term structure modeling using exponential splines // J. Finance. 1982. 37. N 2. P. 339–348.
15. Fisher M., Nychka D., Zervos D. Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines // Working Paper. Finance and Economics Discussion Series. Washington, DC: Federal Reserve Board. 1995. N 95-1.
16. Adams K., Van Deventer D. Fitting yield curves and forward rate curves with maximum smoothness // J. Fixed Income. 1994. 1. N 4. P. 52–62.
17. Waggoner D. Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices // Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 97-10. 1997. P. 1–23.
18. Лапшин В. А. Об определении временной структуры процентных ставок // Сборник статей молодых ученых факультета ВМиК МГУ. Вып. 3. М.: МАКС Пресс, 2006. С. 92–98.
19. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
29.04.09