УДК 517.986+517.958

М. В. Карасев, Е. М. Новикова

Алгебра и квантовая геометрия многочастотного резонанса

Алгебра симметрий квантового резонансного осциллятора в случае трех и более частот описана с помощью конечного (минимального) числа образующих и полиномиальных соотношений. Для этой алгебры указаны конструкция квантовых листов с комплексной структурой (аналог классических симплектических листов), а также конструкции квантовой кэлеровой 2-формы, воспроизводящей меры, соответствующих неприводимых представлений и когерентных состояний.

Библиография: 40 наименований.

Ключевые слова: частотный резонанс, алгебра симметрий, нелинейные коммутационные соотношения, квантовые кэлеровы формы, когерентные состояния.

§ 1. Введение

В волновой и квантовой механике многомерных систем фундаментальную роль играют состояния, локализованные вблизи устойчивого положения равновесия [1]–[3]. Гармоническая часть таких систем – осциллятор – задает главную составляющую движения, в то время как ангармоническая часть представляет возмущение. После процедуры квантового усреднения это возмущение начинает коммутировать с гармонической частью, т. е. задает элемент из ее коммутанта (алгебры симметрий). Если частоты гармонической части находятся в резонансе, то алгебра симметрий некоммутативна. Факт некоммутативности приводит к нетривиальной динамике усредненной системы и порождает ряд интересных эффектов.

В классической механике симметрии резонансного осциллятора изучались давно (см., например, [4], [5] и ссылки в фундаментальном обзоре [6]). Пуассонова структура на пространстве симметрий была исследована для некоторых частных случаев резонанса, например, в [7]–[9].

В работе [10] было показано, что алгебра симметрий общего резонансного осциллятора является алгеброй с конечным числом образующих и полиномиальными соотношениями. Она была названа *резонансной алгеброй*.

Гармоническая часть исходной системы представляет элемент Казимира (центр) резонансной алгебры. Усредненная ангармоническая часть задает еще один гамильтониан на резонансной алгебре. В устойчивом случае, когда все резонансные частоты положительны, этот гамильтониан соответствует некоторой возникшей за счет резонанса квазичастице, которую мы называем *гироном*. Оказалось, что описание самой резонансной алгебры и анализ состояний

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00606-а).

(прецессии) гирона сопровождаются появлением необычной квантовой геометрии [11]–[14]. Обнаруженные здесь новые алгебраические и геометрические объекты позволили решить давно стоявшую проблему об асимптотике спектра и волновых состояний в нано- и микрозонах вблизи резонансов.

Рассматриваемая задача о резонансах имеет два важных аспекта. Во-первых, она охватывает широкий круг базовых моделей волновой оптики и квантовой нанофизики. Во-вторых, как оказалось, она доставляет интересный класс алгебр, заданных конечным числом образующих с полиномиальными, в общем случае нелинейными соотношениями, для которых возможно построение полной теории неприводимых представлений, включая обобщение на базе квантовой геометрии известного метода орбит (разработанного для случая алгебр Ли [15]).

Систематическое рассмотрение квантовых алгебр с нелинейными соотношениями было начато школами В. П. Маслова и Л. Д. Фаддеева [16]–[25] в 1970–1980-х годах, хотя первые попытки использования таких алгебр делались физиками намного раньше.

Долгое время список физических систем, в которых алгебры с нелинейными соотношениями играют существенную роль для описания спектра и динамики, сводился к бесконечномерным полевым системам и спиновым цепочкам (см. список литературы в [22]). Примеры нелиевских алгебр с конечным числом образующих, свойства которых проявляются в фундаментальных эффектах квантовой механики (эффекты Зеемана и Зеемана–Штарка), были обнаружены и подробно изучены в работах [26]–[28]. По своему типу эти семейства алгебр подобны тем алгебрам, которые рассматривались в работе [16], т. е. число образующих в них совпадает с размерностью спектра.

Обнаруженные в [26]–[28] алгебры являются квантовыми, т. е. деформациями некоторых классических пуассоновых алгебр (с полиномиальным пуассоновым тензором). Резонансные алгебры, отвечающие многочастотному квантовому осциллятору, которые были найдены в [11]–[13], также относятся к классу квантовых алгебр, но число их образующих, вообще говоря, уже больше размерности спектра.

Квантовый осциллятор с частотами $f_1, \dots, f_n$ задается гамильтонианом

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + \frac{1}{2}(f_1^2 q_1^2 + \dots + f_n^2 q_n^2) - \frac{\hbar}{2}(f_1 + \dots + f_n).$$

Этот оператор действует по переменным q_j в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$. Предполагаем, что параметр $\hbar$ больше нуля, и рассматриваем для простоты лишь устойчивый случай $f_j > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Определим операторы уничтожения

$$\hat{z}_j = \sqrt{\frac{f_j}{2}}\,q_j + \frac{\hbar}{\sqrt{2f_j}}\,\frac{\partial}{\partial q_j}, \tag{1.1}$$

а также рассмотрим их сопряженные $\hat{z}_j^*$. Выполнены соотношения

$$[\hat{z}_j, \hat{z}_k] = 0, \qquad [\hat{z}_k, \hat{z}_j^*] = \hbar\delta_{j,k}. \tag{1.2}$$

Вводя операторы действия $\widehat{S}_j = \hat{z}_j^*\hat{z}_j$, $j = 1, \dots, n$, можно записать гамильтониан осциллятора в виде скалярного произведения вектора частот и вектор-оператора действия:

$$\widehat{H} = \langle f, \widehat{S} \rangle. \tag{1.3}$$

Операторы действия взаимно коммутируют, их совместный спектр образует решетку с шагом $\hbar$ в n-мерном пространстве: $\mathrm{Spectr}(\widehat{S}) = \{\hbar k \mid k \in \mathbb{Z}_+^n\}$.

Исследование алгебры симметрий оператора $\langle f, \widehat{S} \rangle$ можно свести к исследованию простых *резонансных* случаев, когда набор частот целочисленный, $f \in \mathbb{N}^n$, и простой, т. е. любая пара частот не имеет нетривиального общего делителя (см., например, [10]). Мы рассматриваем именно такие резонансные случаи.

Из соотношений (1.2) следует, что алгебра симметрий резонансного осциллятора, т. е. алгебра операторов в $L^2(\mathbb{R}^n)$, коммутирующих с $\langle f, \widehat{S} \rangle$, порождается генераторами

$$(\hat{z}^*)^r \hat{z}^l, \qquad \text{где} \quad \langle f, l - r \rangle = 0, \qquad l, r \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{1.4}$$

Обратим внимание на то, что генераторы $(\hat{z}^*)^r \hat{z}^l$ не являются независимыми и подчинены ряду тождеств.

В классической механике функции $\overline{z}^r z^l$ с условием $\langle f, l - r \rangle = 0$ называются *резонансными нормальными формами* (см. [5], [29]); они задают алгебру функций, находящихся в инволюции с классическим резонансным осциллятором. В [10] было показано, как из этого бесконечного семейства генераторов можно выделить *конечный базис* “*минимальных*” *генераторов*. В квантовом случае минимальный базис также существует.

После установления этого первого нетривиального факта возникает следующая задача: описать соотношения в ассоциативной алгебре, порожденной этим базисом. Иными словами, требуется задать алгебру симметрий резонансного осциллятора не через ее конкретное представление (минимальными) нормальными формами (1.4), а как абстрактную алгебру с конечным числом образующих и алгебраическими соотношениями. Мы называем ее *резонансной алгеброй.*

В рамках классической механики эту задачу можно переформулировать следующим образом: найти минимальное алгебраическое многообразие с алгебраической пуассоновой структурой и каноническое отображение на него стандартного фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$, находящееся в инволюции с резонансным осциллятором $\langle f, S \rangle$. Поскольку гамильтоновы траектории – это окружности, мы приходим к задаче об алгебраическом описании пуассоновой редукции пространства $\mathbb{R}^{2n}$ по действию окружности (см. детали об общей редукции по действию окружности, например, в [30]). В работе [10] было найдено решение этой задачи для случая общего резонанса. Другие подходы для некоторых вырожденных случаев резонанса развивались в [7], [9].

Отметим, что в пространстве частот можно задать естественное понятие арифметической эквивалентности по действию группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с единичным определителем. Однако для арифметически эквивалентных наборов частот соответствующие резонансные алгебры и их пуассоновы многообразия могут оказаться принципиально различными. Например, в двумерном случае любой набор взаимно простых частот арифметически эквивалентен набору единичных частот 1:1; при этом резонансная алгебра для первого набора задается, вообще говоря, нелинейными коммутативными соотношениями и не сводится ни к какой конечномерной алгебре Ли, а для второго набора резонансная алгебра – это простая трехмерная алгебра Ли $\mathrm{su}(2)$. Таким образом, из арифметической эквивалентности не вытекает алгебраическая эквивалентность. С другой стороны, наборы частот, отличающиеся только перестановкой, конечно, эквивалентны и арифметически, и алгебраически. Далее, набор частот с общим целочисленным множителем алгебраически эквивалентен набору, в котором этот множитель сокращен. Более того, любой набор частот в алгебраическом смысле всегда можно редуцировать к элементарным наборам, в которых частоты попарно взаимно просты (см. [10]). Именно такие элементарные наборы частот мы изучаем в настоящей работе.

Нельзя сказать, что квантовая версия задачи о резонансной алгебре просто дублирует классическую. Конечно, в двухчастотном случае описание квантовой резонансной алгебры достаточно простое, оно было получено в [12], [13] параллельно с описанием классической алгебры. Однако случай квантового многочастотного резонанса при $n \geqslant 3$ оказался намного сложнее своей классической версии.

Случаи трех и более частот принципиально отличаются от двухчастотного тем, что резонансная решетка векторов “рождения” (переходов между точками спектра операторов действия) имеет аномалию [10]. В настоящей работе мы показываем, что в этой аномальной решетке можно выделить максимальные нормальные подрешетки. Они играют существенную роль в описании как пуассонова тензора, так и квантовых соотношений резонансной алгебры. Эти же подрешетки участвуют в конструкции когерентных преобразований; здесь нормальность подрешеток снимает проблему упорядочения операторов “рождения”.

Существование в многочастотном случае некоммутирующих “рождений” заставляет ввести [10] понятие коммутатора между векторами целочисленной решетки. Нормальные резонансные подрешетки можно иначе определить как максимальные коммутативные подрешетки. Коммутатор между векторами решетки задает скобки между координатами “рождение”–“рождение” и “рождение”–“уничтожение” в резонансной пуассоновой алгебре.

В квантовом многочастотном случае приходится вводить еще целый ряд новых операций на целочисленной резонансной решетке. В этом случае для описания резонансной алгебры в большей степени привлекается арифметика. В частности, здесь возникают интересные “структурные полиномы” на целочисленной решетке, которые играют роль структурных функций в квантовых перестановочных соотношениях.

Рассматриваемая задача, помимо описания резонансной алгебры, содержит в себе еще и подзадачу: построение неприводимых представлений этой алгебры. Здесь неожиданно оказывается, что использовать классические геометрические объекты (пуассонов тензор, симплектические листы) для построения квантовых неприводимых представлений в прямой аналогии с методом орбит не удается. Например, размерность квантового неприводимого представления нельзя выразить через классический объем Лиувилля симплектических листов.

В общей схеме квантования известно, что размерность определяется воспроизводящей мерой на квантовом листе, и над ним же строятся неприводимые представления алгебры [31], [32]. В настоящей работе мы даем явное описание квантовых листов для многочастотного осциллятора. Конструкция основана на групповой структуре резонансной решетки, позволяющей ввести универсальное семейство многообразий с комплексной структурой, которое задается лишь резонансными частотами и собственными числами осциллятора. С одной стороны, эти многообразия могут быть вложены в резонансное пуассоново многообразие в качестве замыкания симплектических листов. Тем самым, на них определена классическая замкнутая 2-форма Кириллова (с сингулярностями). Она является кэлеровой по отношению к комплексной структуре, но для нее нет воспроизводящей меры. С другой стороны, на этих же многообразиях можно ввести квантовую кэлерову 2-форму без сингулярностей[1], для которой имеется воспроизводящая мера. Данная мера генерирует формулу для размерности неприводимого представления резонансной алгебры, а также задает гильбертову структуру в пространстве, где действует представление. При этом операторы неприводимого представления конструируются явно в виде дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Порядок этих операторов, вообще говоря, больше единицы. Это соответствует тому факту, что соотношения в алгебре нелинейные, и при этом комплексная поляризация не инвариантна. Только в случае изотропного резонанса, когда все частоты равны единице, резонансная алгебра оказывается алгеброй Ли, поляризация инвариантна и операторы неприводимого представления имеют порядок 1.

Введенные квантовую 2-форму и соответствующую воспроизводящую меру мы называем *объектами квантовой геометрии*. В классическом пределе, вне точек сингулярности, эти объекты переходят соответственно в классическую форму Кириллова и меру Лиувилля на симплектических листах, но в окрестности сингулярностей (на замыкании листов) такого перехода нет. В принципе, можно было бы попытаться обойтись в этой задаче и без квантовой геометрии, используя лишь классические листы и общее геометрическое квантование для случая неинвариантной поляризации и следуя схеме из [34], но при этом вся конструкция была бы на порядок сложнее, операторы неприводимого представления содержали бы сингулярности и были бы псевдодифференциальными, а не дифференциальными, как в нашем варианте (см. обсуждение в [14], [31], [32]).

В настоящей работе мы предъявляем также простую формулу для когерентных преобразований, сплетающих исходное представление алгебры симметрий резонансного осциллятора с неприводимыми представлениями в пространстве антиголоморфных сечений эрмитова линейного расслоения над квантовыми листами. Отметим, что построенные когерентные состояния резонансного осциллятора позволяют также дать реализацию представлений резонансной алгебры в пространстве функций над лагранжевыми подмногообразиями в квантовом листе; она удобна для вычисления квазиклассических асимптотик (см. [13], [14]). В этой реализации, в частности, участвует фазовая функция (действие), порожденная квантовой 2-формой.

§ 2. Минимальные резонансные векторы

Решеткой мы будем называть подмножество векторов в $\mathbb{R}^n$ с целочисленными декартовыми координатами, которое является полугруппой относительно сложения.

---

[1]Эта форма замкнута, но может вырождаться, т. е. она доставляет пример вихревой структуры [33].

Фиксируем вектор частот $f \in \mathbb{N}^n$. *Резонансная решетка* $\mathcal{R} = \mathcal{R}[f]$ определяется как множество целочисленных векторов из $\mathbb{R}^n$, ортогональных вектору частот. Таким образом, $\sigma \in \mathcal{R}$, если все координаты σ_j целые и

$$\langle f, \sigma \rangle = 0.$$

Такие векторы σ мы называем *резонансными*.

Пересечение резонансной решетки $\mathcal{R}$ с декартовыми квадрантами назовем *нормальными подрешетками*. На каждой такой подрешетке ни одна из декартовых координат не меняет знак. Эти подрешетки можно индексировать следующим образом:

$$\mathcal{R}^j, \mathcal{R}^{jk}, \mathcal{R}^{jkl}, \dots . \tag{2.1}$$

Здесь индексы отмечают номера тех декартовых координат, которые должны быть неотрицательными (а остальные должны быть неположительными). На пересечениях этих подрешеток соответствующие координаты тождественно равны нулю; скажем, на пересечении $\mathcal{R}^j \cap \mathcal{R}^{jk}$ координата с номером k равна нулю, координата с номером j неотрицательна, а остальные координаты неположительны.

Общее количество нормальных резонансных подрешеток (2.1) задается формулой

$$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} = 2^n - 2.$$

Вместе они покрывают всю резонансную решетку $\mathcal{R}$.

При $n = 2$ нормальных решеток всего две: $\mathcal{R}^1$ и $\mathcal{R}^2$. Они состоят из целочисленных двумерных векторов, лежащих на прямой, ортогональной вектору частот $f \in \mathbb{N}^2$, либо по одну, либо по другую сторону от начала координат 0.

При $n = 3$ нормальных резонансных подрешеток всего шесть:

$$\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3, \mathcal{R}^{12}, \mathcal{R}^{23}, \mathcal{R}^{31} \subset \mathbb{Z}^3.$$

Они соответствуют шести секторам, на которые декартовы плоскости делят резонансную плоскость, ортогональную вектору частот $f \in \mathbb{N}^3$.

Определение 2.1. Ненулевой резонансный вектор назовем *минимальным*, если его нельзя получить сложением двух ненулевых векторов из нормальной подрешетки.

Множество $\mathcal{M}$ всех минимальных векторов естественно рассматривать как множество элементарных образующих резонансной решетки. В несколько иных терминах понятие минимального вектора было введено в [10]. Там же была доказана теорема о полноте: *любой резонансный вектор представи́м в виде линейной комбинации минимальных векторов с натуральными коэффициентами*. Этот результат можно уточнить.

Подмножество резонансной решетки назовем *нормальным*, если оно лежит в одной из нормальных резонансных подрешеток.

Резонансный вектор назовем *внутренним*, если он принадлежит только одной нормальной подрешетке. В противном случае этот вектор назовем *граничным*.

Теорема 2.1. *Любой резонансный вектор разлагается в сумму минимальных с неотрицательными целыми коэффициентами*:

$$\sigma = \sum_{\varkappa \in \mathcal{M}_\sigma} n_\varkappa^\sigma \varkappa, \qquad n_\varkappa^\sigma \in \mathbb{Z}_+, \quad \mathcal{M}_\sigma \subset \mathcal{M}. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathcal{M}_\sigma$ – множество минимальных векторов в пересечении всех нормальных подрешеток, которым принадлежит вектор σ. В частности, $\mathcal{M}_\sigma$ – нормальное подмножество.

Доказательство. Пусть вектор σ не минимальный. Тогда он разлагается в сумму: $\sigma = \varkappa' + \varkappa''$, где $\varkappa'$, $\varkappa''$ лежат в той нормальной подрешетке, которой принадлежит σ. Если оба вектора $\varkappa'$ и $\varkappa''$ минимальные, то доказательство закончено, если же хоть один из них не минимальный, то опять разлагаем его в сумму двух векторов (из той же нормальной решетки), и т. д. Процедура закончится за конечное число шагов, поскольку на каждом шаге целочисленные компоненты разлагаемого вектора представляются в виде суммы целых чисел того же знака и нулей (по определению нормальной подрешетки).

Отметим, что разложение (2.2), вообще говоря, не единственно.

Например, в случае трех частот $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$ резонансный вектор $\sigma = (2, -4, 2)$ можно разложить в сумму минимальных векторов двумя способами:

$$\sigma = 2\varkappa, \qquad \sigma = \varkappa' + \varkappa'',$$

где $\varkappa = (1, -2, 1)$, $\varkappa' = (2, -1, 0)$, $\varkappa'' = (0, -3, 2)$.

Далее, количество слагаемых в разложении (2.2) не превосходит *общего числа $M \stackrel{\text{def}}{=} \#\mathcal{M}$ минимальных резонансных векторов.* В работе [10] было доказано, что M конечно.

Для случая $n = 3$ мы дадим явное описание множества минимальных резонансных векторов.

Прежде всего, заметим, что достаточно рассмотреть лишь случай взаимно простых частот. Действительно, если какие-то две частоты, скажем f_1 и f_2, имеют общий множитель:

$$f_1 = mf_1', \qquad f_2 = mf_2',$$

то ситуация легко редуцируется к новому набору частот f_1', f_2', f_3. Редукция происходит следующим образом. Сначала все сводится к случаю, когда частота f_3 взаимно проста с m. Затем для этого случая используем следующий факт: *вектор $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ минимальный резонансный для набора частот (f_1, f_2, f_3) тогда и только тогда, когда вектор $(\sigma_1, \sigma_2, m\sigma_3)$ минимальный резонансный для набора частот (f_1', f_2', f_3).*

Таким образом, изучение, например, резонанса $3:6:2$ редуцируется к изучению резонанса[2] $1:1:1$.

Для простоты в настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением случая положительных частот. Рассмотрение вариантов, в которых часть частот отрицательна, проводится аналогично. Итак, мы всюду ниже предполагаем, что выполнены следующие условия:

(A) частоты попарно взаимно простые;

(B) все частоты положительные.

Рассмотрим диофантово уравнение

$$\mu f_1 + \nu f_2 + f_3 = 0 \tag{2.3}$$

[2]Резонансы именно такого вырожденного типа, редуцируемые к резонансу единичных частот, рассматривались в [9].

относительно неизвестных целых чисел μ и ν. Используем следующее простое утверждение.

Лемма 2.1. *Существует единственное решение уравнения* (2.3) *с условием*

$$0 \leqslant \nu \leqslant f_1 - 1. \tag{2.4}$$

В частности, если $f_1 = 1$, то это решение имеет вид $\mu = -f_3$, $\nu = 0$. Если $f_1 \geqslant 2$, то $\nu \geqslant 1$.

Если $f_1 \geqslant 2$, то для каждого $l = 1, 2, \dots, f_1 - 1$ обозначим

$$\nu^{(l)} = l\nu\,(\mathrm{mod} f_1), \qquad \mu^{(l)} = -\frac{lf_3 + \nu^{(l)} f_2}{f_1},$$

где ν – решение диофантова уравнения (2.3) с условием (2.4). Числа $\mu^{(l)}$, $\nu^{(l)}$ целые, причем $0 \leqslant \nu^{(l)} \leqslant f_1 - 1$. Конечно, при $l = 1$ имеем $\mu^{(1)} = \mu$, $\nu^{(1)} = \nu$.

Теорема 2.2. *В трехчастотном случае с условиями* (A), (B) *минимальные векторы в резонансной решетке $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{23} \cup \mathcal{R}^{31} \cup \mathcal{R}^{12} \cup \mathcal{R}^{1} \cup \mathcal{R}^{2} \cup \mathcal{R}^{3}$ устроены следующим образом*:

a) *если $f_1 = 1$, то внутренних минимальных векторов в подрешетке $\mathcal{R}^{23}$ не существует*;

b) *если $f_1 \geqslant 2$, то все внутренние минимальные векторы в подрешетке $\mathcal{R}^{23}$ задаются последовательностью*

$$(\mu^{(l)}, \nu^{(l)}, l), \qquad l = 1, \dots, f_1 - 1, \tag{2.5}$$

причем вектор с номером l сохраняется в последовательности (2.5) *только при условии, что*

$$\nu^{(l)} < \nu^{(j)}, \qquad j = 1, \dots, l - 1. \tag{2.6}$$

Граничные минимальные векторы в $\mathcal{R}^{23}$ имеют вид

$$(-f_3, 0, f_1) \in \mathcal{R}^{23} \cap \mathcal{R}^{3}, \qquad (-f_2, f_1, 0) \in \mathcal{R}^{23} \cap \mathcal{R}^{2}. \tag{2.7}$$

Минимальные векторы нормальных подрешеток $\mathcal{R}^{31}$ и $\mathcal{R}^{12}$ получаются из предыдущего описания векторов в $\mathcal{R}^{23}$ циклической перестановкой индексов $1, 2, 3$. Минимальные векторы в нормальной подрешетке $\mathcal{R}^{j}$ имеют вид $(-\sigma)$, где σ – минимальный вектор в подрешетке $\mathcal{R}^{kl}$, k и l – номера, дополняющие номер j до тройки индексов $1, 2, 3$.

Доказательство приведено в работе [35].

В силу условия (2.6) все числа $\nu^{(l)}$ в последовательности (2.5) должны быть меньше ν. В силу взаимной простоты f_1 и f_3 последовательность (2.5) не может содержать два вектора с одной и той же второй координатой. Поэтому количество членов последовательности (2.5) не превосходит $\nu \leqslant f_1 - 1$. Это дает оценку сверху для числа внутренних минимальных векторов подрешетки $\mathcal{R}^{23}$. Аналогичные оценки получаются для подрешеток $\mathcal{R}^{31}$ и $\mathcal{R}^{12}$ (но частота f_1 заменяется на f_2 или f_3). Таким образом, общее число внутренних минимальных векторов не превосходит $2[(f_1 - 1) + (f_2 - 1) + (f_3 - 1)] = 2(f_1 + f_2 + f_3) - 6$, а граничных минимальных векторов (см. (2.7)) всего шесть.

Следствие 2.1. *В трехчастотном случае, $n = 3$, число минимальных резонансных векторов имеет следующую верхнюю оценку*:

$$M \leqslant 2(f_1 + f_2 + f_3).$$

§ 3. Пуассонова алгебра симметрий резонансного осциллятора

Следуя работе [10], опишем резонансную алгебру классического осциллятора

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2 + f_1^2 q_1^2 + \dots + f_n^2 q_n^2) \tag{3.1}$$

в эллиптическом случае (см. условие (B) в § 2).

На решетке $\mathbb{Z}^n$ введем следующие операции (индекс j пробегает все значения $1, \dots, n$):

$$\begin{aligned}
&\alpha \to |\alpha|, && |\alpha| \overset{\mathrm{def}}{=} |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|, \\
&\alpha \to \theta(\alpha), && \theta(\alpha)_j \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \alpha_j > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha_j \leqslant 0, \end{cases} \\
&\alpha, \beta \to \alpha \cdot \beta, && (\alpha \cdot \beta)_j \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha_j \beta_j, \\
&\alpha \to \alpha_\pm, && \alpha_\pm \overset{\mathrm{def}}{=} \pm\alpha \cdot \theta(\pm\alpha), \\
&\alpha, \beta \to \alpha|\beta, && (\alpha|\beta)_j \overset{\mathrm{def}}{=} \min\{(\alpha_-)_j, (\beta_+)_j\}, \\
&\alpha, \beta \to [\alpha|\beta], && [\alpha|\beta] \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha|\beta - \beta|\alpha, \\
&\alpha, \beta \to \alpha \overset{\circ}{+} \beta, && \alpha \overset{\circ}{+} \beta \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha|\beta + \beta|\alpha, \\
&\alpha \to \overset{\circ}{\alpha}, && \overset{\circ}{\alpha} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}(\alpha \overset{\circ}{+} (-\alpha)) \equiv \frac{1}{2}(\alpha_+ + \alpha_-), \\
&\alpha, \beta \to \alpha \circ \beta, && \alpha \circ \beta = \alpha \cdot \overset{\circ}{\beta}, \\
&\alpha, \beta \to [\alpha, \beta], && [\alpha, \beta] \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha_+ \cdot \beta_- - \alpha_- \cdot \beta_+.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Еще одна полезная операция будет введена далее, в (3.18). Различные свойства операций (3.2) перечислены в [10]. Последняя из операций (3.2) была названа в [10] *коммутатором*. Операция $\overset{\circ}{+}$ была названа *аномалией*.

Отметим, что операция $\circ$, введенная в (3.2), ассоциативна, а коммутатор (3.2) представи́м в виде

$$[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha. \tag{3.3}$$

Однако операция $\circ$ не дистрибутивна по отношению к сложению по второму аргументу:

$$\alpha \circ (\beta + \gamma) = \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma - \alpha \cdot (\beta \overset{\circ}{+} \gamma),$$

где $\overset{\circ}{+}$ обозначает аномалию. Поэтому "тождество Якоби" для коммутатора (3.3) имеет нестандартный вид (см. [10]).

Будем говорить, что векторы решетки коммутируют, если их коммутатор равен нулю. Простое вычисление показывает, что

$$\alpha \overset{\circ}{+} \beta = 0 \iff [\alpha, \beta] = 0 \iff [\alpha|\beta] = 0. \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Векторы из $\mathbb{Z}^n$ коммутируют тогда и только тогда, когда принадлежат одной нормальной подрешетке. Нормальная подрешетка может быть определена как максимальное коммутативное подмножество в данной решетке.*

Доказательство. Сначала заметим, что

$$[\alpha, \beta] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_+ \cdot \beta_- = \alpha_- \cdot \beta_+ = 0.$$

Последнее (двойное) равенство означает, что соответствующие компоненты векторов α и β не могут иметь разные знаки, т.е. эти векторы принадлежат одной и той же нормальной подрешетке.

Рассмотрим резонансную решетку $\mathcal{R} = \mathcal{R}[f]$ в $\mathbb{Z}^n$, порожденную набором частот $f \in \mathbb{N}^n$ осциллятора (3.1). Напомним, что $\mathcal{M}$ – подмножество в $\mathcal{R}$ минимальных резонансных векторов, а $\mathcal{M}_\sigma$ – нормальные подмножества в $\mathcal{M}$, по которым разлагаются резонансные векторы σ согласно (2.2). В силу леммы 3.1 получаем

Предложение 3.1. *Каждое подмножество $\mathcal{M}_\sigma$ коммутативно. Все элементы $\varkappa \in \mathcal{M}_\sigma$ в разложении* (2.2) *коммутируют друг с другом.*

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{N}^\# = \mathbb{C}^M \times \mathbb{R}^n \tag{3.5}$$

и определим на нем связи трех разных типов.

Напомним, что M – число элементов в множестве $\mathcal{M}$. Комплексные координаты на первом сомножителе $\mathbb{C}^M$ в (3.5) будем нумеровать элементами $\sigma \in \mathcal{M}$; обозначим эти координаты через A_σ. Вещественные координаты во втором сомножителе $\mathbb{R}^n$ в (3.5) обозначим через S_j, $j = 1, \dots, n$. Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ обозначим $S^\alpha = S_1^{\alpha_1} \cdots S_n^{\alpha_n}$.

Связи эрмитова типа. Для любого минимального вектора σ противоположный ему вектор $(-\sigma)$ соответствует сопряжению комплексной координаты:

$$\overline{A}_\sigma = A_{-\sigma}. \tag{3.6}$$

Связи коммутативного типа. Если два семейства $\{\rho\}$, $\{\sigma\}$ коммутирующих минимальных векторов задают одинаковые линейные комбинации:

$$\sum_\rho k_\rho\, \rho = \sum_\sigma m_\sigma\, \sigma, \qquad k_\rho, m_\sigma \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

то имеет место соотношение

$$\prod_\rho (A_\rho)^{k_\rho} = \prod_\sigma (A_\sigma)^{m_\sigma}. \tag{3.8}$$

Замечание 3.1. Равенство (3.7) назовем *приводимым*, если коэффициенты k_ρ, m_σ допускают представление в виде суммы: $k_\rho = k'_\rho + k''_\rho$, $m_\sigma = m'_\sigma + m''_\sigma$, такое, что $\sum_\rho k'_\rho \rho = \sum_\sigma m'_\sigma \sigma$, причем $k'_\rho, k''_\rho, m'_\sigma, m''_\sigma \in \mathbb{Z}_+$ и $\big(\sum_\rho k'_\rho\big)\big(\sum_\rho k''_\rho\big)$ не равно нулю. В остальных случаях будем говорить, что равенство (3.7) *неприводимо*. Нетрудно показать, что число неприводимых равенств (3.7), а значит, и число независимых связей коммутативного типа (3.8) конечны.

Связи некоммутативного типа. Если минимальные векторы ρ и σ не коммутируют и $\rho \neq -\sigma$, то выполнено соотношение

$$A_\rho A_\sigma = S^{\rho \overset{\circ}{+} \sigma} \prod_{\varkappa \in \mathcal{M}_{\rho+\sigma}} A_\varkappa^{n_\varkappa^{\rho+\sigma}}, \tag{3.9}$$

где $\overset{\circ}{+}$ – аномалия, введенная в (3.2), $n_\varkappa^{\rho+\sigma}$ – коэффициенты разложения (2.2) вектора $\rho+\sigma$ по минимальным векторам из $\mathcal{M}_{\rho+\sigma}$. Отметим, что если ρ и σ коммутируют, то соотношение (3.9) вытекает из связей коммутативного типа (3.8).

Обозначим через $\mathcal{N}\subset\mathcal{N}^\#$ подмногообразие в пространстве (3.5), заданное совместно всеми уравнениями связей (3.6), (3.8), (3.9).

Для каждого неминимального резонансного вектора σ определим функцию

$$A_\sigma=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \sigma=0,\\ \prod\limits_{\varkappa\in\mathcal{M}_\sigma} A_\varkappa^{n_\varkappa^\sigma}, & \text{если}\quad \sigma\neq 0,\end{cases} \tag{3.10}$$

на подмногообразии $\mathcal{N}$; здесь подмножества $\mathcal{M}_\sigma$ и числа $n_\varkappa^\sigma$ определены согласно (2.2). В силу связей коммутативного типа эта функция не зависит от выбора разложения (2.2) элемента σ по минимальным.

Теперь зададим скобки на $\mathcal{N}$, следуя [10]:

$$\{S_j,S_k\}=0,\qquad \{S_j,A_\rho\}=i\rho_jA_\rho,\qquad \{A_\rho,A_\sigma\}=-if_{\rho,\sigma}(S)A_{\rho+\sigma}, \tag{3.11}$$

где $j,k=1,\dots,n$, векторы ρ,σ принадлежат $\mathcal{M}$, а полиномы $f_{\rho,\sigma}$ на $\mathbb{R}^n$ определяются следующим образом:

$$f_{\rho,\sigma}(s)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{[\rho,\sigma]}{s}\,s^{\rho\overset{\circ}{+}\sigma},\qquad s\in\mathbb{R}^n. \tag{3.12}$$

В (3.12) коммутатор $[\rho,\sigma]$ и аномалия $\rho\overset{\circ}{+}\sigma$ заданы формулами (3.2), а дробь вида $\frac{\gamma}{s}$ использована для краткого обозначения суммы:

$$\frac{\gamma}{s}\equiv\sum_{j=1}^n\frac{\gamma_j}{s_j}. \tag{3.13}$$

Отметим, что в силу (3.4) функции (3.12) не имеют особенности при $s=0$.

Напомним, что функция на пуассоновом многообразии называется *функцией Казимира*, если она находится в инволюции со всеми функциями. Мы будем называть функцию *квазиказимиром*, если на своей нулевой поверхности уровня она находится в инволюции со всеми функциями. Очевидно, нулевая поверхность уровня квазиказимира является пуассоновым подмногообразием в исходном пуассоновом многообразии.

Теорема 3.1. *Формулы* (3.11) *задают скобки Пуассона на многообразии* $\mathcal{N}$. *Функция*

$$C\stackrel{\text{def}}{=}\langle f,S\rangle \tag{3.14}$$

является функцией Казимира на $\mathcal{N}$. *Для каждого минимального вектора* ρ *функция*

$$C_\rho\stackrel{\text{def}}{=}A_\rho A_{-\rho}-S^{2\overset{\circ}{\rho}} \tag{3.15}$$

является квазиказимиром на $\mathcal{N}$; *точнее, имеют место следующие соотношения*:

$$\{C_\rho,S_j\}=\{C_\rho,A_\rho\}=\{C_\rho,A_{-\rho}\}=0,$$
$$\{C_\rho,A_\sigma\}=2i\,\frac{\sigma\circ\rho}{S}\,A_\sigma C_\rho,\qquad \sigma\neq\pm\rho.$$

Здесь $\overset{\circ}{\rho}$ *и* $\sigma \circ \rho$ *определены согласно* (3.2). *В частности, в случае* $n = 2$ *квазиказимир* (3.15) *является функцией Казимира для скобки* (3.11).

Определение 3.1. Подмногообразие $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$, заданное как совместная нулевая поверхность уровня квазиказимиров:

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}\big|_{\{C_\rho = 0 \mid \rho \in \mathcal{M}\}},$$

назовем *резонансным пуассоновым многообразием.*

Гипотеза 3.1. Резонансное пуассоново многообразие $\mathcal{N}_0$ совпадает с $\mathcal{N}$ при $n \geqslant 3$.

Отметим, что на резонансном многообразии в силу связей коммутативного и некоммутативного типов имеют место соотношения

$$A_\rho A_\sigma = S^{\rho \overset{\circ}{+} \sigma} A_{\rho+\sigma} \tag{3.16}$$

для любых минимальных векторов ρ, σ.

Предложение 3.2. *На резонансном многообразии* $\mathcal{N}_0$ *для любых резонансных (не обязательно минимальных) векторов* ρ, σ *выполнены соотношения* (3.16).

Доказательство аналогично доказательству предложения 11.1, которое мы приведем в § 11 при рассмотрении квантового случая.

Следствие 3.1. *Если резонансный вектор* $\varkappa$ *представи́м в виде комбинации резонансных векторов* $\varkappa^{(j)}$, *т. е.*

$$\varkappa = k_1 \varkappa^{(1)} + \dots + k_l \varkappa^{(l)}, \qquad k_j \in \mathbb{N},$$

то на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ *выполнено соотношение*

$$S^{k_1 \varkappa^{(1)} \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} k_l \varkappa^{(l)}} A_\varkappa = \prod_{j=1}^{l} (A_{\varkappa^{(j)}})^{k_j}. \tag{3.17}$$

Здесь использована l*-позиционная аномалия, которая определена следующим образом*:

$$\alpha_1 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} \alpha_l \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{l-1} \big((\alpha_1 + \dots + \alpha_m) \overset{\circ}{+} \alpha_{m+1}\big) = \sum_{m=1}^{l-1} \big((\alpha_l + \dots + \alpha_{m+1}) \overset{\circ}{+} \alpha_m\big). \tag{3.18}$$

В правой части (3.18) *участвует* 2*-позиционная аномалия* $\overset{\circ}{+}$, *введенная в списке операций* (3.2).

Далее, построим отображение $\mathbb{R}^{2n} \to \mathcal{N}^{\#}$, порожденное симметриями (1.4) резонансного осциллятора:

$$A_\sigma(q,p) = \overline{z}^{\,\sigma_+} z^{\sigma_-}, \qquad \sigma \in \mathcal{M}, \tag{3.19}$$

$$S_j(q,p) = \overline{z}_j z_j, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{3.20}$$

Здесь z_j – комплексные координаты на $\mathbb{R}^{2n}$, заданные формулами

$$z_j \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{f_j}{2}}\, q_j + \frac{i}{\sqrt{2 f_j}}\, p_j, \tag{3.21}$$

где q, p – декартовы координаты в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_q \times \mathbb{R}^n_p$.

Лемма 3.2. *Образ симметрийного отображения* (3.19), (3.20), $(q,p) \to (A,S)$, *совпадает с той частью* $\mathcal{N}_0^+$ *резонансного многообразия* $\mathcal{N}_0$, *на которой*

$$S_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ S_n \geqslant 0. \tag{3.22}$$

Размерность резонансного многообразия $\mathcal{N}_0$ *равна* $2n-1$.

Доказательство. Покажем, что функции (3.19), (3.20) удовлетворяют уравнениям связей. Связи эрмитова типа вытекают из очевидного свойства

$$(-\rho)_\pm = \rho_\mp \qquad \forall\,\rho \in \mathbb{Z}^n.$$

Связи некоммутативного типа вытекают из равенства

$$(\rho+\sigma)_\pm = \rho_\pm + \sigma_\pm - (\rho \overset{\circ}{+} \sigma),$$

которое справедливо для любых $\rho, \sigma \in \mathbb{Z}^n$. В частности, если векторы ρ, σ коммутируют, то $\rho \overset{\circ}{+} \sigma = 0$, и тогда мы имеем

$$(\rho+\sigma)_\pm = \rho_\pm + \sigma_\pm.$$

Отсюда вытекают связи коммутативного типа для функций (3.19).

Далее, из соотношений (3.17) вне точек, где $S_j = 0$, любую функцию A_σ, (3.19), можно выразить через независимые функции $A_{\rho^{(1)}}, \ldots, A_{\rho^{(n-1)}}$, $S_1, \ldots, S_n$ (см. далее замечание 4.1). Поэтому $\dim \mathcal{N}_0 = 2n-1$.

Предложение 3.3. *Подмногообразие* $\mathcal{N}_0^+ \subset \mathcal{N}_0$, *заданное неравенствами* (3.22), *является пуассоновым. Симметрийное отображение* (3.19), (3.20) *из* $\mathbb{R}^{2n}$ *в* $\mathcal{N}_0^+$ *пуассоново, т.е. переводит каноническую скобку на* $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_q \times \mathbb{R}^n_p$ *в скобку* (3.11). *Функции Казимира* C, (3.14), *при этом отображении соответствует гамильтониан осциллятора* H, (3.1).

Доказательство повторяет доказательство теоремы 2.5 из [10].

§ 4. Частичная комплексная структура на резонансном многообразии

Покажем, как ввести на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ частичную комплексную структуру, которая порождена симметрийным отображением (3.19), (3.20) и согласована со скобками Пуассона (3.11).

Каждый минимальный вектор $\varkappa \in \mathcal{M}$ и вектор комплексных координат $z = (z_1, \ldots, z_n)$, (3.21), задают функцию $z^\varkappa$ на $\mathbb{R}^{2n}$. Из (3.19), (3.20) следует, что

$$z^\varkappa = \frac{A_{-\varkappa}(q,p)}{S(q,p)^{\varkappa_-}}.$$

Таким образом, при симметрийном отображении (3.19), (3.20) функции $z^\varkappa$ на $\mathbb{R}^{2n}$ соответствует функция

$$W_\varkappa \overset{\text{def}}{=} \frac{A_{-\varkappa}}{S^{\varkappa_-}} \tag{4.1}$$

на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$. Функция (4.1) гладкая везде, кроме некоторого подмножества границы $\partial\mathcal{N}_0^+$, где возможны особенности за счет зануления координат S_j.

Произвольный резонансный вектор σ можно разложить по минимальным согласно (2.2) и определить

$$W_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varkappa\in\mathcal{M}_\sigma} (W_\varkappa)^{n^\sigma_\varkappa}, \tag{4.2}$$

где функция $W_\varkappa$ для минимального $\varkappa$ задана в (4.1). В частности, $W_0 \equiv 1$.

Лемма 4.1. *Функция W_σ, (4.2), на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ не зависит от выбора представления (2.2) вектора $\sigma \in \mathcal{R}$ в виде комбинации минимальных векторов. Для любых $\rho,\sigma \in \mathcal{R}$ имеет место тождество*

$$W_{\rho+\sigma} = W_\rho W_\sigma.$$

Доказательство следует из соотношений (3.8), (3.16).

Теперь покажем, как строятся локальные комплексные координаты на $\mathcal{N}_0$.

Определение 4.1. Набор линейно независимых векторов $\rho^{(1)},\dots,\rho^{(n-1)} \in \mathcal{M}$ назовем *резонансным базисом*, если для любого резонансного вектора $\sigma \in \mathcal{R}$ коэффициенты его разложения по векторам $\rho^{(k)}$ – это целые числа:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} N^{(k)}_\sigma \rho^{(k)}, \qquad N^{(k)}_\sigma \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Лемма 4.2. *Резонансный базис существует.*

(Конкретный вид резонансных базисов см. далее в примерах 4.1, 5.2 и в замечании 6.4.)

Замечание 4.1. Если вектор σ минимальный, то из формулы (4.3) и связей типа (3.17) следует тождество

$$S^{N^{(1)}_\sigma \rho^{(1)} \overset{\circ}{+} \cdots \overset{\circ}{+} N^{(n-1)}_\sigma \rho^{(n-1)}} A_\sigma = \prod_{j=1}^{n-1} (A_{\rho^{(j)}})^{N^{(j)}_\sigma}.$$

С каждым резонансным базисом можно связать комплексные координаты w_k, определенные с помощью (4.1):

$$w_k \stackrel{\text{def}}{=} W_{\rho^{(k)}}, \qquad k = 1,\dots,n-1. \tag{4.4}$$

Как следует из замечания 4.1, функции (4.2) выражаются через эти координаты мероморфно:

$$W_\sigma = w^{N_\sigma} \qquad \biggl(W_\sigma = \prod_{k=1}^{n-1} (w_k)^{N^{(k)}_\sigma}\biggr). \tag{4.5}$$

При переходе от резонансного базиса $\{\rho^{(j)}\}$ к другому резонансному базису $\{\widetilde{\rho}^{(j)}\}$ изменение $w \to \widetilde{w}$ координаты (4.4) происходит по степенному закону:

$$\widetilde{w} = w^{\mathfrak{N}} \qquad \biggl(\widetilde{w}_j = \prod_{k=1}^{n-1} (w_k)^{\mathfrak{N}^j_k}\biggr). \tag{4.6}$$

Здесь целочисленная матрица $\mathfrak{N}$ задается разложением базисных векторов $\widetilde{\rho}^{(j)}$ по базисным векторам $\rho^{(k)}$:

$$\widetilde{\rho}^{(j)} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathfrak{N}^j_k \rho^{(k)}. \tag{4.7}$$

Отметим, что обратная матрица $\mathfrak{N}^{-1}$ также имеет целые коэффициенты.

Теперь все многообразие $\mathcal{N}_0$, за исключением точки 0 (где $S = 0$ и $A_\sigma = 0$ для любого σ), мы покроем картами и каждой карте соотнесем резонансный базис так, чтобы все координатные функции $w_1, \dots, w_{n-1}$, (4.4), отвечающие этому базису, не имели особенностей везде в данной карте.

Пример 4.1. В случае трехчастотного резонанса $f_1 : f_2 : f_3$ рассмотрим три резонансных базиса.

Первый базис состоит из двух (коммутирующих) векторов резонансной решетки:

$$(-f_2, f_1, 0), \qquad (\mu, \nu, 1), \tag{4.8}$$

где μ, ν – решение диофантова уравнения (2.3) с условием (2.4). Эта пара векторов имеет отрицательной только первую компоненту. Поэтому соответствующие данному резонансному базису комплексные координаты, определенные с помощью (4.4), (4.1), не имеют особенностей при $S_1 \neq 0$.

Второй базис получается из (4.8) циклической перенумерацией частот $f_1 : f_2 : f_3 \to f_2 : f_3 : f_1$ и перестановкой компонент $(1,2,3) \to (3,1,2)$ резонансных векторов. Комплексные координаты, отвечающие этому базису, не имеют особенностей при $S_2 \neq 0$.

Третий базис получается еще одной циклической перестановкой. Комплексные координаты здесь не имеют особенностей при $S_3 \neq 0$.

Эти три базиса задают локальные карты (и комплексные координаты в них), покрывающие все резонансное многообразие, за исключением точки 0.

Для общего многочастотного резонанса мы получаем следующий результат.

Теорема 4.1. (a) *Всевозможные резонансные базисы $\{\rho^{(j)}\}$ порождают атлас карт на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0 \setminus \{0\}$ и определяют частичную комплексную структуру типа*[3] $(n-1, 1)$. *Общей для всех карт вещественной координатой служит функция Казимира C*, (3.14), *а локальные комплексные координаты задаются формулой* (4.4). *При переходе из карты в карту комплексные координаты изменяются голоморфно согласно* (4.6).

(b) *Формулы* (4.1), (4.2) *задают представление $\sigma \to W_\sigma$ резонансной решетки $\mathcal{R}$ в пространстве мероморфных функций на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$. При комплексном сопряжении функции W_σ изменяются следующим образом*:

$$\overline{W_\sigma} = S^\sigma W_{-\sigma}, \qquad |W_\sigma|^2 = S^\sigma. \tag{4.9}$$

(c) *Частичная комплексная структура на $\mathcal{N}_0 \setminus \{0\}$ согласована с пуассоновой структурой* (3.11) *в смысле* [31]. *Мероморфные функции* (4.1), (4.2) *находятся в инволюции друг с другом*:

$$\{W_\rho, W_\sigma\} = 0. \tag{4.10}$$

[3] Модельным пространством карты служит $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ с $(n-1)$-й комплексной координатой и одной вещественной координатой (см. [31]).

Кроме того,

$$\{W_\rho, \overline{W_\sigma}\} = i\frac{\rho\cdot\sigma}{S} W_\rho \overline{W_\sigma}, \tag{4.11}$$

где использованы обозначения (3.13).

Доказательство. В доказательстве здесь нуждаются только последние две формулы. Формула (4.10) вытекает из (3.11), (3.16) и свойства коммутатора на решетке $\mathbb{Z}^n$:

$$[-\rho,-\sigma] = -[\rho,\sigma].$$

Аналогично, из (3.11), (3.16) и тождества на $\mathbb{Z}^n$

$$[-\rho,\sigma] + \rho_-\cdot\sigma + \rho\cdot\sigma_- = \rho\cdot\sigma$$

следует (4.11). Теорема доказана.

§ 5. Симплектические листы и резонансные координаты Дарбу

Введем на $\mathcal{N}_0$ *угловые координаты* Φ_σ по формуле

$$A_\sigma = S^{\overset{\circ}{\sigma}} \exp\{i\Phi_\sigma\} \qquad \text{или} \qquad W_\sigma = |W_\sigma| \exp\{-i\Phi_\sigma\}. \tag{5.1}$$

Здесь использовано обозначение $\overset{\circ}{\sigma}$, введенное в (3.2), и учтены уравнения связей (3.6), (3.16):

$$|A_\sigma| = S^{\overset{\circ}{\sigma}}.$$

Лемма 5.1. *Угловые координаты находятся в инволюции друг с другом*:

$$\{\Phi_\sigma, \Phi_\rho\} = 0. \tag{5.2}$$

Кроме того,

$$\{A_\sigma, \Phi_\rho\} = \frac{\rho\circ\sigma}{S} A_\sigma, \qquad \{S_j, \Phi_\rho\} = \rho_j, \tag{5.3}$$

где операция $\rho\circ\sigma$ *определена в* (3.2).

Доказательство. Из (3.11), (3.12) и (3.3) вытекают соотношения

$$\{e^{i\Phi_\sigma}, e^{i\Phi_\rho}\} = 0, \qquad \{A_\sigma, e^{i\Phi_\rho}\} = i\,\frac{\rho\circ\sigma}{S}\,A_\sigma e^{i\Phi_\rho}, \qquad \{S_j, e^{i\Phi_\rho}\} = i\rho_j e^{i\Phi_\rho},$$

а из них следуют (5.2), (5.3). Лемма доказана.

Пусть теперь $\{S = s(C)\}$ – некоторая кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$, параметризованная координатой Казимира (3.14). Представим координаты S на резонансном многообразии в виде

$$S = s(C) + \sum_{k=1}^{n-1} x^{(k)}\rho^{(k)}, \tag{5.4}$$

где $\{\rho^{(k)}\}$ – некоторый резонансный базис, $x^{(k)}\in\mathbb{R}$. Таким образом, $x^{(1)},\dots$ $\dots,x^{(n-1)}$ – это новые координатные функции на резонансном многообразии относительно семейства “начальных точек” $s(C)$ и базиса $\{\rho^{(k)}\}$.

Очевидно, эти функции находятся в инволюции друг с другом, а из равенств (5.3) следует, что их скобки с угловыми координатами равны константам:

$$\{x^{(j)}, x^{(k)}\} = 0, \qquad \{x^{(k)}, \Phi_\sigma\} = N_\sigma^{(k)} \tag{5.5}$$

(числа $N_\sigma^{(k)}$ заданы в (4.3)). В частности, если ввести специальные угловые координаты

$$\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\rho^{(k)}}, \qquad k = 1, \dots, n-1, \tag{5.6}$$

отвечающие данному резонансному базису, то из (5.2), (5.3) получаем канонические скобки:

$$\{x^{(j)}, x^{(k)}\} = 0, \qquad \{\varphi_j, \varphi_k\} = 0, \qquad \{x^{(j)}, \varphi_k\} = \delta_{j,k}.$$

Таким образом, функции $x^{(j)}$, φ_j, $j = 1, \dots, n-1$, и функция Казимира C задают *координаты Дарбу* всюду на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$, кроме подмногообразия особенностей $\partial\mathcal{N}_0^+$.

Рассмотрим теперь симплектические листы в $\mathcal{N}_0$ (т. е. поверхности, на которых скобка (3.11) невырождена). Все листы лежат на подмногообразиях $\{C = \text{const}\}$. Скобка Пуассона на листах порождается скобкой (3.11).

Лемма 5.2. *Симплектические листы в резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ имеют максимальную размерность $2n-2$ (напомним, что $\dim\mathcal{N}_0 = 2n-1$). В области $\mathcal{N}_0^+$ замыкание всех листов компактно, однако если хотя бы одна из частот f_j больше 1, то лист может не совпадать со своим замыканием. Все вырожденные листы лежат на границе $\partial\mathcal{N}_0^+$.*

Пример 5.1. В трехчастотном случае ($n = 3$) резонансное многообразие имеет размерность $\dim\mathcal{N}_0 = 5$. Если все частоты f_j, $j = 1, 2, 3$, равны 1, то имеется только один нульмерный лист: точка 0, а остальные симплектические листы четырехмерны и совпадают со своим замыканием. Если какая-то частота f_j больше 1, то все точки вида

$$\{A_\rho = 0,\ S_k = S_l = 0\} \in \mathcal{N}_0 \tag{5.7}$$

(где набор j, k, l – это перестановка чисел 1, 2, 3) являются нульмерными листами. При этом листы Ω максимальной размерности 4 получаются из своего замыкания $\overline{\Omega}$ путем удаления точек вида (5.7), отвечающих неединичным частотам.

В общем многочастотном случае все введенные выше функции на $\mathcal{N}_0$, в частности комплексные координаты w_j и канонические координаты $x^{(j)}$, φ_j, можно сузить на симплектические листы максимальной размерности.

Теорема 5.1. *Симплектические листы $\Omega \subset \mathcal{N}_0^+ \cap \{C = \text{const}\}$ максимальной размерности в резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ являются кэлеровыми многообразиями относительно комплексной структуры, индуцированной из $\mathcal{N}_0$. Симплектическая (кэлерова) форма на листах имеет вид*

$$\omega = dx \wedge d\varphi, \tag{5.8}$$

где x, φ – координаты (5.4), (5.6), заданные каким-либо резонансным базисом $\{\rho^{(k)}\} \subset \mathcal{R}$ и начальной точкой $s(C)$. Форма (5.8) имеет особенности на множестве $\overline{\Omega} \setminus \Omega$ (которое принадлежит границе $\partial\mathcal{N}_0^+$).

Пример 5.2. В трехчастотном случае рассмотрим резонансный базис

$$\rho^{(1)} = (f_2, -f_1, 0), \qquad \rho^{(2)} = (\mu, \nu, 1), \tag{5.9}$$

где μ, ν – решение диофантова уравнения (2.3) с условием (2.4). Этот базис, в отличие от (4.8), некоммутативный: $[\rho^{(1)}, \rho^{(2)}] \neq 0$. Введем комплексные координаты, отвечающие базису (5.9), по формулам (4.4), (4.1):

$$w_1 = \frac{A_{-\rho^{(1)}}}{S_2^{f_1}}, \qquad w_2 = \frac{A_{-\rho^{(2)}}}{S_1^{|\mu|}}. \tag{5.10}$$

Они не имеют особенностей в области

$$S_1 \neq 0, \qquad S_2 \neq 0. \tag{5.11}$$

На границе этой области лежит вершина $v = (0, C/f_2, 0)$ классического симплекса $\{S \in \mathbb{R}^3_+ \mid \langle f, S\rangle = C\}$, которой соответствует значение комплексных переменных $w_1 = w_2 = 0$.

В координатах (5.10) кэлерова форма на листах Ω задается формулой $\omega = i\sum_{k,l=1,2}(\partial^2 F/\partial\,\overline{w}_k \partial w_l)\, d\,\overline{w}_k \wedge dw_l$ через кэлеров потенциал[4]

$$F = S_1 + S_2 + S_3 - \frac{C}{\omega_2}\ln S_2 + \mathrm{const}\,. \tag{5.12}$$

Здесь функции S_j выражаются через $|w_1|$, $|w_2|$ по формулам (4.9):

$$|w_1|^2 = \frac{S_1^{f_2}}{S_2^{f_1}}, \qquad |w_2|^2 = \frac{S_3 S_2^{\nu}}{S_1^{|\mu|}}, \tag{5.13}$$

с учетом соотношения (3.14). В частности, при $|w_1| \to 0$ получаем

$$S_1 \sim \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_1/f_2} |w_1|^{2/f_2},$$

$$S_2 \sim \frac{C}{f_2} - \frac{f_1}{f_2}\left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_1/f_2} |w_1|^{2/f_2} - \frac{f_3}{f_2}\left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_3/f_2} |w_1|^{2|\mu|/(f_1 f_2)}|w_2|^2,$$

$$S_3 \sim \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_3/f_2} |w_1|^{2|\mu|/f_2}|w_2|^2.$$

Хотя комплексная структура определена и в вершине v классического симплекса, принадлежащей замыканию карты (5.11), вблизи этой вершины кэлеров потенциал (5.12) имеет вид

$$F \sim \mathrm{const} + \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_1/f_2} |w_1|^{2/f_2}, \qquad |w_1| \to 0, \quad |w_2| \to 0.$$

Если $f_2 \neq 1$, то отвечающая этому потенциалу симплектическая форма

$$\omega \sim \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_1/f_2} \frac{i\,d\,\overline{w}_1 \wedge dw_1}{|w_1|^{2(f_2-1)/f_2}}, \qquad |w_1| \to 0, \quad |w_2| \to 0, \tag{5.14}$$

[4]Общая формула для потенциала в n-частотном случае имеет вид $F = |S| - \ln S^v + \mathrm{const}$, где v – вершина классического симплекса (см. (6.1)). Эти формулы выводятся из общего определения кэлеровой формы $\omega = \sum_{k,l}((\{w_k, \overline{w}_l\}))^{-1} dw_l \wedge d\,\overline{w}_k$ с использованием (4.11).

имеет (слабую) особенность в точке замыкания симплектического листа $\overline{\Omega}$, отвечающей $w = 0$. (Аналогичные вычисления в двухчастотном случае см. в [14].)

Мера Лиувилля на листе Ω имеет вид

$$\frac{1}{2}|\omega \wedge \omega| = \frac{S_1 S_2 S_3}{(f_1)^2 S_1 + (f_2)^2 S_2 + (f_3)^2 S_3} \frac{|d\,\overline{w} \wedge dw|}{|w_1|^2 |w_2|^2},$$

а объем Лиувилля всего листа Ω задается формулой

$$\int_{\Omega} \frac{|\omega \wedge \omega|}{2} = \frac{2\pi^2 C^2}{f_1 f_2 f_3}.$$

В n-частотном случае имеем

$$\int_{\Omega} |\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n-1}| = \frac{(2\pi)^{n-1} C^{n-1}}{f_1 \cdots f_n}.$$

Формула для объема Лиувилля следует, например, из представления (5.8) и сводится к вычислению объема симплекса в x-пространстве, заданном неравенствами $S_j \geqslant 0$ (см. (5.4)).

§ 6. Резонансные симплексы

Из формул (1.1) следует, что совместный спектр квантовых операторов действия $\widehat{S}_j = \hat{z}_j^* \hat{z}_j$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ совпадает с решеткой $\hbar\mathbb{Z}_+^n = \{S = \hbar m \mid m \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Эту спектральную решетку можно рассматривать как подмножество классического пространства $\mathbb{R}_+^n$, в котором принимает значения координата S на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0^+$.

Назовем *классическими симплексами* следующие подмножества в $\mathbb{R}_+^n$:

$$\blacktriangle[c] \stackrel{\text{def}}{=} \{S \mid \langle f, S \rangle = c\}, \qquad c \geqslant 0. \tag{6.1}$$

Квантовые резонансные симплексы определим как непустые пересечения классических симплексов со спектральной решеткой $\hbar\mathbb{Z}_+^n$.

Каждому числу $M \in \mathbb{Z}_+$ сопоставим его *диофантов остов*:

$$\boldsymbol{\Delta}[M] \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{Z}_+^n \mid \langle f, k \rangle = M\}. \tag{6.2}$$

Здесь $f = (f_1, \dots, f_n)$ – резонансный набор частот, подчиненный условиям (A), (B).

Обозначим через $d[M]$ число точек в диофантовом остове $\boldsymbol{\Delta}[M]$ и назовем это число *кратностью остова.*

Лемма 6.1. *Все квантовые симплексы имеют вид $\hbar\boldsymbol{\Delta}[M]$ при $d[M] \geqslant 1$, причем*

$$\hbar\boldsymbol{\Delta}[M] \subset \blacktriangle[\hbar M].$$

Спектр осциллятора $\widehat{H} = \langle f, \widehat{S} \rangle$, (1.3), состоит из точек $\hbar M$, для которых $d[M] \geqslant 1$, причем кратность остова $d[M]$ совпадает с кратностью собственного значения $\hbar M$.

Таким образом, квантовый симплекс – это то подмножество в спектре действий, которое соответствует данной точке спектра резонансного осциллятора при отражении $S \to \langle f, S \rangle$.

Лемма 6.2. *Если хотя бы одна из частот* f_j *равна* 1, *то* $d[M] \geqslant 1$ *при всех* $M \geqslant 0$, *т. е. в этом случае квантовый резонансный симплекс соответствует каждому числу* $M \in \mathbb{Z}_+$ *и все остовы* $\mathbf{\Delta}[M]$ *не пусты.*

В общем случае вопрос о том, при каких M диофантов остов не пуст: $\mathbf{\Delta}[M] \neq \varnothing$, достаточно сложен.

Рассмотрим сначала двухчастотный случай ($n = 2$). Воспользуемся следующим утверждением, которое вытекает из леммы 2.1.

Лемма 6.3. *Любое число* $M \in \mathbb{Z}_+$ *можно единственным образом представить в виде*

$$M = M_{12} f_1 f_2 + m_{21} f_1 + m_{12} f_2, \tag{6.3}$$

где числа M_{12}, m_{12}, m_{21} *целые, причем*

$$M_{12} \geqslant -1, \qquad 0 \leqslant m_{12} \leqslant f_1 - 1, \qquad 0 \leqslant m_{21} \leqslant f_2 - 1. \tag{6.4}$$

Зная число M_{12} в представлении (6.3), можно вычислить кратность $d[M]$, как это было сделано в [13].

Лемма 6.4. *Кратность собственного значения* $\hbar M$ *квантового осциллятора* $\widehat{H} = f_1 \widehat{S}_1 + f_2 \widehat{S}_2$ *дается формулой*

$$d[M] = M_{12} + 1.$$

Диофантов остов $\mathbf{\Delta}[M]$ *пуст тогда и только тогда, когда* $M_{12} = -1$ *в представлении* (6.3) *числа* M. *Точка* $\hbar M$ *принадлежит спектру* $\widehat{H}$ *тогда и только тогда, когда* $M_{12} \geqslant 0$ *в представлении* (6.3). *Все собственные значения вида* $\hbar(m_{21} f_1 + m_{12} f_2)$, *где* m_{21}, m_{12} *подчинены* (6.4), *и только они имеют кратность* 1.

Пример 6.1. Пусть $f_1 = 3$, $f_2 = 2$. Тогда

$$d[1] = 0, \qquad d[0] = d[2] = d[3] = d[4] = d[5] = d[7] = 1, \qquad d[6] = 2.$$

В общем n-частотном случае для каждой пары индексов j, $k \in (1, \dots, n)$ рассмотрим представление числа M, аналогичное (6.3):

$$M = M_{jk} f_j f_k + m_{kj} f_j + m_{jk} f_k, \qquad \text{где} \quad 0 \leqslant m_{kj} \leqslant f_k - 1. \tag{6.5}$$

Теорема 6.1. *Справедлива оценка*

$$d[M] \geqslant M_{jk} + 1.$$

Таким образом, если хотя бы для одной пары индексов j, k *выполнено* $M_{jk} \geqslant 0$, *то* $d[M] \geqslant 1$, *т. е. диофантов остов* $\mathbf{\Delta}[M]$ *не пуст, а число* $\hbar M$ *принадлежит спектру осциллятора* $\widehat{H}$, (1.3). *Если при этом* $M_{jk} \geqslant 1$, *то* $d[M] \geqslant 2$, *т. е. собственное значение* $\hbar M$ *кратное.*

Доказательство. Из (6.5) следует, что число M можно представить в виде $M = \langle f, k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}^n_+$, выбрав

$$k_j = l f_k + m_{kj}, \qquad k_k = (M_{jk} - l) f_j + m_{jk}, \qquad k_m = 0, \quad m \neq j, k,$$

где l – любое фиксированное целое из отрезка $0 \leqslant l \leqslant M_{jk}$. Количество способов выбрать l равно $M_{jk} + 1$. Поэтому кратность $d[M]$ не меньше, чем $M_{jk} + 1$. Теорема доказана.

Пример 6.2. Если $M \geqslant (f_j - 1)(f_k - 1)$ для некоторой пары индексов j, k, то $d[M] \geqslant 1$. Это следует из теоремы 6.1 и того, что $M_{jk} \geqslant 0$ (поскольку если $M_{jk} = -1$, то $M = -f_j f_k + m_{kj} f_j + m_{jk} f_k < (f_j - 1)(f_k - 1)$).

Пример 6.3. Если в трехчастотном случае ($n = 3$) все $f_j \leqslant 4$, то $d[M] \geqslant 1$ для любых $M \in \mathbb{Z}_+$. Действительно, так как частоты f_j взаимно простые, то хотя бы одна из них равна 1, а далее используем лемму 6.2.

Пусть теперь $f_1 = 5$, $f_2 = 3$, $f_3 = 2$. Тогда $d[1] = 0$; в этом случае число $\hbar$ не принадлежит спектру осциллятора $5\widehat{S}_1 + 3\widehat{S}_2 + 2\widehat{S}_3$, а все остальные числа $\hbar M$ ($M \geqslant 0$, $M \neq 1$) принадлежат этому спектру.

Среди непустых диофантовых остовов выделяется особый случай, когда они состоят ровно из одной точки, т. е. $d[M] = 1$. Этот случай тривиален.

Далее мы предполагаем, что $d[M] \geqslant 2$.

Точку $r \in \mathbf{\Delta}[M]$ назовем *вершиной* диофантова остова, если существует резонансный базис такой, что для всех $l \in \mathbf{\Delta}[M]$ вектор $l - r$ сонаправлен со всеми векторами базиса (т. е. все коэффициенты разложения $l - r$ по векторам базиса неотрицательны).

Замечание 6.1. Имеет место следующий факт: *каждому резонансному базису соответствует не более одной вершины.* Действительно, если бы для данного базиса $\{\rho\}$ нашлись сразу две вершины r' и r'', то получилось бы, что оба вектора $r' - r''$ и $r'' - r'$ сонаправлены с базисом $\{\rho\}$. Это возможно, только если $r' - r'' = 0$.

Замечание 6.2. Имеет место следующий факт: *разным базисам может отвечать одна и та же вершина.* Например, в случае $f = (1, 1, f_3)$ рассмотрим два резонансных базиса:

$$\rho^{(1)} = (1, -1, 0), \quad \rho^{(2)} = (-f_3, 0, 1) \quad \text{и} \quad \widetilde{\rho}^{(1)} = (1, -1, 0), \quad \widetilde{\rho}^{(2)} = (0, -f_3, 1).$$

Первый базис некоммутативный из примера 5.2, а второй базис коммутативный из примера 4.1. Для каждого $M \in \mathbb{Z}_+$ получим, что точка $r = (0, M, 0)$ является вершиной остова

$$\mathbf{\Delta}[M] = \{l \in \mathbb{Z}_+^3 \mid l_1 + l_2 + f_3 l_3 = M\}$$

по отношению к обоим базисам. Действительно, для каждой точки $l \in \mathbf{\Delta}[M]$ имеем два разложения:

$$l = r + N^{(1)}\rho^{(1)} + N^{(2)}\rho^{(2)} = r + \widetilde{N}^{(1)}\widetilde{\rho}^{(1)} + \widetilde{N}^{(2)}\widetilde{\rho}^{(2)},$$

с неотрицательными коэффициентами

$$N^{(1)} = l_1 + f_3 l_3, \quad N^{(2)} = l_3, \qquad \widetilde{N}^{(1)} = l_1, \quad \widetilde{N}^{(2)} = l_3.$$

Замечание 6.3. Рассмотрим трехчастотный случай. Имеет место следующий факт: *если диофантов остов $\mathbf{\Delta}[M]$ не пуст, то в нем существует вершина (обозначим ее через $r^{(2)}$), отвечающая базису (5.9); координаты этой вершины задаются следующими формулами*[5]:

$$r_3^{(2)} = l_3^* \stackrel{\text{def}}{=} \min_{l \in \mathbf{\Delta}[M]} l_3, \qquad r_1^{(2)} = \min_{\substack{l \in \mathbf{\Delta}[M] \\ l_3 = l_3^*}} l_1, \qquad r_2^{(2)} = \max_{\substack{l \in \mathbf{\Delta}[M] \\ l_3 = l_3^*}} l_2. \tag{6.6}$$

[5]Отметим, что в силу уравнения $f_1 l_1 + f_2 l_2 = M - f_3 l_3^*$ минимум l_1 и максимум l_2 по множеству $\{l \in \mathbf{\Delta}[M] \mid l_3 = l_3^*\}$ достигаются на одном и том же векторе l.

Для доказательства достаточно рассмотреть разложение векторов $l - r^{(2)}$ (при $l \in \mathbf{\Delta}[M]$) по базису (5.9):

$$l_1 - r_1^{(2)} = N^{(1)} f_2 + N^{(2)} \mu, \qquad l_2 - r_2^{(2)} = -N^{(1)} f_1 + N^{(2)} \nu,$$
$$l_3 - r_3^{(2)} = N^{(2)},$$

и показать, что для каждого $l \in \mathbf{\Delta}[M]$ коэффициенты разложения $N^{(1)}$ и $N^{(2)}$ неотрицательны. Оценка $N^{(2)} \geqslant 0$ вытекает из третьего соотношения и формулы для $r_3^{(2)}$, а оценка $N^{(1)} \geqslant 0$ вытекает из первого соотношения, если учесть, что в нем $\mu < 0$, $r_1^{(2)} < f_2$. Действительно, из предположения того, что $N^{(1)} < 0$, следует

$$l_1 = (r_1^{(2)} + N^{(1)} f_2) + N^{(2)} \mu < 0,$$

что противоречит условию $l_1 \geqslant 0$.

Пусть теперь (j, k, s) – циклическая перестановка чисел $(1, 2, 3)$. Рассмотрим резонансный базис, полученный путем соответствующей циклической перестановки базиса (5.9). Тогда по отношению к этому базису следующая точка $r^{(k)}$ является вершиной остова $\mathbf{\Delta}[M]$:

$$r_s^{(k)} = l_s^* \stackrel{\text{def}}{=} \min_{l \in \mathbf{\Delta}[M]} l_s, \qquad r_j^{(k)} = \min_{\substack{l \in \mathbf{\Delta}[M] \\ l_s = l_s^*}} l_j, \qquad r_k^{(k)} = \max_{\substack{l \in \mathbf{\Delta}[M] \\ l_s = l_s^*}} l_k. \tag{6.6a}$$

При этом если в представлении (6.5) число M_{jk} не меньше нуля, то формулы (6.6a) принимают вид

$$r_s^{(k)} = 0, \qquad r_j^{(k)} = m_{kj}, \qquad r_k^{(k)} = M_{jk} f_j + m_{jk}. \tag{6.6b}$$

Замечание 6.4. Формула (6.6b) легко обобщается на n-частотный случай. Пусть в представлении (6.3) число M_{12} неотрицательное. Тогда точка

$$r^{(2)} = \Bigl(m_{21}, M_{12} f_1 + m_{12}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}\Bigr) \tag{6.7}$$

является вершиной диофантова остова $\mathbf{\Delta}[M]$, а в качестве соответствующего резонансного базиса можно взять базис

$$\rho^{(1)} = (f_2, -f_1, 0, 0, \dots, 0, 0),$$
$$\rho^{(2)} = (\mu_3, \nu_3, 1, 0, \dots, 0, 0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\rho^{(n-1)} = (\mu_n, \nu_n, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

Это n-мерный аналог базиса (5.9). В данных формулах μ_l, ν_l – это решение диофантова уравнения

$$\mu_l f_1 + \nu_l f_2 + f_l = 0,$$

подчиненное условию $0 \leqslant \nu_l \leqslant f_1 - 1$ (здесь $l = 3, \dots, n$).

Взяв другую пару индексов j, k, для которых $M_{jk} \geqslant 0$ в представлении (6.5), можно аналогично предъявить другие вершины $r^{(k)}$ остова $\mathbf{\Delta}[M]$.

Отметим, что каждой вершине $r \in \mathbf{\Delta}[M]$ соответствует точка $\hbar r$ в квантовом симплексе; назовем ее *вершиной квантового симплекса.*

Лемма 6.5. *При $\hbar \to 0$ и $M \sim \hbar^{-1}$ вершины квантового симплекса $\hbar\mathbf{\Delta}[M]$ близки к вершинам классического симплекса $\blacktriangle[\hbar M]$.*

Доказательство. При большом M все числа M_{jk} в представлениях (6.5) также велики (и заведомо положительны). Вершина квантового симплекса, сопоставленная каждой паре индексов j, k по формуле вида (6.7), где $j = 1$, $k = 2$, отличается от вершины вида $(0, \frac{\hbar M}{f_2}, 0, \dots, 0)$ классического симплекса на вектор

$$\left(\hbar m_{21}, -\frac{\hbar m_{21} f_1}{f_2}, 0, \dots, 0\right),$$

который стремится к нулю при $\hbar \to 0$. Таким образом, для вершин вида (6.7) утверждение леммы 6.5 выполнено, а остальные вершины квантового симплекса $\hbar\mathbf{\Delta}[M]$ при $M \sim \hbar^{-1} \to \infty$ расположены ближе к вершинам классического симплекса $\blacktriangle[\hbar M]$, чем вершины вида (6.7); поэтому для них утверждение также выполнено.

§ 7. Квантовые листы и пространства голоморфных сечений

Пару $R = (r, \{\rho\})$, состоящую из вершины r и отвечающего ей резонансного базиса $\{\rho\}$, мы назовем *репером* диофантового остова $\mathbf{\Delta}[M]$.

Каждому реперу сопоставим пространство $\mathbb{C}^{n-1}$ как модельное пространство локальной карты. Пусть заданы две карты, занумерованные реперами $R = (r, \{\rho\})$ и $\widetilde{R} = (\widetilde{r}, \{\widetilde{\rho}\})$. Комплексные координаты w и $\widetilde{w}$ в них определяются резонансными базисами $\{\rho\}$ и $\{\widetilde{\rho}\}$ по формуле (4.4). Склейка карт осуществляется по формуле (4.6), в которой $\mathfrak{N}$ – целочисленная матрица перехода (4.7) от базиса $\{\rho\}$ к базису $\{\widetilde{\rho}\}$. Результатом склейки будет некоторое комплексное многообразие. Назовем его *квантовым листом* и обозначим $\Omega_\hbar[M]$.

Напомним, что через $\Omega = \Omega[c]$ мы обозначаем симплектические листы максимальной размерности, лежащие в $\mathcal{N}_0^+ \subset \mathcal{N}_0$ на поверхностях уровня функции Казимира $\{C = c\}$, (3.14). Конструкция комплексной структуры на $\mathcal{N}_0$ (см. формулы (4.1), (4.9)) показывает, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 7.1. *Классический симплектический лист $\Omega = \Omega[\hbar M]$ плотно вложен в квантовый лист $\Omega_\hbar = \Omega_\hbar[M]$, т. е.*

$$\Omega \subset \overline{\Omega} \approx \Omega_\hbar.$$

Это вложение сохраняет комплексную структуру.

Следствие 7.1. *Квантовые листы $\Omega_\hbar$ компактны.*

Отметим, что классическую кэлерову форму ω нельзя расширить с классических листов на квантовые листы при наличии неединичных частот (это видно, например, из (5.14)). Мы покажем, как задать квантовую кэлерову форму на квантовых листах с помощью групповой структуры резонансной решетки, следуя общей идеологии из [31], [32]. Однако сначала введем пространство голоморфных сечений над квантовым листом.

Построим вначале пучок ростков голоморфных функций над квантовым листом и определим гильбертово пространство сечений этого пучка.

На квантовом листе $\Omega_\hbar = \Omega_\hbar[M]$ в карте с номером R рассмотрим семейство функций U_R^t, заданных формулой

$$U_R^t \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\hbar^{|r|}\, r!}{\hbar^{|t|}\, t!}} W_{t-r}, \qquad t \in \mathbf{\Delta}[M]. \tag{7.1}$$

Здесь через r обозначена вершина репера R, а мероморфные функции W_σ определены формулой (4.5) через комплексные координаты в карте с номером R. В данных координатах эти функции являются мономами, поскольку r – вершина остова $\mathbf{\Delta}[M]$.

Если точка t в (7.1) совпадает с какой-то вершиной остова $\mathbf{\Delta}[M]$, то мы будем также использовать другое обозначение:

$$V_R^T \stackrel{\text{def}}{=} U_R^t, \tag{7.2}$$

где T – любой репер с вершиной t. Таким образом, для разных реперов T с одной и той же вершиной t функция V_R^T одна и та же. Очевидно, что $V_R^R \equiv 1$.

В силу группового свойства отображения $\rho \to W_\rho$ (лемма 4.1) при любом $t \in \mathbf{\Delta}[M]$ на пересечении карт с номерами R и Q выполнено соотношение

$$U_Q^t = V_Q^R U_R^t. \tag{7.3}$$

В частности, для любых трех реперов R, L, Q на пересечении соответствующих трех карт имеем тождество

$$V_Q^L = V_Q^R V_R^L. \tag{7.4}$$

Свойство (7.4) означает, что набор голоморфных функций $\{V_Q^R\}$, заданных на пересечениях карт квантового листа $\Omega_\hbar$, можно рассматривать как *функции склейки пучка* $\Pi(\Omega_\hbar)$ *ростков голоморфных функций на* $\Omega_\hbar$.

При этом формула (7.3) показывает, что для любого фиксированного $t \in \mathbf{\Delta}[M]$ набор функций $U^t = \{U_R^t\}$ задает сечение пучка $\Pi(\Omega_\hbar)$. Таким образом, получаем следующий результат.

Лемма 7.1. *Точкам t диофантова остова $\mathbf{\Delta}[M]$ соответствуют сечения U^t пучка $\Pi(\Omega_\hbar)$ ростков голоморфных функций на квантовом листе $\Omega_\hbar$. Эти сечения линейно независимы.*

Введем теперь гильбертову структуру в пространстве сечений пучка $\Pi(\Omega_\hbar)$ так, чтобы набор сечений $\{U^t \mid t \in \mathbf{\Delta}[M]\}$ был ортонормированным:

$$(U^k, U^t) = \delta_{k,t}. \tag{7.5}$$

Тем самым, мы построили некоторое каноническое гильбертово пространство $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$ голоморфных сечений над квантовым листом $\Omega_\hbar$, порожденное групповой структурой резонансной решетки согласно (7.1) и лемме 4.1.

Вид числовых коэффициентов в (7.1) назовем *фоковским*. Он имитирует вид коэффициентов обычного нормированного базиса Фока в пространстве голоморфных функций на евклидовом пространстве [36].

Обозначим через $\mathcal{K}$ *воспроизводящее ядро* гильбертова пространства $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$. Оно определяется как сечение пучка $(\Pi^* \times \Pi)(\Omega_\hbar)$, которое в карте с номером R задано формулой

$$\mathcal{K}_R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_t |\psi_R^t|^2. \tag{7.6}$$

Здесь суммирование ведется по любому ортонормированному базису сечений $\{\psi^t\}$ пучка $\Pi(\Omega_\hbar)$. Хорошо известно [37], что сечение (7.6) не зависит от выбора базиса. Поэтому, выбирая в качестве базиса набор сечений $\{U^t\}$, получаем следующую формулу для воспроизводящего ядра в карте с номером R:

$$\mathcal{K}_R = \sum_{t\in\mathbf{\Delta}[M]} |U_R^t|^2. \tag{7.7}$$

Остается подставить сюда явные выражения (7.1), (4.9).

Теорема 7.1. *Пусть число $M \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $d[M] \geqslant 1$, т. е. диофантов остов $\mathbf{\Delta}[M]$ не пуст, и пусть полином $\mathcal{P}^{[M]}$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ задан формулой*

$$\mathcal{P}^{[M]}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\langle t,f\rangle=M\\ t\in\mathbb{Z}_+^n}} \frac{s^t}{\hbar^{|t|}\,t!}. \tag{7.8}$$

Гильбертово пространство голоморфных сечений $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$ над квантовым листом $\Omega_\hbar = \Omega_\hbar[M]$ имеет размерность $d[M]$. Воспроизводящее ядро этого пространства в карте с номером R вычисляется через полином (7.8) следующим образом:

$$\mathcal{K}_R = \frac{r!\,\hbar^{|r|}}{S^r}\mathcal{P}^{[M]}(S). \tag{7.9}$$

Здесь через r обозначена вершина репера R, а координаты S перенесены на $\Omega_\hbar$ с замыкания симплектического листа $\Omega[\hbar M]$ согласно (4.9), (3.14), т. е.

$$S^\rho = |W_\rho|^2, \qquad \langle f, S\rangle = \hbar M,$$

где $\{\rho\}$ – базис, отвечающий реперу R.

В локальных комплексных координатах w в карте с номером R сечение (7.9) является полиномом

$$\mathcal{K}_R = \sum_{\sigma\in\mathcal{R}_r} \frac{r!}{\hbar^{|\sigma_+|-|\sigma_-|}\,(r+\sigma)!}\overline{w}^{N_\sigma} w^{N_\sigma}. \tag{7.10}$$

Здесь подмножество $\mathcal{R}_r \subset \mathcal{R}$ задано условием

$$\sigma\in\mathcal{R}_r \iff r+\sigma\in\mathbf{\Delta}[M], \tag{7.11}$$

а векторы $N_\sigma \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ определены разложением (4.3) векторов σ по резонансному базису из репера R с вершиной r.

§ 8. Квантовая воспроизводящая мера и квантовая кэлерова структура

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$, определенное формулой (7.5), теперь можно попытаться записать в виде интеграла по мере, следуя [31], [32]:

$$(\varphi,\psi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_\hbar} \rho_{\psi|\varphi}\,dm_\hbar. \tag{8.1}$$

Здесь φ, ψ – два произвольных сечения из $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$, их взаимная *функция плотности* $\rho_{\psi|\varphi}$ на $\Omega_\hbar$ задана формулой

$$\rho_{\psi|\varphi} \overset{\text{def}}{=} \frac{\overline{\psi}\varphi}{\mathcal{K}}, \tag{8.2}$$

а *воспроизводящая мера* $dm_\hbar$ в локальных координатах w в карте с номером R определена равенством

$$dm_\hbar = \mathcal{K}_R \mathcal{J}_R \, d\overline{w}\, dw. \tag{8.3}$$

В этом представлении меры мы используем воспроизводящее ядро $\mathcal{K}$, (7.9), и некоторое сечение $\mathcal{J}$ пучка $(\Pi^{-1*} \times \Pi^{-1})(\Omega_\hbar)$.

Теорема 8.1. *Скалярное произведение в пространстве голоморфных сечений $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$ над квантовым листом $\Omega_\hbar$ вычисляется по формулам* (8.1)–(8.3), *причем сечение $\mathcal{J}$ в* (8.3), *в карте с номером R, имеет вид*

$$\mathcal{J}_R = \frac{S^{r-\Sigma\rho}}{r!\,\hbar^{|r|}} Q^{[M]}(S). \tag{8.4}$$

Здесь r – вершина репера R, $\{\rho\}$ – соответствующий резонансный базис, $\sum\rho = \sum_{j=1}^{n-1}\rho^{(j)}$, $M = \langle f, r\rangle$, а функция $Q^{[M]}$ задана формулой

$$Q^{[M]}(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{s_1\cdots s_n}{\hbar}\int_0^\infty y^{M+|f|-1}\exp\biggl\{-\frac{1}{\hbar}\sum_{j=1}^{n-1} s_j y^{f_j}\biggr\}\,dy. \tag{8.5}$$

Доказательство. Утверждение теоремы эквивалентно проверке “воспроизводящего свойства” для полинома $\mathcal{K}_R$, (7.6)–(7.10):

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}}\int \mathcal{K}_R(w'\overline{w})\mathcal{K}_R(w\overline{w}'')\mathcal{J}_R\, dw\, d\overline{w} = \mathcal{K}_R(w'\overline{w}''),$$

где в аргументах полинома $\mathcal{K}_R$ используется покомпонентное умножение точек из $\mathbb{C}^{n-1}$. Заметим, что если координаты w связаны с координатами z симметрийным отображением

$$w_j = z^{\rho^{(j)}}, \qquad j = 1,\dots,n-1,$$

то по теореме о вычетах полином $\mathcal{K}_R$ можно представить в форме интеграла:

$$\mathcal{K}_R(w'\overline{w}'') = \frac{\hbar^{|r|}\, r!}{2\pi(z'\overline{z}'')^r}\int_0^{2\pi}\exp\biggl\{i\langle f, r\rangle t + \frac{1}{\hbar}\sum_{j=1}^{n} z'_j\overline{z}''_j e^{-if_j t}\biggr\}\,dt.$$

Теперь рассмотрим хорошо известную формулу Фока

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{C}^n}\exp\biggl\{\frac{\langle z',\overline{z}\rangle + \langle \overline{z}'', z\rangle - \langle\overline{z}, z\rangle}{\hbar}\biggr\}\,dz\,d\overline{z} = \exp\biggl\{\frac{\langle z', \overline{z}''\rangle}{\hbar}\biggr\},$$

заменим в ней z'_j на $z'_j e^{-if_j t'}$, z''_j на $z''_j e^{-if_j t''}$ и проинтегрируем по t' и t'' от 0 до 2π. Тогда в силу упомянутого интегрального представления для $\mathcal{K}_R$ получим тождество

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}}\int_{\mathbb{C}^n}\mathcal{K}_R(w'\overline{w})\mathcal{K}_R(w\overline{w}'')\frac{|z^r|^2}{2\pi\hbar^{|r|+1}\, r!}e^{-|z|^2/\hbar}\,dz\,d\overline{z} = \mathcal{K}_R(w'\overline{w}'').$$

Сделаем в этом тождестве под знаком интеграла замену $w_1 = z^{\rho^{(1)}}, \ldots, w_{n-1} = z^{\rho^{(n-1)}}$, $w_n = z^f$. Якобиан замены равен[6]

$$\Big(\langle f, f\rangle \frac{|w_1 \cdots w_n|}{|z_1 \cdots z_n|}\Big)^2.$$

Тогда получим искомое "воспроизводящее свойство" для $\mathcal{K}_R$, в котором плотность $\mathcal{J}_R$ задается формулой

$$\mathcal{J}_R(w\overline{w}) = \frac{1}{2\pi\hbar^{|r|+1}\, r!\, \langle f, f\rangle^2 |w_1 \cdots w_{n-1}|^2} \int_{\mathbb{C}} \frac{|z^r|^2 |z_1 \cdots z_n|^2}{|w_n|^2} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}}\, dw_n\, d\overline{w}_n.$$

Здесь под знаком интеграла координаты z_j выражены через $w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n$ по формулам

$$z_j = w_1^{p_j^{(1)}} \cdots w_n^{p_j^{(n)}},$$

где $p^{(1)}, \ldots, p^{(n)}$ – векторы, составляющие обратную матрицу по отношению к матрице из векторов $\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(n-1)}$, $\rho^{(n)} \equiv f$, т. е.

$$\sum_{l=1}^{n} p_j^{(l)} \rho_k^{(l)} = \delta_{j,k}, \qquad j, k = 1, \ldots, n;$$

при этом $p_j^{(n)} = f_j / \langle f, f\rangle$, а все числа $p_j^{(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$, целые.

Переходя в последнем интеграле к координатам x, φ по формуле

$$w_n = \sqrt{x^{\langle f, f\rangle}} e^{i\varphi}$$

и учитывая, что полярный угол пробегает промежуток $[0, 2\pi\langle f, f\rangle]$, получим новую формулу

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_R = \frac{1}{\hbar^{|r|+1}\, r!} \prod_{k=1}^{n-1} |w_k|^{2(\langle r, p^{(k)}\rangle + |p^{(k)}| - 1)} \\ \times \int_0^\infty x^{\langle f, r\rangle + |f| - 1} \exp\Big\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^{n} x^{f_j} \prod_{k=1}^{n-1} |w_k|^{2p_j^{(k)}} \Big\}\, dx.\end{aligned}$$

Осталось заметить, что вместо $|w_j|$ здесь удобнее использовать координаты $S_1, \ldots, S_n$ (см. (4.9)). После замены $x = S^{f/\langle f, f\rangle} y$ (под знаком последнего интеграла) окончательно получим (8.4), (8.5).

Из теоремы 8.1, в частности, следует, что для любого ортонормированного базиса $\{\psi^t\}$ в пространстве $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$ в силу (7.6) имеем

$$\dim \mathcal{L}(\Omega_\hbar) = \sum_t \|\psi^t\|^2 = \sum_t \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_\hbar} \frac{|\psi^t|^2}{\mathcal{K}}\, dm_\hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_\hbar} dm_\hbar.$$

Поэтому из леммы 6.1 и теоремы 7.1 получаем следующий результат.

[6] Здесь учтено тождество для детерминанта матрицы, составленной из векторов резонансного базиса и вектора частот: $|\det(\rho^{(1)} \cdots \rho^{(n-1)} f)| = \langle f, f\rangle$.

Следствие 8.1. *Кратность собственного значения $\hbar M$ резонансного осциллятора* (1.3) *вычисляется по формуле*

$$d[M] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_\hbar} dm_\hbar. \tag{8.6}$$

Здесь квантовая воспроизводящая мера имеет вид

$$dm_\hbar = (\mathcal{P}^{[M]} Q^{[M]})(S)\, \frac{d\,\overline{w}\, dw}{S^{\Sigma\rho}}, \tag{8.7}$$

где $\mathcal{P}^{[M]}$ и $Q^{[M]}$ заданы в (7.8), (8.5), *через w обозначены комплексные координаты в локальной карте с номером R на квантовом листе $\Omega_\hbar[M]$, а ρ – резонансный базис из репера R.*

Теперь построим на квантовом листе $\Omega_\hbar$ замкнутую 2-форму $\omega_\hbar$, порожденную воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$. В карте с номером R и с комплексными координатами w эта форма задается формулой

$$\omega_\hbar = i\hbar \sum_{l,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \overline{w}_l\, \partial w_j} (\ln \mathcal{K}_R)\, d\,\overline{w}_l \wedge dw_j. \tag{8.8}$$

От выбора карты эта форма не зависит. Мы назовем ее, следуя [31], [32], *квантовой кэлеровой формой* на $\Omega_\hbar$.

Вычислим асимптотику квантовой кэлеровой формы, а также воспроизводящей меры при $\hbar \to 0$.

Лемма 8.1. *Вне окрестности точек, где хотя бы одна координата S_j обращается в нуль, воспроизводящее ядро $\mathcal{K}_R$,* (7.9), *и плотность $\mathcal{J}_R$,* (8.4), *имеют следующие асимптотики при $\hbar \to 0$ и $M \sim 1/\hbar$:*

$$\mathcal{K}_R = c_r \frac{\exp\{|S|/\hbar\}}{S^r} \big(\varkappa(S) + O(\hbar)\big),$$

$$\mathcal{J}_R = \hbar^{-|r|-1/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{r!}\, S^r \exp\biggl\{-\frac{|S|}{\hbar}\biggr\} \biggl(\frac{S_1 \cdots S_n}{S^{\rho^{(1)}+\dots+\rho^{(n-1)}}} \varkappa(S) + O(\hbar)\biggr).$$

Здесь ρ и r – резонансный базис и вершина репера R соответственно, а функция $\varkappa$ и константа c_r заданы формулами

$$\varkappa(S) = (f_1^2 S_1 + \dots + f_n^2 S_n)^{-1/2},$$

$$c_r = \hbar^{|r|+1/2}\, r!\, e^{-|r|} \sqrt{2\pi} (f_1^2 r_1 + \dots + f_n^2 r_n)^{1/2} \sum_{\substack{\langle t-r, f\rangle = 0\\ t \in \mathbb{Z}_+^n}} \frac{r^t}{t!}.$$

Доказательство следует из системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции $\mathcal{K}_R$ и $\mathcal{J}_R$. Эти уравнения приведены далее в замечании 13.1. Асимптотика при $\hbar \to 0$ решения этих уравнений имеет ВКБ-вид:

$$\mathcal{K}_R = \exp\biggl\{\frac{F}{\hbar}\biggr\}(\varphi + O(\hbar)), \qquad \mathcal{J}_R = \exp\biggl\{-\frac{F}{\hbar}\biggr\}(\psi + O(\hbar)),$$

где F – кэлеров потенциал классической симплектической формы ω (см. формулу (5.12)). Для амплитуд φ, ψ получаются простые уравнения, решение которых приводит к формулам, указанным в лемме.

Напомним (предложение 7.1), что квантовый лист $\Omega_\hbar = \Omega_\hbar[M]$ отождествляется с замыканием $\overline{\Omega}$ классического симплектического листа $\Omega = \Omega[\hbar M]$ резонансного многообразия. Из леммы 8.1 и формул (8.7), (8.8) получаем следующий результат.

Теорема 8.2. *В точках квантового листа $\Omega_\hbar$, которые соответствуют точкам классического листа Ω, квантовая кэлерова форма* (8.8) *приближается классической симплектической формой* (5.8), *а воспроизводящая мера* (8.3) *при $\hbar \to 0$, $M \sim 1/\hbar$ приближается классической мерой Лиувилля $dm = \frac{1}{(n-1)!}|\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n-1}|$, а именно*

$$\omega_\hbar = \omega + O(\hbar), \qquad dm_\hbar = dm + O(\hbar). \tag{8.9}$$

В точках квантового листа $\Omega_\hbar$, которые соответствуют граничным точкам $\overline{\Omega} \setminus \Omega$ классического листа, асимптотика (8.9) *нарушается*; *в этих точках классическая симплектическая форма ω и мера dm сингулярны.*

Замечание 8.1. Из (8.9) следует, что при достаточно малом $\hbar$ и $M \sim 1/\hbar$ квантовая кэлерова форма $\omega_\hbar$ невырождена в точках классического симплектического листа. Однако она может вырождаться на его границе, оставаясь гладкой. Невырожденность формы $\omega_\hbar$ в точке границы, соответствующей вершине $r \in \Delta[M]$, имеет место тогда и только тогда, когда все точки, полученные из r с помощью базисных векторов, попадают в квантовый симплекс, т. е.

$$r + \rho^{(j)} \in \Delta[M], \qquad j = 1, \dots, n-1. \tag{8.10}$$

Это следует из явной формулы для $\omega_\hbar$ в комплексных координатах w на квантовом листе, где вершине r соответствует $w = 0$:

$$\omega_\hbar|_{w=0} = i\hbar \sum_{r+\rho^{(j)} \in \Delta[M]} c^r_{\rho^{(j)}}\, d\overline{w}_j \wedge dw_j, \qquad c^r_{\rho^{(j)}} = \frac{r!}{\hbar^{|\rho_+^{(j)}| - |\rho_-^{(j)}|}\,(r + \rho^{(j)})!}.$$

Пример, в котором квантовая форма вырождена, дает резонанс $1 : 2 : 3$ при $M = 2$ в вершине $r = (2, 0, 0)$ с базисом (4.8).

Отметим, что результат, аналогичный теореме 8.2, имеет место для целого ряда других квантовых систем, в которых алгебра симметрий не является алгеброй Ли [13], [14], [31], [32]: квантовые геометрические объекты $\omega_\hbar$, $dm_\hbar$ определены глобально и гладко на $\Omega_\hbar$, в отличие от классических геометрических объектов.

Замечание 8.2. Асимптотические разложения (8.9) могут быть продлены до любого порядка малости по $\hbar$:

$$\omega_\hbar \simeq \omega + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \lambda_k, \qquad dm_\hbar = dm\biggl(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k d_k\biggr). \tag{8.11}$$

Здесь коэффициенты λ_k – замкнутые 2-формы, а коэффициенты d_k – гладкие функции на Ω. При этом каждая d_k задается явными формулами [32] через формы $\omega, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

После подстановки (8.11) в (8.6) получаем формулу для кратности $d[M]$, в которой участвуют лишь первые $n-1$ функций d_k, причем параметр $\hbar$ можно положить равным 1 (см. [32]):

$$d[M] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\Omega[M]} \biggl(1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k\biggr) \frac{1}{(n-1)!} |\omega \wedge \dots \wedge \omega|.$$

§ 9. Когомологии квантового листа

Поскольку квантовый лист $\Omega_\hbar = \Omega_\hbar[M]$ компактен, то все группы когомологий $H^{2k}(\Omega_\hbar)$, где $k = 1, \dots, n-1$, нетривиальны. При этом класс когомологий квантовой кэлеровой формы $\frac{1}{2\pi\hbar}\omega_\hbar$, заданной в (8.8), обязан быть целочисленным [38].

Рассмотрим для простоты случай $n = 3$.

Теорема 9.1. *Нестягиваемые 2-циклы в квантовом листе $\Omega_\hbar[M]$ соответствуют ребрам классического резонансного симплекса $\blacktriangle[\hbar M]$, а именно если (j,k,s) – циклическая перестановка чисел $(1,2,3)$, то ребру, соединяющему j-ю и k-ю вершины, соответствует (положительно ориентированный) цикл $\Sigma_{jk} = \{f_j S_j + f_k S_k = \hbar M\}$. Выполнены формулы*

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{jk}} \omega_\hbar = \biggl[\frac{r_k^{(k)}}{f_j}\biggr]. \tag{9.1}$$

Здесь $r^{(k)}$ – вершина (6.6a) диофантова остова $\mathbf{\Delta}[M]$, а квадратными скобками обозначена целая часть числа. Если $M_{jk} \geqslant 0$ в представлении (6.5), то формула (9.1) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{jk}} \omega_\hbar = M_{jk}. \tag{9.1a}$$

При $\hbar \to 0$, $M \sim 1/\hbar$ целое число (9.1) приближается величиной

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{jk}} \omega = \frac{M}{f_j f_k}, \tag{9.2}$$

где ω – классическая симплектическая форма на листе.

Доказательство. Пусть для определенности $j = 1$, $k = 2$. Вместо комплексных координат w_j, (5.10), отвечающих резонансному базису $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, (5.9), введем вещественные координаты X_j, Φ_j (см. (5.1)):

$$w_j = \sqrt{X_j}\exp\{-i\Phi_j\}, \qquad 0 < X_j < \infty, \quad 0 \leqslant \Phi_j < 2\pi.$$

На ребре $\{S_3 = 0\}$ классического симплекса $\blacktriangle[\hbar M]$, соединяющем первую и вторую вершины, имеем $w_2 = 0$ (см. (5.13)), и поэтому

$$\omega_\hbar\big|_{\Sigma_{12}} = \hbar \frac{\partial}{\partial X_1} \biggl(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \ln \mathcal{K}_R(X)\biggr)\bigg|_{X_2\to 0} dX_1 \wedge d\Phi_1.$$

При движении вдоль ребра $\{S_3 = 0\}$ от первой вершины, где $S_1 = \hbar M/f_1$, $S_2 = 0$, ко второй вершине, где $S_2 = \hbar M/f_2$, $S_1 = 0$, величина X_1 меняется от ∞ до 0 (см. (5.13)). Поэтому

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{12}} \omega_\hbar = \biggl(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \ln \mathcal{K}_R(X)\biggr)\bigg|_{\substack{X_1\to\infty\\ X_2\to 0}}.$$

Напомним, что полином $\mathcal{K}_R$ задан формулами (7.10), (7.11):

$$\mathcal{K}_R(X) = \sum_{\sigma\in\mathcal{R}_r} c^r_\sigma X_1^{N^{(1)}_\sigma} X_2^{N^{(2)}_\sigma}, \qquad c^r_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r!}{\hbar^{|\sigma_+|-|\sigma_-|}\,(r+\sigma)!},$$

где числа $N^{(j)}_\sigma \in \mathbb{Z}_+$ определяются разложением (4.3):

$$\sigma = N^{(1)}_\sigma \rho^{(1)} + N^{(2)}_\sigma \rho^{(2)}.$$

При $X_2 = 0$ в сумме, задающей полином $\mathcal{K}_R$, остаются лишь слагаемые с $N^{(2)}_\sigma = 0$. Отсюда получаем

$$\left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \ln \mathcal{K}_R(X)\right)\Big|_{\substack{X_1\to\infty\\ X_2\to 0}} = \max_{N^{(1)}_\sigma \rho^{(1)}\in\mathcal{R}_r} N^{(1)}_\sigma.$$

Включение $N^{(1)}_\sigma\rho^{(1)} \in \mathcal{R}_r$ означает, что вектор $r + N^{(1)}_\sigma\rho^{(1)}$ содержится в квантовом симплексе $\mathbf{\Delta}[M]$, где $M = \langle f, r\rangle$. Это равносильно выполнению неравенств

$$r_l + N^{(1)}_\sigma \rho^{(1)}_l \geqslant 0, \qquad l = 1, 2, 3.$$

Напомним, что базису (5.9), который мы используем, соответствует вершина $r \equiv r^{(2)}$, (6.6). Таким образом, приходим к системе неравенств

$$r^{(2)}_1 + N^{(1)}_\sigma f_2 \geqslant 0, \qquad r^{(2)}_2 - N^{(1)}_\sigma f_1 \geqslant 0, \qquad r^{(2)}_3 \geqslant 0.$$

Из второго неравенства очевидно, что максимальное значение $N^{(1)}_\sigma$, при котором выполняется указанная система неравенств, равно $[\frac{r^{(2)}_2}{f_1}]$. Таким образом,

$$\max_{N^{(1)}_\sigma \rho^{(1)}\in\mathcal{R}_r} N^{(1)}_\sigma = \left[\frac{r^{(2)}_2}{f_1}\right],$$

что и доказывает формулу (9.1).

Если $M_{12} \geqslant 0$ в представлении (6.5), то в силу формул (6.6b), задающих вершину, имеем

$$r^{(2)}_2 = M_{12} f_1 + m_{12}.$$

Здесь $0 \leqslant m_{12} \leqslant f_1 - 1$. Поэтому в данном случае $[\frac{r^{(2)}_2}{f_1}] = M_{12}$, и мы получаем формулу (9.1a).

Далее, в силу теоремы 8.2 интеграл (9.1) при $\hbar \to 0$ приближается величиной $\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\Sigma_{jk}} \omega$, где ω – классическая симплектическая форма на листе. В данном случае ее удобно записать в виде (5.8) в координатах Дарбу x_1, x_2, (5.4), φ_1, φ_2, (5.6). Выберем в (5.4) следующее семейство начальных точек: $s(\hbar M) = \hbar r^{(2)}$; тогда

$$S_1 = \hbar r^{(2)}_1 + f_2 x_1 + \mu x_2, \qquad S_2 = \hbar r^{(2)}_2 - f_1 x_1 + \nu x_2, \qquad S_3 = \hbar r^{(2)}_3 + x_2,$$

откуда получаем, что на ребре $\{S_3 = 0\}$, соединяющем первую и вторую вершины, координата x_2 не меняется: $x_2 = -\hbar r^{(2)}_3$. Следовательно,

$$\omega\big|_{\Sigma_{12}} = dx_1 \wedge d\varphi_1.$$

Здесь φ_1 меняется от 0 до 2π, а при движении вдоль ребра от первой вершины ко второй координата x_1 меняется от $\hbar(r_2^{(2)} - r_3^{(2)}\nu)/f_1$ до $\hbar(\mu r_3^{(2)} - r_1^{(2)})/f_2$. Поэтому справедлива формула (9.2):

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\Sigma_{12}} \omega = \frac{1}{f_1 f_2}\bigl(f_1 r_1^{(2)} + f_2 r_2^{(2)} - (f_1\mu + f_2\nu) r_3^{(2)}\bigr) = \frac{M}{f_1 f_2}.$$

(Здесь учтены диофантово уравнение (2.3) и равенство $\langle f, r^{(2)}\rangle = M$.)

Целые числа M_{jk}, (9.1a), мы назовем *главными квантовыми числами* листа $\Omega_\hbar[M]$. Отметим, что эти числа не являются независимыми, поскольку все они однозначно задаются числом M (см. также следствие 9.2).

Коэффициенты m_{jk} в представлении (6.5) назовем *присоединенными числами* листа $\Omega_\hbar[M]$. Из формул (9.2) и (6.5) получаем

Следствие 9.1. *Класс когомологий классической симплектической формы на листе задается формулой*

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\Sigma_{jk}} \omega = M_{jk} + \frac{m_{jk}}{f_j} + \frac{m_{kj}}{f_k}, \tag{9.3}$$

где M_{jk} – главные, а m_{jk} – присоединенные числа листа, причем

$$0 \leqslant \frac{m_{jk}}{f_j} + \frac{m_{kj}}{f_k} \leqslant 2 - \left(\frac{1}{f_j} + \frac{1}{f_k}\right) < 2.$$

Замечание 9.1. Из (9.3) следует, что если хотя бы одна из частот f_j не равна 1, то класс когомологий классической симплектической формы $\omega/(2\pi\hbar)$ на листах с ненулевыми присоединенными числами не будет целочисленным. Именно поэтому форма ω не удобна для построения квантовых геометрических конструкций.

Теперь вычислим класс квантовой 4-формы $\omega_\hbar \wedge \omega_\hbar$. Поскольку при $n = 3$ листы $\Omega[\hbar M] \subset \Omega_\hbar[M]$ четырехмерны, то указанная 4-форма задает их квантовый объем.

Теорема 9.2. *В трехчастотном случае $(n = 3)$ квантовый объем вычисляется следующим образом*:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{\Omega} \frac{\omega_\hbar \wedge \omega_\hbar}{2} = \frac{1}{2} \underset{\substack{(j,k,s)\\=(1,2,3)}}{\mathfrak{S}} \bigl(\widetilde{r}_j - r_j^{(s)}\bigr)\left[\frac{r_s^{(s)}}{f_k}\right], \tag{9.4}$$

где вершины $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, $r^{(3)}$ определены, как в замечании 6.3, $\widetilde{r}$ – одна из этих трех вершин, а сумма $\mathfrak{S}$ берется по всем циклическим перестановкам тройки индексов $(1,2,3)$. Например, если $\widetilde{r} = r^{(2)}$, то правая часть (9.4) имеет вид

$$\frac{1}{2}\left(\bigl(r_1^{(2)} - r_1^{(3)}\bigr)\left[\frac{r_3^{(3)}}{f_2}\right] + \bigl(r_2^{(2)} - r_2^{(1)}\bigr)\left[\frac{r_1^{(1)}}{f_3}\right]\right).$$

Здесь и в формуле (9.4) квадратные скобки обозначают целую часть числа. Если $M_{12} \geqslant 0$, $M_{23} \geqslant 0$ и $M_{31} \geqslant 0$ в представлении (6.5), то (9.4) принимает вид

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{\Omega} \frac{\omega_\hbar \wedge \omega_\hbar}{2} = \frac{1}{2}\bigl(M_{ks}(M_{sj} f_s + m_{sj}) + M_{jk} m_{js}\bigr). \tag{9.4a}$$

Здесь (j,k,s) – любая циклическая перестановка тройки $(1,2,3)$.

Доказательство теоремы 9.2 приведено в приложении.

Отметим, что при $\hbar \to 0$, $M \sim 1/\hbar$ квантовый вихревой объем (9.4) приближается классическим объемом

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_\Omega \frac{\omega\wedge\omega}{2} = \frac{M^2}{2f_1f_2f_3}. \tag{9.5}$$

При этом оба числа (9.4a) и (9.5) приближают размерность $d[M]$, (8.6), но не совпадают с ней.

Кроме того, теорема 9.2 дает интересные тождества для главных и присоединенных квантовых чисел.

Следствие 9.2. *Пусть $n=3$. Предположим, что в представлении (6.5) все три числа M_{12}, M_{23}, M_{31} неотрицательны. Тогда выполнены тождества*

$$\begin{aligned} M_{31}M_{12}f_1 + M_{31}m_{12} + M_{23}m_{21} &= M_{12}M_{23}f_2 + M_{12}m_{23} + M_{31}m_{32} \\ &= M_{23}M_{31}f_3 + M_{23}m_{31} + M_{12}m_{13}. \end{aligned}$$

Доказательство следует из формулы (9.4a): все три указанных числа совпадают с удвоенным квантовым объемом.

§ 10. Квантовая резонансная алгебра

Для любых $a\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{Z}$ определим

$$(a)_m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (a+\hbar)\cdots(a+m\hbar) & \text{при} \quad m\geqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad m=0, \\ a(a-\hbar)\cdots(a-\hbar(|m|-1)) & \text{при} \quad m\leqslant -1. \end{cases} \tag{10.1}$$

Для векторов $s\in\mathbb{R}^n$, $\rho\in\mathbb{Z}^n$ положим

$$(s)_\rho \stackrel{\text{def}}{=} (s_1)_{\rho_1}\cdots(s_n)_{\rho_n}, \tag{10.1a}$$

где каждый из сомножителей задается с помощью (10.1).

Введенные операции (10.1), (10.1a) являются обобщением известных “символов Похгаммера” в случае отрицательных нижних индексов. При нашем модифицированном определении этих символов выполняется важное свойство, сформулированное в следующей лемме.

Лемма 10.1. *Операция $\rho\to(s)_\rho$ обладает аналогом группового свойства*:

$$(s)_{\rho+\sigma} = \frac{(s+\hbar\sigma)_\rho (s)_\sigma}{(s+\hbar\sigma)^2_{[\sigma|\rho]}},$$

где вектор $[\sigma|\rho]$ задан согласно (3.2). В частности, если $[\rho,\sigma]=0$ (см. (3.2)), то $(s)_{\rho+\sigma}=(s+\hbar\sigma)_\rho(s)_\sigma$.

Далее, для пары векторов $\rho,\sigma\in\mathbb{Z}^n$ определим *структурный полином* $g_{\rho,\sigma}$ на $\mathbb{R}^n$ формулой

$$g_{\rho,\sigma}(s) \stackrel{\text{def}}{=} (s-\hbar\rho)_{[\sigma|\rho]}, \qquad s\in\mathbb{R}^n. \tag{10.2}$$

Структурные полиномы $g_{\rho,\sigma}$ обладают целым рядом интересных свойств. Мы приведем здесь лишь несколько тождеств, которые понадобятся для дальнейшего изложения.

Лемма 10.2. *Выполнены следующие тождества*:

1) *если* $[\rho,\sigma]=0$ (*см.* (3.2)), *то* $g_{\rho,\sigma}(s)\equiv 1$,

2) $g_{\rho,\sigma}(s)g_{\rho+\sigma,\varkappa}(s)=g_{\rho,\sigma+\varkappa}(s)g_{\sigma,\varkappa}(s-\hbar\rho)$,

3) $g_{\rho,\sigma}(s+\hbar\rho+\hbar\sigma)=g_{-\sigma,-\rho}(s)$,

а также их следствия:

4) $g_{\rho,-\rho}(s)=g_{-\rho,\rho}(s-\hbar\rho)$,

5) *если* $[\rho,\sigma]=0$, *то* $g_{-\rho,\sigma}(s)g_{-\rho,\rho}(s-\hbar\sigma)=g_{\sigma,-\rho}(s)g_{-\rho,\rho}(s)$,

6) *если* $[\rho',\rho'']=[\sigma',\sigma'']$, *то* $g_{\rho',\sigma'}(s-\hbar\rho'')g_{\rho'+\sigma',\sigma''}(s-\hbar\rho'')g_{\rho'',\rho'+\sigma'+\sigma''}(s)=g_{\rho'+\rho'',\sigma'+\sigma''}(s)$.

Теперь зададим квантовую резонансную алгебру. Ее образующие по аналогии с классическими координатами A_σ, S_j будем обозначать через $\mathbf{A}_\sigma$, $\mathbf{S}_j$, где $j=1,\dots,n$, а вектор σ пробегает множество $\mathcal{M}$ минимальных резонансных векторов.

Связи (3.6), (3.8), (3.9) и скобки Пуассона (3.11) мы заменим квантовыми связями и коммутационными соотношениями между образующими $\mathbf{A}_\sigma$, $\mathbf{S}$.

Квантовые связи эрмитова типа задаются следующим образом:

$$\mathbf{S}_j^*=\mathbf{S}_j,\qquad \mathbf{A}_\sigma^*=\mathbf{A}_{-\sigma} \tag{10.3}$$

для любого $j=1,\dots,n$ и любого $\sigma\in\mathcal{M}$.

Квантовые связи коммутативного типа задаются следующим образом:

$$\prod_\rho(\mathbf{A}_\rho)^{k_\rho}=\prod_\sigma(\mathbf{A}_\sigma)^{m_\sigma} \tag{10.4}$$

для любых семейств коммутирующих векторов $\rho,\sigma\in\mathcal{M}$ и чисел $k_\rho,m_\sigma\in\mathbb{N}$ таких, что

$$\sum_\rho k_\rho\rho=\sum_\sigma m_\sigma\sigma.$$

Квантовые связи некоммутативного типа задаются следующим образом: если минимальные векторы ρ и σ не коммутируют и $\rho\neq-\sigma$, то выполнено соотношение

$$\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma=g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\prod_{\varkappa\in\mathcal{M}_{\rho+\sigma}}(\mathbf{A}_\varkappa)^{n_\varkappa^{\rho+\sigma}}, \tag{10.5}$$

где $g_{\rho,\sigma}$ – структурный полином (10.2), а $n_\varkappa^{\rho+\sigma}$ – коэффициенты разложения (2.2) вектора $\rho+\sigma$ по минимальным векторам из $\mathcal{M}_{\rho+\sigma}$.

Коммутационные соотношения задаются следующим образом:

$$[\mathbf{S}_j,\mathbf{S}_k]=0,\qquad [\mathbf{S}_j,\mathbf{A}_\rho]=\hbar\rho_j\mathbf{A}_\rho,\qquad [\mathbf{A}_{-\rho},\mathbf{A}_\rho]=\hbar F_{-\rho,\rho}(\mathbf{S}) \tag{10.6}$$

для любых $j,k=1,\dots,n$ и $\rho\in\mathcal{M}$, где полиномы $F_{\rho,\sigma}$ заданы формулой

$$F_{\rho,\sigma}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{\hbar}(g_{\rho,\sigma}-g_{\sigma,\rho}). \tag{10.7}$$

Замечание 10.1. Множество связей некоммутативного типа (10.5) состоит из коммутационных соотношений

$$[\mathbf{A}_\rho,\mathbf{A}_\sigma]=\hbar F_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\prod_{\varkappa\in\mathcal{M}_{\rho+\sigma}}(\mathbf{A}_\varkappa)^{n_\varkappa^{\rho+\sigma}}$$

и антикоммутационных соотношений

$$[\mathbf{A}_\rho, \mathbf{A}_\sigma]_+ = \big(g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S}) + g_{\sigma,\rho}(\mathbf{S})\big) \prod_{\varkappa\in\mathcal{M}_{\rho+\sigma}} (\mathbf{A}_\varkappa)^{n_\varkappa^{\rho+\sigma}}. \tag{10.5a}$$

Назовем соотношения (10.5a) *актуальными связями некоммутативного типа*.

Множество связей коммутативного типа (10.4) тоже содержит коммутационные соотношения. Это связи (10.4), соответствующие векторным равенствам $\rho+\sigma=\sigma+\rho$ для векторов $\rho,\sigma\in\mathcal{M}$ из одной нормальной подрешетки. Исключив коммутационные соотношения из множества связей (10.4), мы получим *актуальные связи коммутативного типа*.

Таким образом определенные актуальные связи не все являются независимыми. Число независимых актуальных связей равно $M-n+1$, где M – число минимальных векторов.

Определение 10.1. *Резонансной алгеброй* $\mathcal{A}$ назовем алгебру с инволюцией, порожденную образующими $\mathbf{A}_\sigma$, $\sigma\in\mathcal{M}$, $\mathbf{S}_j$, $j=1,\dots,n$, и соотношениями (10.3)–(10.6).

По аналогии с (3.10) каждому неминимальному резонансному вектору σ сопоставим следующий элемент $\mathbf{A}_\sigma$ резонансной алгебры:

$$\mathbf{A}_\sigma = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{если} \quad \sigma=0,\\ \prod_{\varkappa\in\mathcal{M}_\sigma} \mathbf{A}_\varkappa^{n_\varkappa^\sigma}, & \text{если} \quad \sigma\ne 0; \end{cases} \tag{10.8}$$

здесь подмножества $\mathcal{M}_\sigma$ и числа $n_\varkappa^\sigma$ определены согласно (2.2). В силу связей коммутативного типа (10.4) это обозначение корректно, т. е. не зависит от разложения вектора σ по минимальным.

С помощью этого обозначения запишем (10.5) в виде

$$\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma = g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma}$$

(здесь $\rho,\sigma\in\mathcal{M}$, $\rho\ne-\sigma$).

Отсюда и из (10.6) получим, что для любых минимальных векторов ρ, σ имеет место следующее коммутационное соотношение:

$$[\mathbf{A}_\rho, \mathbf{A}_\sigma] = \hbar F_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma}, \tag{10.9}$$

где $F_{\rho,\sigma}$ – полиномы (10.7).

Выпишем также ряд полезных перестановочных соотношений, вытекающих из связей (10.4), (10.5) и коммутационных соотношений (10.6).

Следствие 10.1. *Образующие резонансной алгебры $\mathcal{A}$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям*:

(a) *если $\rho,\sigma\in\mathcal{M}$, $\rho\ne-\sigma$, то $g_{\sigma,\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma = g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_\rho$*;

(b) *если $\rho\in\mathcal{M}$, P – полином, $k\in\mathbb{N}$, то $(\mathbf{A}_\rho)^kP(\mathbf{S}) = P(\mathbf{S}-\hbar k\rho)(\mathbf{A}_\rho)^k$*;

(c) *если $\rho\in\mathcal{M}$, $k\in\mathbb{N}$, то $[\mathbf{A}_{-\rho}, (\mathbf{A}_\rho)^k] = g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S})(\mathbf{A}_\rho)^{k-1} - (\mathbf{A}_\rho)^{k-1}g_{\rho,-\rho}(\mathbf{S})$*.

При доказательстве соотношения (c) нужно учесть, что структурные полиномы удовлетворяют тождеству 4) из леммы 10.2.

Отметим, что при $\hbar\to 0$ для любого $s\in\mathbb{R}^n$ и любых $\rho,\sigma,\sigma_j\in\mathbb{Z}^n$, $j=1,\dots,l$, $l\geqslant 2$, мы имеем

$$(s)_{[\rho|\sigma]} = s^{\rho\overset{\circ}{+}\sigma} + O(\hbar), \qquad g_{\rho,\sigma}(s) = s^{\rho\overset{\circ}{+}\sigma}\bigg(1+\hbar\frac{\rho\&\sigma}{s} + O(\hbar^2)\bigg),$$

где

$$\rho\&\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\sigma_- - \rho_+)\cdot(\sigma|\rho) + \frac{1}{2}(\rho_- - \sigma_+)\cdot(\rho|\sigma) + \frac{1}{2}(\rho \overset{\circ}{+} \sigma) - \frac{1}{2}[\rho,\sigma].$$

Отсюда получаем

$$F_{\rho,\sigma}(s) = -s^{\rho\overset{\circ}{+}\sigma}\,\frac{[\rho,\sigma]}{s} + O(\hbar).$$

Следствие 10.2. *При $\hbar \to 0$ квантовая резонансная алгебра $\mathcal{A}$ соответствует пуассоновой алгебре функций на резонансном многообразии $\mathcal{N}$.*

Доказательство. Достаточно сравнить квантовые и классические коммутационные соотношения (10.6), (10.9) и (3.11), а также квантовые и классические уравнения связей (10.3)–(10.5) и (3.6), (3.8), (3.9) и учесть вычисленные асимптотики. Например, при $\hbar \to 0$ коммутационное соотношение (10.9) в силу асимптотической формулы

$$F_{\rho,\sigma}(s) = -f_{\rho,\sigma}(s) + O(\hbar)$$

переходит в третье соотношение (3.11).

Два элементарных свойства резонансной алгебры приведены в следующей теореме.

Теорема 10.1. *Центр резонансной алгебры $\mathcal{A}$ содержит элемент*

$$\mathbf{C} = f_1\mathbf{S}_1 + \dots + f_n\mathbf{S}_n. \tag{10.10}$$

Резонансная алгебра имеет представление

$$\mathbf{A}_\sigma \to \widehat{A}_\sigma, \qquad \mathbf{S}_j \to \widehat{S}_j \tag{10.11}$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ операторами симметрий резонансного осциллятора

$$\widehat{S}_j = \hat{z}_j^*\hat{z}_j, \qquad \widehat{A}_\sigma = (\hat{z}^*)^{\sigma_+}\hat{z}^{\sigma_-}. \tag{10.12}$$

В этом представлении элемент (10.10) совпадает с гамильтонианом осциллятора (1.3).

Доказательство. То, что операторы (10.12) удовлетворяют всем уравнениям связей и коммутационным соотношениям (10.3)–(10.6), вытекает из простых формул перестановки

$$\hat{z}\widehat{S}_j = (\widehat{S}_j + \hbar)\hat{z}_j, \qquad \hat{z}_j^m(\hat{z}_j^*)^m = (\widehat{S}_j)_m, \qquad (\hat{z}_j^*)^m\hat{z}_j^m = (\widehat{S}_j)_{-m}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема доказана.

§ 11. Вакуумные векторы и неприводимые представления

Рассмотрим теперь абстрактное представление резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Операторы представления будем обозначать теми же буквами $\mathbf{S}_j$, $\mathbf{A}_\sigma$, $j = 1,\dots,n$, $\sigma \in \mathcal{M}$, что и образующие алгебры $\mathcal{A}$. Для неминимального резонансного вектора σ мы обозначаем через $\mathbf{A}_\sigma$ оператор, заданный формулой (10.8).

Фиксируем число $M \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $d[M] \neq 0$ (т. е. диофантов остов $\mathbf{\Delta}[M]$, (6.2), не пуст). Пусть $R = (r, \{\rho\})$ – репер диофантова остова $\mathbf{\Delta}[M]$. Обозначим через $\mathcal{R}_R^-$ подмножество тех векторов σ резонансной решетки $\mathcal{R}$, для которых $r+\sigma \notin \mathbf{\Delta}[M]$.

Предположим, что (хотя бы для одного репера R) в пространстве $\mathcal{H}$ существует нормированный вектор $\mathfrak{p}_R$ такой, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\rho \mathfrak{p}_R &= 0, \qquad \rho \in \mathcal{R}_R^-, \\ \mathbf{S}_j \mathfrak{p}_R &= \hbar r_j \mathfrak{p}_R, \qquad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{11.1}$$

где r – вершина репера R. Вектор $\mathfrak{p}_R$ назовем *вакуумным*.

Применяя к вакуумному вектору всевозможные операторы представления $\mathbf{A}_\sigma$, построим линейное подпространство $\mathcal{H}_M \subseteq \mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_M = \overline{\operatorname{span}}\{\mathbf{A}_\sigma \mathfrak{p}_R \mid \sigma \in \mathcal{R}\}. \tag{11.2}$$

Отметим, что подпространство $\mathcal{H}_M$ не зависит от выбора репера R в условии (11.1). Это следует из леммы 12.1, которая будет доказана далее.

Предложение 11.1. *На подпространстве $\mathcal{H}_M$ для любых резонансных векторов ρ, σ справедливо равенство*

$$\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma = g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho+\sigma}. \tag{11.3}$$

Замечание 11.1. В случае минимальных резонансных векторов ρ и σ, $\rho \neq -\sigma$, равенство (11.3) выполнено на всем пространстве $\mathcal{H}$ в силу связей некоммутативного типа (10.5).

Чтобы доказать предложение 11.1, нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 11.1. *Пусть ρ, σ – резонансные векторы. Тогда*:
(a) *если $\rho \notin \mathcal{R}_R^-$, то либо $\rho = 0$, либо $-\rho \in \mathcal{R}_R^-$;*
(b) *если $\rho \in \mathcal{R}_R^-$ и $[\rho,\sigma] = 0$, то $(\rho+\sigma) \in \mathcal{R}_R^-$.*

Лемма 11.2. *Пусть ρ, σ, θ – резонансные векторы. Тогда*:
(a) *если $(\rho+\theta) \in \mathcal{R}_R^-$, $\theta \notin \mathcal{R}_R^-$, то $g_{-\rho,\rho}(\hbar r + \hbar\theta) = 0$;*
(b) *если $\sigma \notin \mathcal{R}_R^-$ и $\theta \notin \mathcal{R}_R^-$, то для любого $\rho \in \mathcal{R}$ справедливо неравенство $g_{\theta-\sigma,\rho}(\hbar r + \hbar\theta) > 0$.*

Лемма 11.3. *Пусть $\rho \in \mathcal{M}$, $\varkappa \in \mathcal{R}$, причем $[\rho,\varkappa] = 0$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\varkappa \mathfrak{p}_R = g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_\varkappa \mathfrak{p}_R. \tag{11.4}$$

Доказательство. Из следствия 10.1, (b) и свойств (11.1) вакуумного вектора следует, что вместо (11.4) достаточно доказать эквивалентное равенство

$$\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\varkappa \mathfrak{p}_R = g_{-\rho,\rho}(\hbar r + \hbar\varkappa) \mathbf{A}_\varkappa \mathfrak{p}_R. \tag{11.4a}$$

Если $(\rho+\varkappa) \in \mathcal{R}_R^-$, то левая часть (11.4a) равна нулю, поскольку из условий (11.1) имеем $\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\varkappa \mathfrak{p}_R = \mathbf{A}_{\rho+\varkappa}\mathfrak{p}_R = 0$. При этом и правая часть (11.4a) также равна нулю: в случае $\varkappa \in \mathcal{R}_R^-$ за счет того, что $\mathbf{A}_\varkappa \mathfrak{p}_R = 0$, а в случае $\varkappa \notin \mathcal{R}_R^-$ за счет зануления коэффициента, т. е. $g_{-\rho,\rho}(\hbar r + \hbar\varkappa) = 0$ (здесь применена лемма 11.2, (a)). Итак, если $(\rho+\varkappa) \in \mathcal{R}_R^-$, то (11.4a) доказано.

Пусть теперь $(\rho+\varkappa) \notin \mathcal{R}_R^-$. Рассмотрим последовательно следующие возможные случаи разложения резонансного вектора $\varkappa$ в сумму коммутирующих минимальных векторов:

$\langle 1\rangle$ $\varkappa = k\rho$;
$\langle 2\rangle$ $\varkappa = k\rho + \sigma$, где $[\rho,\sigma]=0$, $\rho\neq\sigma$;
$\langle 3\rangle$ $\varkappa = k\rho + \sigma + \sigma'$, где $[\rho,\sigma]=[\rho,\sigma']=[\sigma,\sigma']=0$, $\rho\neq\sigma$, $\rho\neq\sigma'$;
. . . .
Здесь $\sigma,\sigma',\ldots\in\mathcal{M}$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

В случае $\langle 1\rangle$ имеем $(k+1)\rho\notin\mathcal{R}_R^-$. Значит, в силу леммы 11.1 имеем $\rho\notin\mathcal{R}_R^-$, а тогда $-\rho\in\mathcal{R}_R^-$. Следовательно, во-первых, $\mathbf{A}_{-\rho}\mathfrak{p}_R=0$ и, во-вторых, $g_{\rho,-\rho}(\hbar r)=0$. В силу следствия 10.1, (b), (c) отсюда вытекает справедливость равенства (11.4a) при $\varkappa=k\rho$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_{\rho}\mathbf{A}_{k\rho}\mathfrak{p}_R &= \mathbf{A}_{-\rho}(A_\rho)^{k+1}\mathfrak{p}_R = [\mathbf{A}_{-\rho},(A_\rho)^{k+1}]\mathfrak{p}_R\\ &= \big(g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S})(\mathbf{A}_\rho)^k - (\mathbf{A}_\rho)^k g_{\rho,-\rho}(\mathbf{S})\big)\mathfrak{p}_R = g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{k\rho}\mathfrak{p}_R.\end{aligned}$$

В случае $\langle 2\rangle$, поскольку $\rho\neq\sigma$, применимо следствие 10.1, (a):

$$g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\sigma = g_{-\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_{-\rho}.$$

Используя также равенство, доказанное в случае $\langle 1\rangle$, и, далее, следствие 10.1, (b) и тождество 5) из леммы 10.2, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}&g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_{k\rho+\sigma}\mathfrak{p}_R = g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_{k\rho}\mathfrak{p}_R\\ &\quad= g_{-\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_{k\rho}\mathfrak{p}_R = g_{-\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_\sigma g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{k\rho}\mathfrak{p}_R\\ &\quad= g_{-\rho,\sigma}(\mathbf{S})g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S}-\hbar\sigma)\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_{k\rho}\mathfrak{p}_R = g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{k\rho+\sigma}\mathfrak{p}_R\end{aligned}\tag{11.5}$$

(здесь важно, что $[\rho,\sigma]=0$). За счет свойства (11.1) вакуумного вектора операторный множитель $g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})$ (имеющийся и в начальной, и в конечной частях равенства) можно заменить числом $g_{\sigma,-\rho}(\hbar r+\hbar k\rho+\hbar\sigma)$. В силу лемм 11.1, (b), 11.2, (b) это число отлично от нуля. Поделив (11.5) на него, придем к тождеству (11.4a) для случая $\langle 2\rangle$.

В случае $\langle 3\rangle$, действуя точно так же, как в случае $\langle 2\rangle$, и используя результат, полученный в случае $\langle 2\rangle$, придем к равенству (11.4a). Продолжая далее, по индукции получим, что (11.4a) выполнено для любых $\varkappa$, коммутирующих с ρ.

Доказательство предложения 11.1. Прежде всего, отметим, что равенство (11.3) достаточно доказать на вакуумном векторе $\mathfrak{p}_R$:

$$\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R = g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma}\mathfrak{p}_R.\tag{11.3a}$$

Действительно, считая (11.3) доказанным на $\mathfrak{p}_R$, получим, что (11.3) выполнено и на векторах вида $\mathbf{A}_\varkappa\mathfrak{p}_R$, где $\varkappa\in\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_\varkappa\mathfrak{p}_R &= \mathbf{A}_\rho g_{\sigma,\varkappa}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\sigma+\varkappa}\mathfrak{p}_R = g_{\sigma,\varkappa}(\mathbf{S}-\hbar\rho)\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_{\sigma+\varkappa}\mathfrak{p}_R\\ &= g_{\sigma,\varkappa}(\mathbf{S}-\hbar\rho)g_{\rho,\sigma+\varkappa}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma+\varkappa}\mathfrak{p}_R\\ &= g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})g_{\rho+\sigma,\varkappa}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma+\varkappa}\mathfrak{p}_R = g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma}\mathbf{A}_\varkappa\mathfrak{p}_R.\end{aligned}$$

Здесь использованы следствие 10.1, (b) и лемма 10.2, 2).

Пусть $\rho,\sigma\in\mathbb{Z}^n$. Число таких j, для которых $[\rho,\sigma]_j\neq 0$, назовем *индексом некоммутативности* $m(\rho,\sigma)$ векторов ρ, σ; $m(\rho,\sigma)\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Лемма 11.4. *Пусть* $\rho=\rho'+\rho''$, $\sigma=\sigma'+\sigma''$, *причем* $[\rho',\rho'']=[\sigma',\sigma'']=0$. *Тогда*:

(a) $m(\rho'+\sigma',\sigma'')\leqslant m(\rho,\sigma)$;

(b) $m(\rho'',\rho'+\sigma)\leqslant m(\rho,\sigma)$;

(c) *если существует j такое, что* $[\rho,\sigma]_j\neq 0$, $\rho'_j+\sigma'_j=0$, *то* $m(\rho'+\sigma',\sigma'')\leqslant m(\rho,\sigma)$;

(d) *если существует j такое, что* $[\rho,\sigma]_j\neq 0$, $\rho''_j=0$, *то* $m(\rho'',\rho'+\sigma)\leqslant m(\rho,\sigma)$.

Доказательство равенства (11.3a) проведем путем индукции по величине индекса некоммутативности $m(\rho,\sigma)$.

Если $m(\rho,\sigma)=0$, т. е. $[\rho,\sigma]=0$, то (11.3) вытекает из связей (10.4) коммутативного типа и тождества 1) из леммы 10.2.

Предположение индукции формулируется следующим образом:

(П1) пусть формула (11.3a) выполнена для всех $\rho,\sigma\in\mathcal{R}$ таких, что $m(\rho,\sigma)\leqslant m$.

Исходя из этого, докажем (11.3a) для таких $\rho,\sigma\in\mathcal{R}$, что $m(\rho,\sigma)=m+1$.

Поскольку $m(\rho,\sigma)\geqslant 1$, то хотя бы одна из компонент коммутатора $[\rho,\sigma]$ отлична от нуля, т. е.

$$\exists\, j:\quad [\rho,\sigma]_j\neq 0.$$

Поэтому векторы ρ и σ можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\rho=\rho'+\rho'', &&\rho'\in\mathcal{M}, &&\rho''\in\mathcal{R}, &&[\rho',\rho'']=0, &&\rho'_j\neq 0,\\ &\sigma=\sigma'+\sigma'', &&\sigma'\in\mathcal{M}, &&\sigma''\in\mathcal{R}, &&[\sigma',\sigma'']=0, &&\sigma'_j\neq 0. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R=\mathbf{A}_{\rho''}\mathbf{A}_{\rho'}\mathbf{A}_{\sigma'}\mathbf{A}_{\sigma''}\mathfrak{p}_R.$$

В правой части этого равенства произведение $\mathbf{A}_{\rho'}\mathbf{A}_{\sigma'}$ можно заменить на $g_{\rho',\sigma'}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho'+\sigma'}$: если $\rho'\neq-\sigma'$, то в силу связей (10.6) некоммутативного типа, а если $\rho'=-\sigma'$, то в силу леммы 11.3 (см. также обозначение (10.8)). В результате (используя следствие 10.1, (b)) получим следующее равенство:

$$\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R=g_{\rho',\sigma'}(\mathbf{S}-\hbar\rho'')\mathbf{A}_{\rho''}\mathbf{A}_{\rho'+\sigma'}\mathbf{A}_{\sigma''}\mathfrak{p}_R. \tag{11.7}$$

Дополнительно проведем индукцию по величине $M_j(\rho,\sigma)\overset{\text{def}}{=}|[\rho,\sigma]_j|$.

Если $M_j(\rho,\sigma)=1$, то, очевидно, $\rho'_j=-\sigma'_j$, $\rho''_j=0$. Отсюда в силу утверждений (c), (d) леммы 11.4 следует, что выполнены неравенства

$$m(\rho'+\sigma',\sigma'')<m+1,\qquad m(\rho'',\rho'+\sigma)<m+1,$$

и, значит, по предположению индукции (П1) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\rho'+\sigma'}\mathbf{A}_{\sigma''}\mathfrak{p}_R&=g_{\rho'+\sigma',\sigma''}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho'+\sigma'+\sigma''}\mathfrak{p}_R,\\ \mathbf{A}_{\rho''}\mathbf{A}_{\rho'+\sigma}\mathfrak{p}_R&=g_{\rho'',\,\rho'+\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho''+\rho'+\sigma}\mathfrak{p}_R. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Подставляя эти равенства в (11.7) и используя следствие 10.1, (b), а также тождество 6) из леммы 10.2, получим искомое равенство (11.3a) для случая $m(\rho,\sigma)=m+1$, $M_j(\rho,\sigma)=1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R&=g_{\rho',\sigma'}(\mathbf{S}-\hbar\rho'')\mathbf{A}_{\rho''}g_{\rho'+\sigma',\sigma''}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho'+\sigma}\mathfrak{p}_R\\ &=g_{\rho',\sigma'}(\mathbf{S}-\hbar\rho'')g_{\rho'+\sigma',\sigma''}(\mathbf{S}-\hbar\rho'')g_{\rho'',\rho'+\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma}\mathfrak{p}_R\\ &=g_{\rho'+\rho'',\,\sigma'+\sigma''}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma}\mathfrak{p}_R=g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma}\mathfrak{p}_R. \end{aligned}$$

Предположение индукции формулируется следующим образом:

(П2) пусть формула (11.3a) выполнена для всех $\rho,\sigma\in\mathcal{R}$ таких, что $m(\rho,\sigma)=m+1$ и $M_j(\rho,\sigma)\leqslant M_j$.

Рассмотрим такие $\rho,\sigma\in\mathcal{R}$, что $m(\rho,\sigma)=m+1$ и $M_j(\rho,\sigma)=M_j+1$. Тогда, во-первых, из утверждений (a), (b) леммы 11.4 получим, что выполнены неравенства

$$m(\rho'+\sigma',\sigma'')\leqslant m+1,\qquad m(\rho'',\rho'+\sigma)\leqslant m+1,$$

и, во-вторых, из (11.6) получим неравенства

$$M_j(\rho'+\sigma',\sigma'')\leqslant M_j,\qquad M_j(\rho'',\rho'+\sigma)\leqslant M_j.$$

Значит, выполнено одно из двух предположений индукции: либо (П1), либо (П2). В любом из этих двух случаев справедливы равенства (11.8). Подставляя их в (11.7), приходим к формуле (11.3a) для случая $m(\rho,\sigma)=m+1$, $M_j(\rho,\sigma)=M_j+1$.

Итак, в силу принципа математической индукции формула (11.3a) выполнена при всех значениях $m(\rho,\sigma)\in\{0,1,\dots,n\}$, $n\in\mathbb{N}$.

Следствие 11.1. *Подпространство $\mathcal{H}_M$, (11.2), инвариантно и минимально относительно представления резонансной алгебры (т. е. это подпространство неприводимого представления алгебры $\mathcal{A}$). На векторы из $\mathcal{H}_M$ операторы представления действуют следующим образом*:

$$\mathbf{S}_j\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R=\hbar(r_j+\sigma_j)\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R,$$
$$\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R=g_{\rho,\sigma}(\hbar r+\hbar\rho+\hbar\sigma)\mathbf{A}_{\rho+\sigma}\mathfrak{p}_R.$$

Отсюда и из (11.1), а также из леммы 10.2, 4) вытекает

Следствие 11.2. *Пусть $\sigma,\theta\in\mathcal{R}$. Тогда*:
(a) *если $(r+\sigma)\notin\mathbf{\Delta}[M]$, то $\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R=0$*;
(b) *если $(r+\sigma)\in\mathbf{\Delta}[M]$, то $\|\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R\|=(\hbar r)_{-\sigma}^{-1/2}$*;
(c) *если $\sigma\neq\theta$, то $(\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_R,\mathbf{A}_\theta\mathfrak{p}_R)=0$.*

§ 12. Когерентные состояния

Рассмотрим неприводимое представление резонансной алгебры в пространстве $\mathcal{H}_M\subset\mathcal{H}$, (11.2), порожденном вакуумным вектором. Каждой точке остова $t\in\mathbf{\Delta}[M]$ сопоставим вектор из подпространства $\mathcal{H}_M$ по формуле

$$\mathfrak{p}^t\stackrel{\mathrm{def}}{=}(\hbar r)_{t-r}^{-1/2}\mathbf{A}_{t-r}\mathfrak{p}_R,\tag{12.1}$$

где $\mathfrak{p}_R$ – вакуумный вектор, а r – вершина репера R.

Предложение 12.1. 1) *Векторы $\mathfrak{p}^t$, (12.1), образуют в $\mathcal{H}_M$, (11.2), ортонормированный базис.*

2) *Операторы представления алгебры $\mathcal{A}$ в базисе $\{\mathfrak{p}^t\mid t\in\mathbf{\Delta}[M]\}$ имеют вид*

$$\mathbf{S}_j\mathfrak{p}^t=\hbar t_j\mathfrak{p}^t,\qquad j=1,\dots,n,\tag{12.2}$$
$$\mathbf{A}_\rho\mathfrak{p}^t=(\hbar t)_\rho^{1/2}\mathfrak{p}^{\rho+t},\qquad \rho\in\mathcal{R}.\tag{12.3}$$

Доказательство. В пояснении нуждается только формула (12.3). Пусть $(\rho+t)\in\mathbf{\Delta}[M]$. Тогда в силу следствия 11.1 и определения (12.1) имеем

$$\mathbf{A}_\rho\mathfrak{p}^t=\sqrt{\frac{(\hbar r)_{\rho+t-r}}{(\hbar r)_{t-r}}}\,g_{\rho,t-r}(\hbar\rho+\hbar t)\mathfrak{p}^{\rho+t}.$$

Согласно лемме 10.1 и определению (10.2) выполнено тождество

$$(g_{\rho,\sigma}(s))^2=\frac{(s-\hbar\rho)_\rho(s-\hbar\rho-\hbar\sigma)_\sigma}{(s-\hbar\rho-\hbar\sigma)_{\rho+\sigma}},\qquad s\in\mathbb{R}^n,\quad \rho,\sigma\in\mathbb{Z}^n.$$

Отсюда и из леммы 11.2 получаем

$$g_{\rho,t-r}(\hbar\rho+\hbar t)=\sqrt{\frac{(\hbar t)_\rho(\hbar r)_{t-r}}{(\hbar r)_{\rho+t-r}}}$$

и приходим к формуле (12.3).

Пусть теперь $(\rho+t)\notin\mathbf{\Delta}[M]$. Тогда левая часть равенства (12.3) равна нулю согласно следствию 11.2, а правая часть (12.3) равна нулю за счет коэффициента: $(\hbar t)_\rho=0$. Таким образом, формула (12.3) выполнена и в этом случае.

Лемма 12.1. *Пусть выполнено условие существования вакуумного вектора $\mathfrak{p}_R$, (11.1), для некоторого репера R резонансного остова $\mathbf{\Delta}[M]$. Тогда для любого другого репера L остова $\mathbf{\Delta}[M]$ существует вакуумный вектор $\mathfrak{p}_L$, а именно*

$$\mathfrak{p}_L=\mathfrak{p}^l.$$

Здесь l – вершина резонансного репера L, а вектор $\mathfrak{p}^l$ задается формулой (12.1).

Доказательство. Напомним, что $\sigma\in\mathcal{R}_L^-\iff(l+\sigma)\notin\mathbf{\Delta}[M]$. Отсюда в силу предложения 12.1 получаем, что вектор $\mathfrak{p}_L=\mathfrak{p}^l$ удовлетворяет условиям (11.1) для вакуумного вектора:

$$\mathbf{A}_\sigma\mathfrak{p}_L=0,\qquad 0\in\mathcal{R}_L^-,$$
$$\mathbf{S}_j\mathfrak{p}_L=\hbar l\mathfrak{p}_L,\qquad j=1,\dots,n.$$

Кроме того, согласно предложению 12.1, 1) вектор $\mathfrak{p}_L$ нормирован: $\|\mathfrak{p}_L\|=1$. Значит, $\mathfrak{p}_L$ – вакуумный вектор, соответствующий реперу L.

Лемма 12.2. *Вектор $\mathfrak{p}^t$, (12.1), не зависит от выбора репера R.*

Доказательство. В силу формулы (12.3) имеем

$$\mathbf{A}_{t-l}\mathfrak{p}^l=(\hbar l)^{1/2}_{t-l}\mathfrak{p}^t.$$

Следовательно, вектор $\mathfrak{p}^t$ может быть задан формулой

$$\mathfrak{p}^t=(\hbar l)^{-1/2}_{t-l}\mathbf{A}_{t-l}\mathfrak{p}_L$$

через вакуумный вектор $\mathfrak{p}_L=\mathfrak{p}^l$, отвечающий произвольному реперу L. Сравнивая полученное выражение с (12.1), приходим к выводу о независимости $\mathfrak{p}^t$ от выбора репера.

Пример 12.1. В случае, если $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ и представление алгебры $\mathcal{A}$ задано формулами (10.12), базисные векторы $\mathfrak{p}^t$ являются функциями на $\mathbb{R}^n$:

$$\mathfrak{p}^t(q) = \frac{1}{\sqrt{2^{|t|}\,t!}} \prod_{j=1}^{n} \sqrt[4]{\frac{f_j}{\pi\hbar}}\, H_{t_j}\biggl(\sqrt{\frac{f_j}{\hbar}} q_j\biggr) \exp\biggl\{-\frac{1}{2\hbar}\sum_{j=1}^{n} f_j q_j^2\biggr\}, \qquad q \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь H_k – стандартные полиномы Эрмита, определяемые следующим образом:

$$H_k(\xi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (-1)^k e^{\xi^2} \frac{d^k}{d\xi^k}(e^{-\xi^2}).$$

Действительно, в этом случае вакуумный вектор задан формулой

$$\mathfrak{p}_R = c(r)(\hat{z}^*)^r \chi_0,$$

где

$$c(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt[4]{\frac{f_1\cdots f_n}{(\pi\hbar)^n}}\,\frac{1}{\sqrt{\hbar^{|r|}\,r!}}, \qquad \chi_0(q) = \exp\biggl\{-\frac{1}{2\hbar}\sum_{j=1}^{n} f_j q_j^2\biggr\}.$$

Из определения (12.1) следует

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}^t &= c(r)(\hbar r)_{t-r}^{-1/2}\,(\hat{z}^*)^{(t-r)_+}\,\hat{z}^{(t-r)_-}\,(\hat{z}^*)^r\chi_0\\ &= c(t)\,(\hat{z}^*)^t\chi_0 = c(t)\,\frac{\hbar^{|t|/2}}{2^{|t|/2}}\prod_{j=1}^{n} H_{t_j}\biggl(\sqrt{\frac{f_j}{\hbar}} q_j\biggr)\chi_0,\end{aligned}$$

что дает указанную выше формулу для $\mathfrak{p}^t(q)$.

Напомним, что множеству всех вершин $t \in \mathbf{\Delta}[M]$ мы сопоставили в § 7 ортонормированный базис $\{U^t\}$ в пространстве $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$ голоморфных сечений пучка $\Pi(\Omega_\hbar)$.

Обозначим через $\Pi(\Omega_\hbar, \mathcal{H}) = \Pi(\Omega_\hbar) \otimes \mathcal{H}$ пучок ростков голоморфных функций на $\Omega_\hbar$ со значениями в $\mathcal{H}$ с теми же, что и раньше, скалярными функциями склейки (7.2). Пространство его сечений $\Psi = \{\Psi_R\}$, снабженное естественной гильбертовой нормой

$$\|\Psi\| = \biggl(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}}\int_{\Omega_\hbar}\frac{\|\Psi_R\|^2_{\mathcal{H}}}{\mathcal{K}_R}\,dm_\hbar\biggr)^{1/2},$$

будем обозначать через $\mathcal{L}(\Omega_\hbar, \mathcal{H})$.

Очевидно, для подпространства $\mathcal{H}_M \subset \mathcal{H}$ мы имеем вложение $\mathcal{L}(\Omega_\hbar, \mathcal{H}_M) \subset \mathcal{L}(\Omega_\hbar, \mathcal{H})$.

Определение 12.1. *Когерентными состояниями* алгебры $\mathcal{A}$, отвечающими квантовому листу $\Omega_\hbar = \Omega_\hbar[M]$, назовем семейство векторов

$$\mathfrak{P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{t\in\mathbf{\Delta}[M]} U^t \mathfrak{p}^t. \tag{12.4}$$

Формула (12.4) задает элемент пространства $\mathcal{L}(\Omega_\hbar, \mathcal{H}_M)$. В локальной карте с номером $R = (r, \{\rho\})$ векторы $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_R(w)$ являются голоморфными функциями от комплексных координат w согласно (7.1):

$$\mathfrak{P}_R(w) = \sum_{t\in\mathbf{\Delta}[M]} U_R^t(w)\mathfrak{p}^t = \sum_{t\in\mathbf{\Delta}[M]} \sqrt{\frac{\hbar^{|r|}\,r!}{\hbar^{|t|}\,t!}} \prod_{k=1}^{n-1} w^{N_{t-r}^{(k)}}\mathfrak{p}^t. \tag{12.5}$$

Здесь неотрицательные показатели степени $N^{(k)}_{t-r}$ определяются разложением (4.3) резонансного вектора $t-r$ по базису $\{\rho\}$ в вершине r.

Пример 12.2. Пусть $n=3$, $f_1=1$. Тогда для каждого $M\in\mathbb{Z}_+$ диофантов остов $\mathbf{\Delta}[M]$ состоит из точек

$$(M-f_2j-f_3k,j,k),\qquad \text{где}\quad j\in\mathbb{Z}_+,\quad k\in\mathbb{Z}_+,\qquad f_2j+f_3k\leqslant M.$$

В качестве резонансного репера $R=(r,\{\rho\})$ выберем вершину $r=(M,0,0)$ и базис (4.8): $\rho^{(1)}=(-f_2,1,0)$, $\rho^{(2)}=(-f_3,0,1)$. Тогда в локальной карте с номером R для когерентных состояний (12.5) получим следующую формулу:

$$\mathfrak{P}_R(w)=\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+,\,k\in\mathbb{Z}_+\\ f_2j+f_3k\leqslant M}}\frac{1}{j!\,k!}\biggl(\frac{w_1\mathbf{A}_{\rho^{(1)}}}{\hbar}\biggr)^j\biggl(\frac{w_2\mathbf{A}_{\rho^{(2)}}}{\hbar}\biggr)^k\mathfrak{p}^r. \tag{12.6}$$

Здесь $\mathfrak{p}^r$ – вакуумный вектор, подчиненный уравнениям (11.1):

$$\mathbf{S}_1\mathfrak{p}^r=\hbar M\mathfrak{p}^r,\qquad \mathbf{S}_2\mathfrak{p}^r=\mathbf{S}_3\mathfrak{p}^r=0,$$

и условию нормировки $\|\mathfrak{p}^r\|=1$, а w_1, w_2 – комплексные координаты, связанные с резонансным базисом $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ по формулам (4.4). Отметим, что векторы $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ коммутируют между собой (в смысле (3.2)): $[\rho^{(1)},\rho^{(2)}]=0$, и потому операторы $\mathbf{A}_{\rho^{(1)}}$ и $\mathbf{A}_{\rho^{(2)}}$ также коммутируют, т. е.

$$[\mathbf{A}_{\rho^{(1)}},\mathbf{A}_{\rho^{(2)}}]=0.$$

Кроме того, отметим, что при всех $j,k\in\mathbb{Z}_+$, $f_2j+f_3k>M$, имеет место равенство $(\mathbf{A}_{\rho^{(1)}})^j(\mathbf{A}_{\rho^{(2)}})^k\mathfrak{p}^r=0$. Поэтому суммирование в формуле (12.6) по двум индексам j и k можно продолжить до $+\infty$. В результате для когерентных состояний получим следующее выражение:

$$\mathfrak{P}_R(w)=\exp\biggl\{\frac{1}{\hbar}\bigl(w_1\mathbf{A}_{\rho^{(1)}}+w_2\mathbf{A}_{\rho^{(2)}}\bigr)\biggr\}\mathfrak{p}^r.$$

Упомянем общие свойства когерентных состояний [39], [40].

Лемма 12.3. (a) *Скалярное произведение $\mathcal{K}=(\mathfrak{P},\mathfrak{P})_{\mathcal{H}}$ когерентных состояний совпадает с воспроизводящим ядром* (7.7), (7.9) *пространства $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$.*

(b) *Проекторы $\boldsymbol{\pi}_\hbar$ на одномерные подпространства в $\mathcal{H}_M$, порожденные когерентными состояниями, в сумме задают проектор $\mathbf{\Pi}_\hbar[M]$ на все $\mathcal{H}_M$ (т. е. на всю неприводимую компоненту представления алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$):*

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}}\int_{\Omega_\hbar[M]}\boldsymbol{\pi}_\hbar\,dm_\hbar=\mathbf{\Pi}_\hbar[M].$$

§ 13. Реализация неприводимых представлений над квантовыми листами

Покажем теперь, как универсально реализовать неприводимые представления квантовой резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в пространствах антиголоморфных сечений над квантовыми листами $\Omega_\hbar[M]$.

Фиксируем в $\Omega_\hbar[M]$ локальную карту с номером $R = (r, \{\rho\})$. Напомним, что здесь r – вершина диофантова остова $\boldsymbol{\Delta}$, а $\{\rho\}$ – резонансный базис. Через w обозначим комплексные координаты в данной карте.

Определим вектор-функции:

$$s(m) \stackrel{\text{def}}{=} \hbar r + \hbar \sum_{k=1}^{n-1} m_k \rho^{(k)}, \qquad m \in \mathbb{Z}^n.$$

Теорема 13.1. *Дифференциальные операторы*

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{S}_j &\stackrel{\text{def}}{=} s_j\Big(\overline{w}\,\frac{\partial}{\partial\,\overline{w}}\Big), \qquad j = 1, \dots, n, \\ \overset{\circ}{A}_\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} (\overset{\circ}{S})_{\sigma_-}\,\overline{W_\sigma}, \qquad \sigma \in \mathcal{M}, \end{aligned} \tag{13.1}$$

заданные в локальных картах на $\Omega_\hbar = \Omega_\hbar[M]$, *согласованы на пересечениях карт и задают неприводимое представление квантовой резонансной алгебры* $\mathcal{A}$ *в гильбертовом пространстве* $\mathcal{L}^*(\Omega_\hbar)$ (*антиголоморфных*) *сечений пучка* $\Pi^*(\Omega_\hbar)$. *Для этого представления вакуумным вектором*, *отвечающим реперу* R, *служит сечение пучка* $\Pi^*(\Omega_\hbar)$, *которое в карте в номером* R *задано единичной функцией.*

Во второй формуле из (13.1) используются обозначения (10.1a) и (4.5).

Доказательство теоремы 13.1. Проверка согласованности на пересечениях карт вполне рутинна. Выполнение уравнений связи и коммутационных соотношений (10.4)–(10.6) следует из перестановочных формул

$$\overline{w}_k \frac{\partial}{\partial\,\overline{w}_k} \circ \overline{W_\sigma} = \overline{W_\sigma} \circ \Big(\overline{w}_k \frac{\partial}{\partial\,\overline{w}_k} + N_\sigma^{(k)}\Big), \qquad \overset{\circ}{S}_j \circ \overline{W_\sigma} = \overline{W_\sigma} \circ (\overset{\circ}{S}_j + \hbar\sigma_j),$$

где числа $N_\sigma^{(k)}$ определены согласно (4.3). Условия эрмитовости (10.3) для операторов (13.1) достаточно проверить на векторах $\overline{U^t}$ ортонормированного базиса (7.1), (7.5). Для операторов $\overset{\circ}{S}_j$ эти векторы собственные:

$$\overset{\circ}{S}_j \overline{U^t} = \hbar t_j \overline{U^t}. \tag{13.2}$$

Операторы $\overset{\circ}{A}_\sigma$ действуют следующим образом:

$$\overset{\circ}{A}_\sigma \overline{U^t} = \sqrt{(\hbar t)_\sigma}\;\overline{U^{t+\sigma}}. \tag{13.3}$$

Отсюда в силу свойства $(s - \hbar\sigma)_\sigma = (s)_{-\sigma}$ символов (10.1a) получаем

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{A}_\sigma \overline{U^k}, \overline{U^t}) &= \sqrt{(\hbar k)_\sigma}\;(\overline{U^{k+\sigma}}, \overline{U^t}) = \sqrt{(\hbar k)_\sigma}\;\delta_{k+\sigma,t} \\ &= \sqrt{(\hbar t)_{-\sigma}}\;\delta_{k,t-\sigma} = (\overline{U^k}, \overset{\circ}{A}_{-\sigma}\overline{U^t}), \end{aligned}$$

т.е. $\overset{\circ}{A}{}^*_\sigma = \overset{\circ}{A}_{-\sigma}$.

При $t = r$, поскольку $(\hbar r)_\sigma = 0$ для любого $\sigma \in \mathcal{R}_R^-$, из (13.2), (13.3) получаем

$$\overset{\circ}{S}_j \overline{U^r} = \hbar r_j \overline{U^r}, \quad \overset{\circ}{A}_\sigma \overline{U^r} = 0, \qquad j = 1, \dots, n, \quad \sigma \in \mathcal{R}_R^-,$$

т.е. сечение $\overline{U^r}$ является вакуумным вектором для операторов (13.1). Это сечение в карте с номером R тождественно равно единице: $\overline{U^r_R} = 1$ (см. (7.1)).

Замечание 13.1. Поскольку скалярное произведение в пространстве $\mathcal{L}^*(\Omega_\hbar)$ представимо также в виде интеграла (8.1), то условие эрмитовости представления (13.1) можно записать в виде некоторых уравнений для плотности $\mathcal{J}$, а также и для воспроизводящего ядра $\mathcal{K}$ (это известная процедура; см. [25]). Система уравнений на $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ будет следующей:

$$
\begin{aligned}
(\overset{\circ}{S}_i)^T \mathcal{J} &= \overline{(\overset{\circ}{S}_i)}^T \mathcal{J}, &\qquad (\overset{\circ}{A}_\sigma)^T \mathcal{J} &= \overline{(\overset{\circ}{A}_{-\sigma})}^T \mathcal{J},\\
\overset{\circ}{S}_i \mathcal{K} &= \overline{\overset{\circ}{S}_i} \mathcal{K}, & \overset{\circ}{A}_\sigma \mathcal{K} &= \overline{\overset{\circ}{A}_{-\sigma}} \mathcal{K}.
\end{aligned}
$$

Здесь через $(\dots)^T$ обозначена операция транспонирования дифференциального оператора относительно стандартной меры dw (или $d\overline{w}$) в локальных комплексных координатах, а чертой обозначено комплексное сопряжение оператора.

В выписанной системе левая колонка уравнений (в которой $i = 1, \dots, n$) обеспечивает тот факт, что плотность $\mathcal{J}$ и ядро $\mathcal{K}$ зависят лишь от модулей комплексных координат w, т. е. от вещественных переменных $X_j = |w_j|^2$. Правую колонку уравнений (в которой $\sigma \in \mathcal{M}$) достаточно записать только для векторов базиса $\rho^{(j)}$; она будет иметь следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\big[X_j(\hbar\widetilde{r} - \hbar D)_{\rho_-^{(j)}} - (\hbar\widetilde{r} - \hbar D)_{\rho_+^{(j)}}\big]\mathcal{J}_R = 0,\\
\big[X_j(\hbar r + \hbar D)_{-\rho_-^{(j)}} - (\hbar r + \hbar D)_{-\rho_+^{(j)}}\big]\mathcal{K}_R = 0, \qquad j = 1, \dots, n-1.
\end{gathered}
$$

Здесь репер R нумерует карту на квантовом листе, r – вершина, а $\{\rho^{(j)}\}$ – резонансный базис этого репера, $\widetilde{r} = r - \rho^{(1)} - \dots - \rho^{(n-1)}$ и $D = \sum_{j=1}^{n-1} \rho^{(j)} X_j \frac{\partial}{\partial X_j}$. Данная система уравнений для $\mathcal{J}_R$, $\mathcal{K}_R$ использовалась в лемме 8.1 для вычисления асимптотик при $\hbar \to 0$.

В заключение мы покажем, как абстрактное представление резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, обладающее вакуумным вектором, и, в частности, представление (10.11), (10.12) сплетаются с универсальными неприводимыми представлениями (13.1).

Зададим в $\mathcal{H}$ когерентные состояния $\mathfrak{P}$, (12.4), и для каждого сечения ψ пучка $\Pi^*(\Omega_\hbar)$ определим вектор $\mathcal{P}[\psi] \in \mathcal{H}$ по формуле

$$
\mathcal{P}[\psi] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_\hbar} \frac{\psi \mathfrak{P}}{\mathcal{K}}\, dm_\hbar.
$$

Отображение

$$
\psi \to \mathcal{P}[\psi] \tag{13.4}
$$

назовем *когерентным преобразованием.*

Теорема 13.2. *Когерентное преобразование* (13.4) *сплетает представление резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с неприводимым представлением в пространстве $\mathcal{L}^*(\Omega_\hbar)$ антиголоморфных сечений над квантовым листом $\Omega_\hbar = \Omega_\hbar[M]$:*

$$
\mathbf{A}_\sigma \mathcal{P}[\psi] = \mathcal{P}[\overset{\circ}{A}_\sigma \psi], \qquad \mathbf{S}_j \mathcal{P}[\psi] = \mathcal{P}[\overset{\circ}{S}_j \psi].
$$

Здесь дифференциальные операторы $\overset{\circ}{A}_\sigma$, $\overset{\circ}{S}_j$ заданы формулами (13.1).

Доказательство. В силу (12.4), (8.1), (8.2), (7.5) когерентное преобразование $\mathcal{P}$ переводит векторы $\overline{U^t}$, (7.1), ортонормированного базиса в $\mathcal{L}^*(\Omega_\hbar)$ в векторы $\mathfrak{p}^t \in \mathcal{H}$, (13.1):

$$\mathcal{P}[\overline{U^t}] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_\hbar} \frac{\overline{U^t}}{\mathcal{K}} \sum_{t'\in\mathbf{\Delta}[M]} \overline{U^{t'}}\mathfrak{p}^{t'}\, dm_\hbar = \sum_{t'\in\mathbf{\Delta}[M]} (\overline{U^{t'}}, \overline{U^t})\mathfrak{p}^{t'} = \mathfrak{p}^t.$$

Поэтому достаточно доказать равенства

$$\mathbf{A}_\sigma \mathfrak{p}^t = \mathcal{P}[\mathring{A}_\sigma \overline{U^t}], \qquad \mathbf{S}_j \mathfrak{p}^t = \mathcal{P}[\mathring{S}_j \overline{U^t}]. \tag{13.5}$$

Используя (12.3), получим

$$\mathbf{A}_\sigma \mathfrak{p}^t = \sqrt{(\hbar t)_\sigma}\,\mathfrak{p}^{t+\sigma}.$$

Сравнивая эту формулу с (13.3) и учитывая, что $P[\overline{U^t}] = \mathfrak{p}^t$, получим первое равенство (13.5).

Аналогично, используя формулу (13.2), а также формулу (12.2), получим второе равенство (13.5).

Приложение. Доказательство теоремы 9.2

Как и при доказательстве теоремы 9.1, мы используем "полярные" координаты X, Φ и представим квантовую кэлерову форму (8.8) в виде

$$\omega_\hbar = \hbar\biggl(\frac{\partial g_1}{\partial X_1}\, dX_1 \wedge d\Phi_1 + \frac{\partial g_2}{\partial X_1}\, dX_1 \wedge d\Phi_2 + \frac{\partial g_1}{\partial X_2}\, dX_2 \wedge d\Phi_1 + \frac{\partial g_2}{\partial X_2}\, dX_2 \wedge d\Phi_2\biggr),$$

где

$$g_j \stackrel{\text{def}}{=} X_j \frac{\partial}{\partial X_j} \ln \mathcal{K}_R.$$

Вычисление интеграла от квантовой формы объема по листу Ω сводится к вычислению интеграла от первообразной этой 4-формы по границе $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \partial\mathcal{N}_0^+$:

$$\int_\Omega \frac{\omega_\hbar \wedge \omega_\hbar}{2} = \hbar^2 \int_{\partial\Omega} \theta \wedge d\Phi_1 \wedge d\Phi_2, \qquad \theta \stackrel{\text{def}}{=} G_1\, dX_1 + G_2\, dX_2.$$

Здесь

$$G_1(X_1, X_2) \stackrel{\text{def}}{=} g_2 \frac{\partial g_1}{\partial X_1} - g_1 \frac{\partial g_2}{\partial X_1}, \qquad G_2(X_1, X_2) \stackrel{\text{def}}{=} g_2 \frac{\partial g_1}{\partial X_2} - g_1 \frac{\partial g_2}{\partial X_2}.$$

На границе $\partial\Omega$ угловые переменные Φ_j меняются от 0 до 2π, а радиальные переменные X_j меняются вдоль границы классического симплекса (треугольника) $\blacktriangle[\hbar M]$, которая состоит из трех его ребер. Эта граница может попадать на границу координатной карты, поэтому мы разрешим радиальным переменным принимать нулевое и бесконечное значения. В силу (5.13) на ребре, соединяющем первую и вторую вершины, имеем $X_2 = 0$ и, следовательно, $\theta|_{\Sigma_{12}} = 0$. На ребре, соединяющем вторую и третью вершины, имеем

$$X_2 = \infty, \qquad X_1 = \tau X_2^{f_2/\mu}$$

и, следовательно,

$$\theta\big|_{\Sigma_{23}} = \big(X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2)\big)\big|_{X_2=\infty}\, d\tau,$$

где τ – параметр, который при движении от второй вершины к третьей, меняется от 0 до ∞. На ребре, соединяющем третью и первую вершины, имеем

$$X_1 = \infty, \qquad X_2 = tX_1^{-\nu/f_1}$$

и, следовательно,

$$\theta\big|_{\Sigma_{31}} = \big(X_1^{-\nu/f_1} G_2(X_1, tX_1^{-\nu/f_1})\big)\big|_{X_1=\infty}\, dt,$$

где t – параметр, который при движении от третьей вершины к первой меняется от ∞ до 0. Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_\Omega \frac{\omega_\hbar\wedge\omega_\hbar}{2} = \frac{1}{2}\bigg\{&\int_0^\infty \big(X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2)\big)\big|_{X_2=\infty}\, d\tau \\ &- \int_0^\infty \big(X_1^{-\nu/f_1} G_2(X_1, tX_1^{-\nu/f_1})\big)\big|_{X_1=\infty}\, dt\bigg\}. \qquad (\Pi.1)\end{aligned}$$

Вычислим первый интеграл в правой части этого равенства. Используя, как и в доказательстве теоремы 9.1, явную формулу для полинома $\mathcal{K}_R(X_1, X_2)$, мы имеем

$$\mathcal{K}_R(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) = \sum_{\sigma\in\mathcal{R}_r} c_\sigma^r X_2^{f_2 N_\sigma^{(1)}/\mu + N_\sigma^{(2)}} \tau^{N_\sigma^{(1)}}.$$

При $X_2\to\infty$ отсюда получаем

$$\mathcal{K}_R(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) = \bigg(\sum_{\sigma\in\mathcal{R}_r^\lambda} c_\sigma^r \tau^{N_\sigma^{(1)}}\bigg) X_2^\lambda + O(X_2^{\lambda-1}). \qquad (\Pi.2)$$

Здесь обозначено

$$\lambda \overset{\text{def}}{=} \max_{\sigma\in\mathcal{R}_r}\bigg(\frac{f_2}{\mu}N_\sigma^{(1)} + N_\sigma^{(2)}\bigg), \qquad \mathcal{R}_r^\lambda \overset{\text{def}}{=} \bigg\{\sigma\in\mathcal{R}_r \;\bigg|\; \frac{f_2}{\mu}N_\sigma^{(1)} + N_\sigma^{(2)} = \lambda\bigg\}. \qquad (\Pi.3)$$

Дополнительно мы введем краткое обозначение для сумм по множеству $\mathcal{R}_r^\lambda$ с различными коэффициентами, а именно обозначим

$$\Sigma[\gamma(N_\sigma^{(1)})] \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma\in\mathcal{R}_r^\lambda} \gamma(N_\sigma^{(1)})\, c_\sigma^r\, \tau^{N_\sigma^{(1)}}.$$

В частности, формула (П.2) в этих обозначениях имеет вид

$$\mathcal{K}_R(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) = \Sigma[1]\, X_2^\lambda + O(X_2^{\lambda-1}).$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}(D_1\mathcal{K}_R)(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) &= \Sigma[N_\sigma^{(1)}]\, X_2^\lambda + O(X_2^{\lambda-1}),\\ (D_2\mathcal{K}_R)(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) &= \Sigma\bigg[\lambda - \frac{f_2}{\mu}N_\sigma^{(1)}\bigg] X_2^\lambda + O(X_2^{\lambda-1}),\\ (D_1^2\mathcal{K}_R)(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) &= \Sigma[(N_\sigma^{(1)})^2]\, X_2^\lambda + O(X_2^{\lambda-1}),\\ (D_1D_2\mathcal{K}_R)(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) &= \Sigma\bigg[N_\sigma^{(1)}\bigg(\lambda - \frac{f_2}{\mu}N_\sigma^{(1)}\bigg)\bigg] X_2^\lambda + O(X_2^{\lambda-1}),\end{aligned}$$

где $D_j = X_j \frac{\partial}{\partial X_j}$. Подставляя эти асимптотики в формулу для G_1:

$$G_1(X_1, X_2) = \frac{D_2\mathcal{K}_R \cdot D_1^2\mathcal{K}_R - D_1 D_2\mathcal{K}_R \cdot D_1\mathcal{K}_R}{X_1(\mathcal{K}_R)^2},$$

получим

$$\begin{aligned}
&\big(X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2)\big)\Big|_{X_2=\infty} \\
&\quad = \frac{\Sigma[\lambda - \frac{f_2}{\mu} N_\sigma^{(1)}]\Sigma[(N_\sigma^{(1)})^2] - \Sigma[N_\sigma^{(1)}(\lambda - \frac{f_2}{\mu} N_\sigma^{(1)})]\Sigma[N_\sigma^{(1)}]}{\tau(\Sigma[1])^2} \\
&\quad = \lambda \frac{\Sigma[1]\Sigma[(N_\sigma^{(1)})^2] - (\Sigma[N_\sigma^{(1)}])^2}{\tau(\Sigma[1])^2} = \lambda \frac{\partial}{\partial \tau}\bigg(\frac{\Sigma[N_\sigma^{(1)}]}{\Sigma[1]}\bigg).
\end{aligned}$$

Поэтому искомый интеграл примет вид

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \big(X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2)\big)\Big|_{X_2=\infty} d\tau &= \lambda \frac{\Sigma[N_\sigma^{(1)}]}{\Sigma[1]}\bigg|_{\tau=0}^{\infty} \\
&= \lambda\Big(\max_{\sigma\in\mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} - \min_{\sigma\in\mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)}\Big). \qquad (\text{П.4})
\end{aligned}$$

Обозначим $l = r^{(2)} + \sigma$. Тогда в силу (7.11) имеем

$$\sigma \in \mathcal{R}_r \quad \Longleftrightarrow \quad l \in \mathbb{Z}_+^3.$$

Учтем явные формулы (5.9) для базиса $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ и представление (4.3):

$$\begin{aligned}
l_1 &= r_1^{(2)} + N_\sigma^{(1)} f_2 + N_\sigma^{(2)}\mu, \\
l_2 &= r_2^{(2)} - N_\sigma^{(1)} f_1 + N_\sigma^{(2)}\nu, \qquad (\text{П.5}) \\
l_3 &= r_3^{(2)} + N_\sigma^{(2)}.
\end{aligned}$$

Первое равенство (П.5) и определение (П.3) дают

$$\lambda = \frac{1}{|\mu|}\big(r_1^{(2)} - \min_{l\in\boldsymbol{\Delta}[M]} l_1\big) = \frac{r_1^{(2)} - r_1^{(3)}}{|\mu|}, \qquad (\text{П.6})$$

где мы учли формулы (6.6a): $\min_{l\in\boldsymbol{\Delta}[M]} l_1 = r_1^{(3)}$.

Далее, первое и третье равенства (П.5) дают

$$N_\sigma^{(1)} = \frac{|\mu|}{f_2}(l_3 - r_3^{(2)}) + \frac{1}{f_2}(l_1 - r_1^{(2)}).$$

Отсюда получаем

$$\max_{\sigma\in\mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} = \frac{|\mu|}{f_2} \max_{\substack{l\in\boldsymbol{\Delta}[M] \\ l_1 = r_1^{(3)}}} l_3 + \frac{1}{f_2}(r_1^{(3)} - r_1^{(2)} - |\mu| r_3^{(2)}),$$

$$\min_{\sigma\in\mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} = \frac{|\mu|}{f_2} \min_{\substack{l\in\boldsymbol{\Delta}[M] \\ l_1 = r_1^{(3)}}} l_3 + \frac{1}{f_2}(r_1^{(3)} - r_1^{(2)} - |\mu| r_3^{(2)}).$$

Теперь нам понадобится следующая лемма.

Лемма П.1. *Пусть* (j,k,s) *– какая-то циклическая перестановка чисел* $(1,2,3)$. *Обозначим через* l^* *точку, на которой достигается* $\min_{l\in\mathbf{\Delta}[M]} l_s$. *Тогда имеют место следующие равенства*:

$$\frac{1}{f_k}\Big(\max_{\substack{l\in\mathbf{\Delta}[M]\\ l_s=l_s^*}} l_j - \min_{\substack{l\in\mathbf{\Delta}[M]\\ l_s=l_s^*}} l_j\Big) = \left[\frac{l_j^*}{f_k}\right] + \left[\frac{l_k^*}{f_j}\right] = \left[\frac{r_k^{(k)}}{f_j}\right],$$

где $r^{(k)}$ *– вершина* (6.6a) *диофантова остова* $\mathbf{\Delta}[M]$.

В силу леммы П.1 имеем

$$\max_{\sigma\in\mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} - \min_{\sigma\in\mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} = \frac{|\mu|}{f_2}\Big(\max_{\substack{l\in\mathbf{\Delta}[M]\\ l_1=r_1^{(3)}}} l_3 - \min_{\substack{l\in\mathbf{\Delta}[M]\\ l_1=r_1^{(3)}}} l_3\Big) = |\mu|\left[\frac{r_3^{(3)}}{f_2}\right].$$

Учитывая последнюю формулу, а также (П.6), мы получаем из (П.4), что

$$\int_0^\infty \big(X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2)\big)\Big|_{X_2=\infty} d\tau = (r_1^{(2)} - r_1^{(3)})\left[\frac{r_3^{(3)}}{f_2}\right].$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$-\int_0^\infty \big(X_1^{-\nu/f_1} G_2(X_1, tX_1^{-\nu/f_1})\big)\Big|_{X_1=\infty} dt = (r_2^{(2)} - r_2^{(1)})\left[\frac{r_1^{(1)}}{f_3}\right].$$

Складывая эти два интеграла в (П.1), приходим к (9.4).

Если в представлении (6.5) все три числа M_{12}, M_{23} и M_{31} неотрицательны, то координаты вершин $r^{(s)}$ в (9.4) задаются формулами (6.6b). Подставляя их в (9.4), получим (9.4a).

Список литературы

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М., 1972; англ. пер.: V. M. Babic, V. S. Buldyrev, *Short-wavelength diffraction theory. Asymptotic methods*, Springer Ser. Wave Phenomena, **4**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
2. Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, М., 1984; англ. пер.: N. N. Bogolubov, N. N. Bogolubov, jr., *An introduction to quantum statistical mechanics*, Gordon and Breach, Yverdon, 1994.
3. Х. Цикон, Р. Фрёзе, В. Кирш, Б. Саймон, *Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
4. Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Гостехиздат, М.–Л., 1941; пер. с англ.: G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc., New York, 1927.
5. F. G. Gustavson, "Oil constructing formal integrals of a Hamiltonian system near ail equilibrium point", *Astron. J.*, **71** (1966), 670–686.
6. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, "Математические аспекты классической и небесной механики", *Динамические системы – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **3**, ВИНИТИ, М., 1985, 5–290; англ. пер.: V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, "Mathematical aspects of

classical and celestial mechanics", *Dynamical systems*, III, Encyclopaedia Math. Sci., **3**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 1–291.

7. Á. S. Egilsson, "On embedding the 1 : 1 : 2 resonance space in a Poisson manifold", *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **1**:2 (1995), 48–56.
8. B. L. Davis, "Embedding dimensions of Poisson spaces", *Int. Math. Res. Not.*, 2002, № 34, 1805–1839.
9. A. S. Egilsson, *Newton polyhedra and Poisson structures from certain linear Hamiltonian circle actions*, arXiv: `abs/math/0411398`.
10. M. Karasev, "Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. II", *Adv. Stud. Contemp. Math.* (*Kyungshang*), **11**:1 (2005), 33–56.
11. М. В. Карасев, "Резонансы и квантовый метод характеристик", *Международ. конф. "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы"* (Москва, 2004), МГУ, М., 2004, 99–100; M. V. Karasev, "Birkhoff resonances and quantum ray method", *Proceeding of International Seminar "Day on Diffraction"*, St.Petersburg University and Steklov Mathematical Institute, St.Petersburg, 2004, 114–126.
12. M. Karasev, "Noncommutative algebras, nanostructures, and quantum dynamics generated by resonances", *Quantum algebras and Poisson geometry in mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **216**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 1–17.
13. M. Karasev, "Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. III", *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 131–150.
14. M. Karasev, "Resonance gyrons and quantum geometry", *From geometry to quantum mechanics*, Progr. Math., **252**, Birkhäuser, Boston, 2007, 253–275.
15. А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972; англ. пер.: A. A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.
16. В. П. Маслов, "Применение метода упорядоченных операторов для получения точных решений", *ТМФ*, **33**:2 (1977), 185–209; англ. пер.: V. P. Maslov, "Application of the method of ordered operators to obtain exact solutions", *Theoret. and Math. Phys.*, **33**:2 (1977), 960–976.
17. М. В. Карасев, "Асимптотический спектр и фронт осцилляций для операторов с нелинейными коммутационными соотношениями", *Докл. АН СССР*, **243**:1 (1978), 15–18; англ. пер.: M. V. Karasev, "The asymptotic spectrum and oscillation front for operators with nonlinear commutation relations", *Soviet Math. Dokl.*, **19**:6 (1978), 1300–1304.
18. Л. Д. Фаддеев, "Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля", *Проблемы квантовой теории поля*, Дубна, 1979, 249–299.
19. В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, "Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. I. Псевдодифференциальные уравнения с растущими коэффициентами", Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **13**, ВИНИТИ, М., 1979, 5–144; англ. пер.: V. P. Maslov, V. E. Nazaikinskii, "Algebras with general commutation relations and their applications. I. Pseudodifferential equations with increasing coefficients", *J. Soviet Math.*, **15**:3 (1981), 167–273.
20. М. В. Карасев, В. П. Маслов, "Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II. Операторные унитарно-нелинейные уравнения", Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **13**, ВИНИТИ, М., 1979, 145–267; англ. пер.: M. V. Karasev, V. P. Maslov, "Algebras with general commutation relations and their applications. II. Unitary-nonlinear operator equations", *J. Soviet Math.*, **15**:3 (1981), 167–273.
21. Е. К. Склянин, "О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера. Представления квантовой алгебры", *Функц. анализ и его*

прил., **17**:4 (1983), 34–48; англ. пер.: E. K. Sklyanin, "Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation. Representations of quantum algebras", *Funct. Anal. Appl.*, **17**:4 (1983), 273–284.

22. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986; англ. пер.: L. D. Faddeev, L. A. Takhtadzhyan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
23. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, "Квантование групп Ли и алгебр Ли", *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206; англ. пер.: N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, "Quantization of Lie groups and Lie algebras", *Leningrad Math. J.*, **1**:1 (1990), 193–225.
24. М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991; англ. пер.: M. V. Karasev, V. P. Maslov, *Nonlinear Poisson brackets. Geometry and quantization*, Transl. Math. Monogr., **119**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
25. M. Karasev, E. Novikova, "Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding", *Coherent transform, quantization, and Poisson geometry*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **187**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 1–202.
26. М. В. Карасев, Е. М. Новикова, "Квадратичные скобки Пуассона в эффекте Зеемана. Неприводимые представления и когерентные состояния", *УМН*, **49**:5 (1994), 169–170; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, "Quadratic Poisson brackets in the Zeeman effect. Irreducible representations and coherent states", *Russian Math. Surveys*, **49**:5 (1994), 179–180.
27. М. В. Карасев, Е. М. Новикова, "Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле", *ТМФ*, **108**:3 (1996), 339–387; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, "Representation of exact and semiclassical eigenfunctions via coherent states. Hydrogen atom in a magnetic field", *Theoret. and Math. Phys.*, **108**:3 (1996), 1119–1159.
28. М. В. Карасев, Е. М. Новикова, "Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода", *ТМФ*, **142**:3 (2005), 530–555; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, "Algebra with polynomial commutation relations for the Zeeman–Stark effect in the hydrogen atom", *Theoret. and Math. Phys.*, **142**:3 (2005), 447–469; M. Karasev, E. Novikova, "Algebras with polynomial commutation relations for a quantum particle in electric and magnetic fields", *Quantum algebras and Poisson geometry in mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **216**, Providence, RI, 2005, 19–135.
29. В. В. Козлов, *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1995; англ. пер.: V. V. Kozlov, *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **31**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
30. G. W. Schwartz, "Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group", *Topology*, **14**:1 (1975), 63–68.
31. M. Karasev, "Advances in quantization: quantum tensors, explicit star-products, and restriction to irreducible leaves", *Differential Geom. Appl.*, **9**:1–2 (1998), 89–134.
32. M. V. Karasev, "Quantum surfaces, special functions, and the tunneling effect", *Lett. Math. Phys.*, **56**:3 (2001), 229–269.
33. В. В. Козлов, *Общая теория вихрей*, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1998; англ. пер.: V. V. Kozlov, *Dynamical systems X. General theory of vortices*, Encyclopaedia Math. Sci., **67**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
34. Б. Костант, "Квантование и унитарные представления", *УМН*, **28**:1 (1973), 163–225; пер. с англ.: B. Kostant, "Quantization and unitary representations. I. Prequantization", *Lectures in modern analysis and applications*. III, Lecture Notes in Math., **170**, Springer, Berlin, 1970, 87–208.

35. E. M. Novikova, “Minimal basis of the symmetry algebra for three-frequency resonance”, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:4 (2009), 518–528.
36. В. А. Фок, *Работы по квантовой теории поля*, Изд-во ЛГУ, Л., 1957.
37. S. Bergman, *The Kernel function and conformal mapping*, Math. Surveys, **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1950.
38. Sh. Chern, “Scientific report on the second summer institute, several complex variables. Part II. Complex manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62**:2 (1956), 101–117.
39. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, 2-е изд., Наука, М., 1986; англ. пер. 1-го изд.: F. A. Berezin, *The method of second quantization*, Academic Press, New York–London, 1966.
40. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. Perelomov, *Generalized coherent states and their applications*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1986.

М. В. Карасев (M. V. Karasev)
Московский государственный институт электроники и математики
E-mail: karasev@amath.msk.ru

Поступило в редакцию
22.04.2009
28.08.2009

Е. М. Новикова (E. M. Novikova)
Московский государственный институт электроники и математики
E-mail: novikova@miem.edu.ru