# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние 50 лет было выполнено значительное число исследований, относящихся к области, которую можно было бы обозначить как «теория коллективных решений». Эта теория включает, в первую очередь, такой классический результат, как теорему о невозможности К. Эрроу об агрегировании индивидуальных предпочтений в коллективное.

Сюда же можно отнести результаты, впервые полученные Д. Гейлом и Л. Шепли, об обобщенных паросочетаниях, в частности, для решения задачи о найме на работу, когда наниматели имеют предпочтения относительно работников, а работники — относительно фирм, которые их нанимают; задача же состоит в том, чтобы построить устойчивое распределение работников по фирмам.

Еще одним типом моделей описывается распределение влияния между участниками в выборных органах — тема, которая активно обсуждается в последнее время, в частности, в связи с расширением Европейского Союза.

Другой тип моделей, которые начали развиваться в 50-е гг. XX в., относится к понятию сбалансированности выборного органа, под которой понимается степень близости выборного органа, например парламента, к двухпартийной структуре.

Наконец, последний тип моделей, также активно разрабатываемых в последнее время, относится к задаче справедливого дележа, т.е. к тому, как справедливо поделить какие-либо ресурсы между участниками дележа.

Вышеназванные модели объединяются тремя признаками. Во-первых, как множество альтернатив, так и множество участников предполагаются конечными. Во-вторых, эти модели используют некоторый общий аппарат, а именно: бинарные отношения и графы, которыми моделируются предпочтения участников в перечисленных задачах. В-третьих, обычно эти модели разъясняются в различных специальных курсах, изучаемых на старших курсах бакалавриата или даже в магистратуре. Исключение составляет лишь теорема Эрроу, которая (в очень простой форме) иногда излагается в курсах микроэкономики на II курсе.

На наш взгляд, есть необходимость в единообразном и доступном изложении этих моделей для экономистов, политологов, студентов, обучающихся по специальностям «Государственное и муниципальное управление» и «Бизнес-информатика» еще в бакалавриате, а именно: на I или II курсе. Это необходимо прежде всего потому, что умение работать с дискретными моделями чрезвычайно важно для профессиональной деятельности будущих выпускников. Кроме того, мы считаем, что следует прививать студентам навыки работы с моделями на конечных множествах, т.е. то, что не изучается в стандартных курсах математического анализа и линейной алгебры на I курсе. Изучение таких моделей прививает студентам навык самостоятельной работы. Более того, учитывая, что модели в этой области формализуются достаточно просто, самостоятельная работа студентов может перерасти, как мы надеемся, в любовь к научным исследованиям.

Настоящая книга преследует все вышеназванные цели. Она написана на основе курса лекций, прочитанных Ф.Т. Алескеровым в 2004—2005 гг. на факультетах экономики, бизнес-информатики и государственного и муниципального управления ГУ ВШЭ под названием «Дискретные математические модели», «Дискретное моделирование» и «Теория выбора». Лекции сопровождались семинарами, которые вели А.П. Молчанов, Э.Л. Хабина и Д.А. Шварц.

Предлагаемое читателям учебное пособие имеет существенное отличие от книг по дискретной математике, в которых в большинстве своем предлагается математический подход к изложению материала без учета профессиональных интересов будущих специалистов. При «классическом» изложении строится обширная математическая теория и лишь затем (притом не всегда) рассматриваются ее отдельные практические приложения. Такой подход создает впечатление оторванности излагаемого материала от практических нужд. В настоящем пособии авторы предлагают иной подход: в начале каждой из глав рассматриваются конкретные практические задачи и проблемы, заимствованные из социально-экономической и политической сфер жизни современного общества. Затем строятся математические модели, для изучения которых предлагается соответствующий компактный математический аппарат.

Авторы отдают предпочтение алгоритмическому подходу к изложению материала. Именно поэтому доказательства большинства теорем носят конструктивный характер, что позволяет строить дискретные объекты, обладающие заданными свойствами.

Глава 1 посвящена изложению элементов классической теории паросочетаний, т.е. случаю, когда не учитываются предпочтения участников. Здесь приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории множеств, теории графов, обсуждается применение двудольных графов для наглядного представления паросочетания, описывается постановка «задачи о свадьбах», определяются максимальные и совершенные паросочетания, доказывается критерий существования в графе совершенного паросочетания, строится алгоритм нахождения максимального паросочетания. Кроме того, в этой главе описываются возможности применения теории паросочетаний для построения систем различных представителей для заданных семейств множеств.

В главе 2 рассматриваются обобщенные паросочетания при предпочтениях участников, которые описываются линейными порядками. Здесь излагаются условия классической рациональности предпочтений, приводится один из возможных методов построения устойчивых паросочетаний, обсуждаются возможности манипулирования предпочтениями со стороны участников. В заключение приводится ряд моделей, описываемых обобщенными паросочетаниями.

Глава 3 полностью посвящена бинарным отношениям, описанию их свойств и специальных классов, т.е. здесь развивается тот математический аппарат, который позволяет моделировать и изучать предпочтения участников, что является особенно важным в самых различных задачах о принятии решений. Для наглядного представления бинарных отношений используются графы, поэтому особое внимание уделяется переформулировке свойств бинарных отношений «на языке» графов. В этой главе описываются отношения несравнимости для частичных, слабых и линейных порядков. Значительное место отводится изучению выбора по отношению предпочтения. С этой целью вводятся функции выбора, рационализируемые как строгими, так и нестрогими предпочтениями.

Вопросам построения коллективного выбора посвящена глава 4. При этом предпочтения участников по-прежнему описываются линейными порядками, а коллективное решение — некоторым бинарным отношением. Здесь приводятся различные правила голосования (правило простого большинства, относительного большинства, правило Борда и др.). Основное же внимание уделяется изложению аксиоматической теории агрегирования локальных правил, рассмотрению парадокса Эрроу, а также парадокса Сена (о невозможности паретовского либерала). Завершается глава обсуждением возможностей стратегического поведения участников голосования.

В главе 5 продолжается обсуждение вопросов агрегирования, но теперь это агрегирование на графах. Здесь устанавливается взаимосвязь ядра графа с внутренне и внешне устойчивыми множествами. Кроме того, рассматриваются некоторые нелокальные правила принятия коллективных решений (процедуры Кумбса, Нансона, Фишберна, правила Коупленда и др.). Особое место занимает «задача о лидере», в которой описывается процедура выявления победителя турнира, учитывающая относительную силу его участников.

Глава 6 посвящена коалициям и определению влияния участников коалиций. Здесь вводятся понятия выигрывающей коалиции, характеристической функции, ключевых участников выигрывающих коалиций, а также рассматриваются различные индексы влияния, среди которых индекс Банцафа, Шепли — Шубика, Джонсона и др. С помощью индекса Банцафа изучается влияние фракций и депутатских групп в Государственной Думе Российской Федерации 3-го созыва, институциональный баланс власти в Совете министров расширенного Евросоюза. Приводятся также необходимые сведения из комбинаторики.

В главе 7 рассматриваются проблемы сбалансированности групп. Для описания взаимоотношений в малых группах вводятся знаковые графы, определяются понятия сбалансированности малой группы и соответствующего ей графа, приводится критерий сбалансированности знакового графа, а также несколько различных мер относительной сбалансированности знаковых графов. Эти методы применяются для анализа сбалансированности Государственной Думы Российской Федерации 3-го созыва, а также для анализа литературных произведений на примере пьесы У. Шекспира «Макбет».

Глава 8 посвящена задаче справедливого дележа в ее дискретной формулировке. Рассматривается процедура «дели и выбирай», обсуждаются возникающие при ее реализации проблемы, формулируются условия справедливого дележа. В качестве альтернативы процедуре «дели и выбирай» приводится процедура «подстраивающийся победитель», исследуется вопрос о справедливости дележа, получаемого с помощью указанной процедуры.

Каждая глава снабжена задачами и упражнениями, решения, указания и ответы к которым приводятся в конце книги. Многие задачи носят профессионально-ориентированный характер и служат инструментом для выработки умений и навыков общения студентов с дискретными объектами социально-экономической и общественно-политической природы.

Обратим внимание преподавателей на то, что каждая глава содержит больше материала, чем может быть изложено в двухчасовой лекции. Поэтому за преподавателем остается выбор степени подробности, с которой будут излагаться те или иные вопросы.

Предполагается, что читатели хорошо знакомы с основами теории множеств, поэтому в книге в качестве напоминания приводятся лишь самые необходимые факты. Читателям, впервые знакомящимся с теорией множеств, авторы рекомендуют предварительно изучить специальную литературу по этому вопросу, например, [13], [15], [25].

### *Благодарности*

*Мы очень благодарны нашим студентам, которые одобрительно приняли курс, высказали много ценных замечаний по изложению материала и предложенным задачам.*

*Кроме того, мы благодарны ряду коллег, без поддержки которых этот курс вряд ли был бы прочитан. Среди них особенно отметим В.С. Автономова, Я.И. Кузьминова, М.И. Левина, Л.Л. Любимова, И.В. Прангишвили, Т.А. Протасевич, Р.М. Энтова, А.А. Яковлева, Е.Г. Ясина.*

*Особая благодарность В.М. Полтеровичу, который высказал много ценных замечаний по содержанию и фактически предложил настоящее название книги.*

*Мы очень признательны Н.А. Андрюшиной, Л.А. Судалиной и В.И. Якубе, которые помогли при подготовке текста, В.В. Шувалову, решившему многие технические проблемы, и редактору книги*

*О.А. Шестопаловой, «выловившей» не только огромное количество опечаток, но и несколько содержательных ошибок.*

*Ряд коллег оказали нам помощь в подготовке отдельных материалов. В первую очередь мы хотим упомянуть безвременно ушедшего А.П. Молчанова, который также вел семинары по этому курсу.*

*В.И. Якуба написал компьютерные программы по отдельным разделам курса.*

*Ф.Т. Алескеров благодарит за частичную поддержку работы грантом № 285/10-04 Государственного университета — Высшей школы экономики «Модели оценки влияния участников на коллективное принятие решений при учете предпочтений участников и их использование для анализа ГД РФ с 1994 по 2003 г.», а также грантом РФФИ № 05-01-00188 «Модели влияния групп в выборном органе и его устойчивости и их применение к ГД РФ 1993—2006 гг.».*

*Наконец, мы благодарны нашим семьям, которые терпеливо поддерживали нашу работу над книгой.*

# 1
# глава

# ПАРОСОЧЕТАНИЯ

## 1.1

## Введение

Одна из известных задач об организации работ состоит в следующем: задано множество работников и множество работ. Как наилучшим образом распределить работников по работам? Эта задача часто интерпретируется как «задача о свадьбах». Иначе говоря, речь идет об эффективном в каком-то смысле составлении пар «работник — работа» или «жених — невеста». Набор таких пар далее называется паросочетанием.

Эта задача была предметом активного исследования в теории графов в 20-е—30-е гг. XX в. ([8], [12], [21]).

В параграфе 1.2 приводятся необходимые сведения из теории множеств, теории графов, описывается постановка «задачи о свадьбах». В параграфе 1.3 излагаются вопросы, связанные с двудольными графами и возможностью их применения для наглядного представления паросочетаний. Параграф 1.4 посвящен паросочетаниям специального вида, так называемым максимальным и совершенным паросочетаниям. Здесь приводится критерий существования в графе совершенного паросочетания, алгоритм построения максимального паросочетания, а также теорема, дающая представление о размере максимального паросочетания в графе. В параграфе 1.5 представлен материал о трансверсалях семейств множеств, описываются возможности применения теории паросочетаний для построения систем различных представителей для заданных семейств множеств. Эти системы имеют прямое отношение к задаче составления комиссий, когда надо наиболее полно учесть различную специализацию членов комиссий. Эта задача также описывется в параграфе 1.5.

Параграф 1.6 содержит задачи к данной главе.

# 1.2

# Графы

*Граф* — это математический объект, который состоит из *вершин* и *дуг*. Например, вершины — это города и населенные пункты Московского региона, включая Москву, дуги могут означать дороги. Заметим, что и Москва, и самый мелкий населенный пункт представлены на этом графе одинаковыми вершинами (рис. 1.1а).

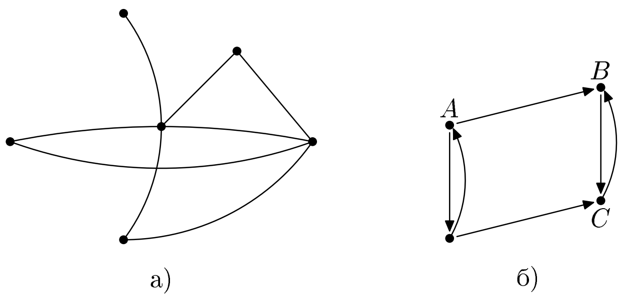



**Рис. 1.1**

Дугами можно не только представить дороги, но и, например, показать наличие поставок товаров. Тогда может возникнуть такая ситуация: из пункта $A$ в пункт $B$ поставки есть, а из $B$ в $A$ поставок нет. Этот факт можно обозначить *ориентированной* (направленной) дугой (рис. 1.1б). Наличие двух ориентированных дуг из $B$ в $C$ и из $C$ в $B$ показывает, что поставки товаров проводятся как из $B$ в $C$, так и обратно. Если речь идет о дорогах, наличие одной ориентированной дуги означает, например, дорогу с односторонним движением.

Ситуацию с ориентированными дугами из $B$ в $C$ и из $C$ в $B$ можно было бы обозначить *неориентированной* дугой, как на рис. 1.1а, и получился бы граф, в котором содержатся как ориентированные, так и неориентированные дуги. Однако далее такие графы рассматриваться не будут.

Также можно представить себе граф, в котором две вершины соединены более чем двумя дугами — так, как это показано на рис. 1.2. Здесь из $C$ в $A$ ведут три дуги, что вполне возможно, если речь идет о дорогах. Однако такие графы (их называют *мультиграфами*) также рассматривать не будем.

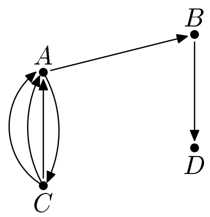



**Рис. 1.2**

Рассмотрим еще один пример. Вершинами графа могут обозначаться сотрудники какой-либо организации, а направленная дуга из вершины $x$ в вершину $y$ может означать согласие сотрудника $x$ работать с сотрудником $y$. Заметим, что при этом $y$ может не хотеть работать с $x$.

Такого рода задачи на графах используются для подбора сотрудников бригад, работающих над проектом. Подробнее об этом будет рассказано в главе 7.

Теперь можно дать несколько формальных определений.

*Графом* называется пара $G = (A, \Gamma)$, где $A$ — конечное множество вершин, $\Gamma$ — множество дуг (иногда их называют ребрами), связывающих эти вершины. Если вершины $x$ и $y$ из множества $A$ соединены дугой, то дуга $(x, y)$ принадлежит $\Gamma$, т.е. $(x, y) \in \Gamma$. Таким образом, $\Gamma \subseteq \{(x, y) | \, x \in A, y \in A\}$.

Напомним, что множество всех упорядоченных пар $(x, y)$, где $x \in A$, $y \in A$, называется *декартовым* (или *прямым*) *произведением* множества $A$ на себя и обозначается $A \times A$ или $A^2$, т.е.

$$A \times A = \{(x, y) | \, x \in A, y \in A\}.$$

Поэтому множество дуг $\Gamma$ графа $G = (A, \Gamma)$ является подмножеством декартова произведения $A \times A$.

Напомним также, что *мощность* (число элементов) *конечного множества* $X$ обозначается через $|X|$. Поэтому число дуг графа $G = (A, \Gamma)$ равно $|\Gamma|$. Например, для графа, изображенного на рис. 1.2, имеем $|\Gamma| = 6$.

Для ориентированных графов наличие дуги $(x, y)$ означает, что дуга направлена из вершины $x$ в вершину $y$. Иногда дуга $(x, y)$ обозначается как $xy$.

Любое подмножество декартова произведения $A \times A$ называется *бинарным отношением*, заданным на множестве $A$. Уже исходя из смысла слова «бинарное» ясно, что таким отношением связываются пары элементов. Например, высказывание «$x$ есть брат $y$» задает бинарное отношение на множестве людей, а «$x$ есть делитель $y$» — на множестве натуральных чисел. Бинарное отношение, заданное на множестве автомобилей, может означать предпочтение какого-то покупателя.

Факт принадлежности пары $(x, y)$ к бинарному отношению $\Gamma$ обозначается как $x\Gamma y$ или $(x, y) \in \Gamma$.

Поскольку множество $\Gamma$ дуг графа $G = (A, \Gamma)$ есть подмножество декартова произведения $A \times A$, можно сказать, что граф $G = (A, \Gamma)$ изображает бинарное отношение $\Gamma$, заданное на множестве $A$.

Рассмотрим последовательность пар вида $(x_1, x_2)$, $(x_2, x_3)$, $\ldots$, $(x_{n-1}, x_n)$, $n \geq 2$, обладающую тем свойством, что каждая пара $(x_i, x_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$ является дугой графа $G$. Такая последовательность называется *цепью* (иногда ее называют *путем*), ведущей из $x_1$ в $x_n$. Если $x_1 = x_n$, то такая цепь называется *циклом*. *Длиной* цепи (цикла) называется число входящих в него дуг, т.е. в данном случае $n - 1$. В неориентированных графах цикл называют также *контуром*.

Цепь, все вершины которой, кроме, возможно, начальной и конечной, попарно различны, называется *простой цепью*.

Цикл называется *простым,* если все его вершины, кроме начальной и конечной, различны.

**Пример.** Рассмотрим граф, показанный на рис. 1.3а (с. 18).

Здесь последовательность дуг $(b, c)$, $(c, d)$, $(d, e)$ является цепью. Цепями являются также последовательность $(a, b)$, $(b, e)$, $(e, b)$ и просто дуга $(b, c)$. Циклом является последовательность дуг $(b, c)$, $(c, d)$, $(d, e)$, $(e, b)$

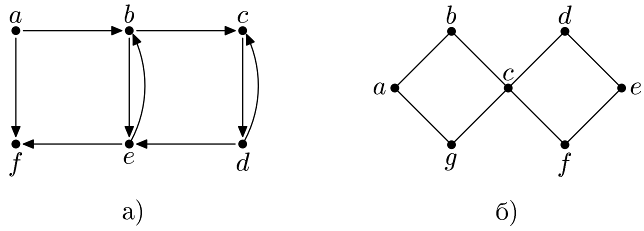



Рис. 1.3

и даже $(b,e),(e,b)$. Но из приведенных примеров простыми будут только цепь $(b,c)$, $(c,d)$, $(d,e)$ и оба цикла.

На рис. 1.3б показан другой граф. Здесь последовательность дуг $(a,b)$, $(b,c)$, $(c,d)$, $(d,e)$ образует простую цепь, а $(b,c)$, $(c,d)$, $(d,e)$, $(e,f)$, $(f,c)$ — цепь, которая не является простой, поскольку вершина $c$ встречается в ней два раза.

Простыми циклами здесь будут $(a,b)$, $(b,c)$, $(c,g)$, $(g,a)$ и $(e,d)$, $(d,c)$, $(c,f)$, $(f,e)$. Цикл $(a,b)$, $(b,c)$, $(c,d)$, $(d,e)$, $(e,f)$, $(f,c)$, $(c,g)$, $(g,a)$ простым не является, поскольку вершина $c$ встречается в нем два раза.

Рассмотрим теперь следующую ситуацию. На танцы пришли трое мужчин и три женщины, которых обозначим через $m_1$, $m_2$, $m_3$ и $w_1$, $w_2$, $w_3$ соответственно. Обозначение $m$ идет от слова *man*, $w$ — от слова *woman* (такова традиция в этой области).

Предположим, что мужчины и женщины разбиваются на пары знакомых, и далее весь вечер пары партнерами не обмениваются. Естественно, знакомства могут быть организованы самым различным образом, например, как на рис. 1.4.

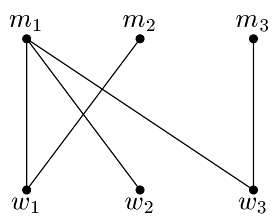



Рис. 1.4

Здесь элементы $m_i$ и $w_j$ соединены дугой, если мужчина $m_i$ и женщина $w_i$ знакомы. Из этого рисунка следует, что $m_1$ знаком со всеми женщинами, $m_2$ — только с $w_1$ и $m_3$ знаком с $w_3$.

Сформулируем задачу: как организовать пары, чтобы в танцах участвовало как можно больше людей? Ответ на этот вопрос дается в теории паросочетаний, которой и посвящена эта глава.

Рассмотрим следующее множество пар: $\{m_1w_1, m_3w_3\}$. При такой организации пар $m_2$ и $w_2$ в танцах не участвуют. Однако это не лучшее решение — если создать пары иначе, например, так: $\{m_1w_2, m_2w_1, m_3w_3\}$, — то все мужчины и женщины смогут получить удовольствие от вечера. Согласно старой традиции, эта задача называется также *задачей о свадьбах*.

Конечно, может возникнуть вопрос: стоит ли создавать теорию для решения такой задачи? Однако эта модель — самая простая. Более сложная модель подобного типа — распределение работников для выполнения работ. В такой модели $M$ — множество работников, $W$ — множество работ, а дуги между $M$ и $W$ означают умение работника выполнять ту или иную работу.

Тогда поставленная задача — задействовать как можно больше пар — имеет смысл для эффективного использования персонала.

Если множества $M$ и $W$ содержат по три элемента, как в рассмотренном выше примере, то очевидно, что решение можно найти «вручную». Если же эти множества содержат много элементов, сотни и тысячи (представьте себе биржу труда), то найти искомое решение без развитых вычислительных алгоритмов и компьютеров невозможно.

Далее как раз и описывается техника решения поставленной задачи.

## 1.3

# Двудольные графы

В *двудольных графах* множество вершин $A$ задается как объединение непересекающихся множеств $X$ и $Y$, т.е. $A = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$, причем вершины из $X$ могут быть соединены только с вершинами из

$Y$ и наоборот, а две вершины из $X$ (или две вершины из $Y$) между собой не соединяются.

Обозначим двудольный граф как $G = (X \cup Y, \Gamma)$. Формально вышеуказанное условие означает, что $\Gamma \subseteq ((X \times Y) \cup (Y \times X))$. Кроме того, двудольный граф не ориентирован, т.е. если $(x, y) \in \Gamma$, то и $(y, x) \in \Gamma$.

Такой граф удобно представлять в следующем виде (рис. 1.5):

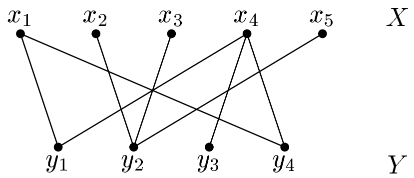



**Рис. 1.5**

Заметим, что множества $X$ и $Y$ могут содержать разное число элементов.

Для двудольных графов обычно принимается, что любая вершина в $X$ соединена дугой с какой-нибудь вершиной в $Y$ и любая вершина в $Y$ соединена с какой-нибудь вершиной в $X$. Вершины графа, которые не соединены никакой дугой с другой вершиной, называются *изолированными*. Таким образом, принимается, что в двудольном графе изолированных вершин нет.

На рис. 1.6а изображен двудольный граф без изолированных вершин, а на рис. 1.6б — граф с одной изолированной вершиной $x_1$.

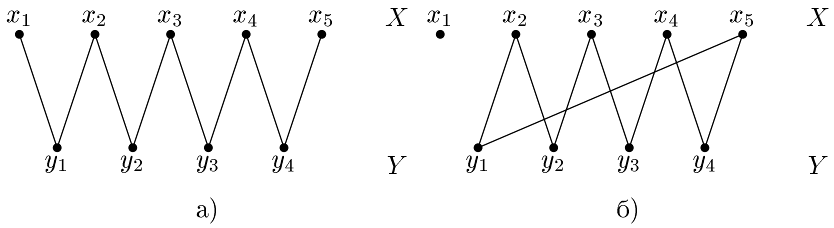



**Рис. 1.6**

Если $X$ обозначает множество мужчин, $Y$ — множество женщин, то упоминавшееся выше знакомство пар можно описывать двудольным графом.

*Дуга* называется *инцидентной* вершине $x$, если элемент $x$ является одним из концов этой дуги. Так, на рис. 1.5 дуга $x_1y_4$ инцидентна вершинам $x_1$ и $y_4$. Аналогично вершина $x$ *инцидентна* дуге, если она является одним из концов этой дуги.

*Степенью вершины* $a$ в графе $G$ называется число $\delta(a)$ инцидентных этой вершине дуг, т.е. дуг вида $(a, b)$. Например, на рис. 1.5 имеем $\delta(x_1) = 2$, $\delta(x_4) = 3$, $\delta(y_3) = 1$.

Начнем изучение двудольных графов (и, тем самым, изучение проблемы распределения работ) с нескольких простых теорем.

**Теорема 1.** *В двудольном графе* $G = (X \cup Y, \Gamma)$ *имеет место равенство*

$$\sum_{x \in X} \delta(x) = \sum_{y \in Y} \delta(y) = |\Gamma|.$$

Доказательство. Поскольку каждое ребро инцидентно ровно одной вершине в $X$, то $|\Gamma| = \sum\limits_{x \in X} \delta(x)$. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. ■

**Задача.** Пусть есть множество работ $Y$ и множество работников $X$, причем для каждого вида работ есть ровно $k$ работников, которые могут выполнять эту работу, и каждый работник может выполнять ровно $k$ работ.

Например, если имеется три работника и три вида работ, и при этом каждый вид работ могут выполнять ровно два работника, и каждый работник может выполнять ровно два вида работ, то описанная ситуация может быть изображена в виде графа, показанного на рис. 1.7.

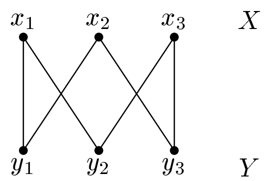



**Рис. 1.7**

Покажем, что:

а) число работников равно числу работ, т.е. $|X| = |Y|$;

б) для любого $n$-элементного подмножества $A$ множества $X$ существует не меньше $n$ видов работ, которые может выполнять хотя бы один работник из $A$.

Р е ш е н и е. Согласно условию задачи $\delta(x) = \delta(y) = k$ для любых вершин $x \in X$ и $y \in Y$. Тогда по теореме 1 имеем $|X| \cdot k = |Y| \cdot k = |\Gamma|$, откуда следует, что $|X| = |Y|$. ■

Для решения части б) задачи определим множество

$$J(A) = \{y \in Y \,|\, (x, y) \in \Gamma \text{ для какого-нибудь } x \in A\}.$$

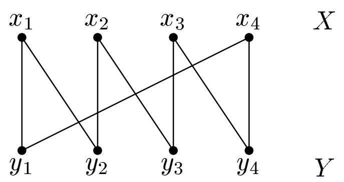



**Рис. 1.8**

На рис. 1.8 изображен двудольный граф $G$, обладающий тем свойством, что $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, $\delta(x) = \delta(y) = k$. Такие графы называются *регулярными степени* $k$ (в нашем случае $k = 2$). Рассмотрим подмножество $A = \{x_1, x_2, x_4\}$ множества $X$. Множество $J(A)$ для $A$ равно

$$J(A) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = Y.$$

Продолжим решение задачи. Поскольку каждая вершина инцидентна ровно $k$ дугам, множество $\Gamma_A$ дуг, которые инцидентны вершинам в $A$, содержит $k \cdot |A| = k \cdot n$ дуг (проверьте для графа на рис. 1.8). По определению множества $J(A)$ каждая из этих дуг имеет инцидентную ей вершину в $Y$. Согласно условию задачи общее число дуг, инцидентных вершинам в $J(A)$, равно $k \cdot |J(A)|$. Отсюда следует, что

$$|\Gamma_A| = k \cdot n \leq k \cdot |J(A)|,$$

т.е. $|J(A)| \geq n$.

## 1.4

## Паросочетания

Естественный вопрос, который возникает при решении задач о женихах и невестах или о работах и работниках, — как задействовать максимальное число людей (поженить в первой задаче и нанять для выполнения работ во второй).

*Паросочетанием* в двудольном графе $G = (X \cup Y, \Gamma)$ называется такое подмножество дуг $M \subseteq \Gamma$, что никакие две дуги из $M$ не имеют общей вершины. Примеры паросочетаний представлены на рис. 1.9 и выделены жирными линиями.

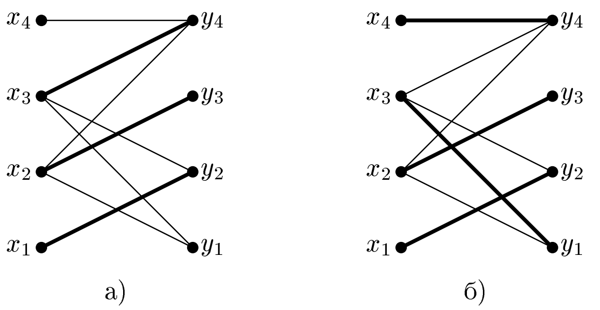



**Рис. 1.9**

Паросочетание в $G$ называется *максимальным*, если в $G$ не существует паросочетания большей мощности, т.е. содержащего большее число дуг.

Далее положим для определенности, что $|X| \leq |Y|$.

Если $|M| = |X|$ (т.е. все женихи находят невест), то паросочетание $M$ называется *совершенным*.

Паросочетание, выделенное на рис. 1.9а жирными линиями, не максимально, т.к. содержит три дуги, а в графе $G$ существует паросочетание, содержащее четыре дуги. Оно показано на рис. 1.9б. Поскольку $|X| = |Y| = 4$, то паросочетание на рис 1.9б по определению совершенно. Оно и максимально, т.к. число дуг в паросочетании не может быть больше числа вершин в $X$ (или в $Y$), т.е. больше 4.

Паросочетание на рис. 1.10 (с. 24) максимально, но не совершенно. Действительно, мощность данного паросочетания — 3. Предположим, что существует паросочетание большей мощности, т.е. содержащее четыре дуги. Это означает, что дуги этого паросочетания выходят из всех вершин $Y$, в частности из $y_1$ и $y_4$. Из этих вершин выходят только дуги $x_4y_1$ и $x_4y_4$, но они имеют общую вершину и не могут одновременно принадлежать паросочетанию. Следовательно, первоначальное паросочетание максимально. Но поскольку в нем только три дуги, а $|X| = |Y| = 4$, то оно не совершенно.

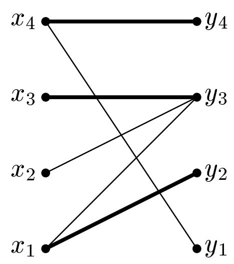


Рис. 1.10

Исследуем вопрос о существовании совершенных паросочетаний в двудольных графах. Для этого напомним определение множества $J(A)$, введенное в предыдущем параграфе: для $A \subseteq X$

$$J(A) = \{y \in Y \,|\, (x, y) \in \Gamma \text{ хотя бы для одного } x \in A\}.$$

Пусть $J(A)$ содержит меньше элементов, чем $A$, или, более формально, $|J(A)| < |A|$, тогда в терминах задачи о женихах и невестах число женщин, знакомых с мужчинами из $A$, меньше, чем число мужчин, т.е. кому-то из $A$ невесты не достанется. Поэтому условие $|J(A)| \geq |A|$ является необходимым для существования совершенного паросочетания. Оказывается, что оно является и достаточным.

Это условие называется *условием Холла,* по имени математика Филиппа Холла[1], исследовавшего аналогичную проблему в 1935 г.

**Теорема 2.** *Двудольный граф $G = (X \cup Y, \Gamma)$ имеет совершенное паросочетание, если и только если для всех $A \subseteq X$ выполняется условие Холла, т.е.*

$$\forall A \subseteq X \quad |J(A)| \geq |A|.$$

Доказательство. Предположим, что в графе $G$ имеется совершенное паросочетание. Тогда $\forall A \subseteq X$ вершины в $Y$, которые

[1] Филипп Холл (1904—1982) — английский математик, член Лондонского королевского общества (1942), с 1953 г. — профессор Кембриджского университета.

образуют паросочетание с вершинами из $A$, образуют подмножество $\Delta(A) \subseteq J(A)$ мощности $|\Delta(A)| = |A|$, т.е. $|J(A)| \geq |A|$.

Предположим теперь, что условие Холла выполняется. Пусть $M$ — такое паросочетание, что $|M| < |X|$. Покажем, что можно построить паросочетание $M'$, удовлетворяющее условию

$$|M'| = |M| + 1,$$

т.е. покажем, что можно увеличить число дуг в паросочетании на единицу. Доказательство проиллюстрируем примером. На рис. 1.11а выделено не совершенное паросочетание. Можно проверить, что для этого двудольного графа выполняется условие Холла.

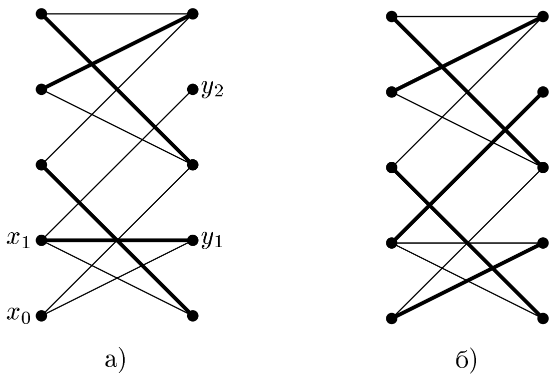



**Рис. 1.11**

Рассмотрим вершину $x_0$, которой не инцидентна ни одна дуга, образующая паросочетание $M$. Из условия Холла следует, что

$$|J(\{x_0\})| \geq |\{x_0\}| = 1,$$

т.е. существует хотя бы одна дуга вида $x_0y_1$. Эта дуга не входит в паросочетание $M$, и если никакая дуга паросочетания не инцидентна вершине $y_1$ , то добавим дугу $x_0y_1$ в $M$ и получим искомое утверждение.

В противном случае (т.е. так, как это показано на рис. 1.11а) рассмотрим вершину $x_1$, которая связана дугой паросочетания с $y_1$. Тогда для множества $\{x_0, x_1\}$ по условию теоремы имеем

$$|J(\{x_0, x_1\})| \geq |\{x_0, x_1\}| = 2,$$

т.е. существует вершина $y_2$, помимо $y_1$, которая связана дугой либо с $x_0$, либо с $x_1$. Если какая-либо дуга паросочетания $M$ инцидентна $y_2$ и связана с вершиной $x_2$, продолжим этот процесс и найдем вершину $y_3$, которая связана дугой либо с $x_0$, либо с $x_1$, либо с $x_2$. Поскольку граф $G$ конечен, то, продолжая таким образом, придем к какой-то вершине $y_r$, которая не инцидентна никакой дуге паросочетания.

В нашем примере $y_2$ — такая вершина, на которой процесс поиска останавливается.

Теперь каждая вершина $y_i$ $(1 \le i \le r)$ связана дугой хотя бы с одной из вершин $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$, т.е. мы получили цепь вида

$$x_0y_1, y_1x_1, x_1y_2, \dots, x_{r-1}y_r,$$

в которой дуги вида $x_iy_i$ $(1 \le i \le r-1)$ принадлежат $M$, а дуги вида $x_{i-1}y_i$ $(1 \le i \le r)$ не принадлежит $M$. Такая цепь называется *чередующейся* цепью.

В примере на рис. 1.11а эта цепь имеет вид

$$x_0y_1, y_1x_1, x_1y_2.$$

Здесь дуга $x_1y_1$ принадлежит $M$, а дуги $x_0y_1$ и $x_1y_2$ $M$ не принадлежат.

Построим теперь новое паросочетание $M'$ так: исключим из $M$ дуги чередующейся цепи вида $x_iy_i$ и, наоборот, включим в него дуги, которые ранее в $M$ не входили, но входят в найденную чередующуюся цепь. Поскольку теперь дуги $x_0y_1$ и $x_{r-1}y_r$ вошли в $M'$, то $|M'| = |M| + 1$.

В нашем примере исключим из $M$ дугу $x_1y_1$ и включим в $M'$ дуги $x_0y_1$ и $x_1y_2$. Это паросочетание показано на рис. 1.11б. Оно уже получилось совершенным. Если же полученное паросочетание не совершенно, то построим новое паросочетание $M''$ с $|M''| = |M'| + 1$ и, продолжая этот процесс, в конце концов придем к совершенному паросочетанию. ■

Скажем еще несколько слов о чередующихся цепях. Цепь вида $x_0y_1, y_1x_1, x_1y_2, y_2x_2, \dots, x_{k-1}y_k$ называется чередующейся цепью для паросочетания $M$, если дуги вида $x_iy_i$ находятся в $M$ и дуги вида

$x_{i-1}y_i$ паросочетанию $M$ не принадлежат. Отметим, что первая дуга $x_0y_1$ и последняя дуга $x_{k-1}y_k$ паросочетанию $M$ не принадлежат. Именно эти дуги включаются в $M'$, а также все дуги вида $x_{i-1}y_i$, что увеличивает число дуг в $M'$ по сравнению с $M$.

Рассмотрим два двудольных графа (рис. 1.12а и 1.12б). Проверим, выполняются ли для них условия Холла, заполнив таблицу (множества $J(A)$ для первого и второго графов обозначаются $J_1(A)$ и $J_2(A)$ соответственно).

| $A$ | $J_1(A)$ | $J_2(A)$ |
|---|---|---|
| $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ | $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ | $Y$ |
| $\{x_1,x_2\}$ | $Y$ | $Y$ |
| $\{x_1,x_3\}$ | $Y$ | $\{y_1,y_2\}$ |
| $\{x_2,x_3\}$ | $\{y_1\}$ | $Y$ |
| $\{x_1\}$ | $Y$ | $\{y_1\}$ |
| $\{x_2\}$ | $\{y_1\}$ | $Y$ |
| $\{x_3\}$ | $\{y_1\}$ | $\{y_2\}$ |

Для первого из графов условие Холла не выполняется, поэтому совершенного паросочетания в этом случае не существует, и паросочетание, показанное на рис. 1.12а, максимально.

Для второго графа условие Холла выполняется и показанное на рис. 1.12б паросочетание не максимально. Поэтому для него должна найтись чередующаяся цепь. Таковой является цепь $x_3y_2, y_2x_2, x_2y_3$. Удалив из паросочетания дугу $y_2x_2$ и добавив $x_3y_2$ и $x_2y_3$, получим совершенное паросочетание (рис. 1.12в).

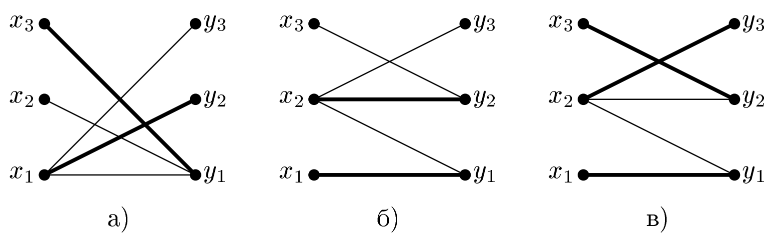



**Рис. 1.12**

В общем случае двудольные графы редко имеют совершенные паросочетания, т.к. условие Холла, вообще говоря, — достаточно ограничительное условие. Поэтому возникает вопрос о нахождении максимальных паросочетаний. В терминах задачи о женихах и невестах это означает, что требуется найти такое паросочетание, чтобы поженить наибольшее возможное число пар.

Заметим, что нарушение условия Холла означает, что существует $A \subseteq X$ такое, что $|A| > |J(A)|$, т.е. число женихов больше возможного числа невест. В этом случае при построении максимального паросочетания, как указывалось ранее, кому-то из множества $A$ невесты не достанется. Очевидно, что число таких одиноких женихов (а в терминах «работники — работы» — число не получивших работу) не менее

$$|A| - |J(A)|.$$

*Дефицитом* двудольного графа $G = (X \cup Y, \Gamma)$ называется величина

$$d = \max_{A \subseteq X} (|A| - |J(A)|).$$

Поскольку по определению пустое множество является подмножеством $X$, т.е. $\varnothing \subseteq X$, и $|\varnothing| = |J(\varnothing)| = 0$, то всегда $d \geq 0$.

Используя понятие дефицита, теорему 2 можно переформулировать следующим образом:

**Теорема 2'.** *Совершенное паросочетание в двудольном графе $G$ существует тогда и только тогда, когда $d = 0$.*

Следующая теорема дает оценку мощности максимального паросочетания.

**Теорема 3.** *Мощность максимального паросочетания $M$ в двудольном графе $G$ равна*

$$|M| = |X| - d.$$

Прежде, чем провести доказательство этой теоремы, проиллюстрируем ее.

**Пример.** Рассмотрим двудольный граф, изображенный на рис. 1.13а (с. 29).

Найдем дефицит этого графа. Для этого рассмотрим табл. 1.1 (с. 29), в которой для каждого множества $A \subseteq X$ приведены $J(A)$ и $|A| - |J(A)|$.

Отсюда следует, что $d = \max_{A \subseteq X}(|A| - |J(A)|) = 1$.

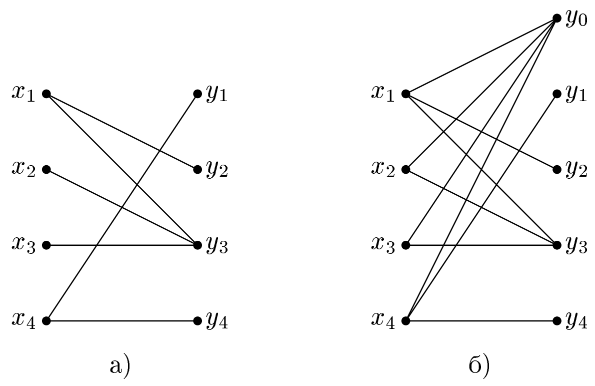



**Рис. 1.13**

**Таблица 1.1.** Вычисление дефицита графа

| $A$ | $J(A)$ | $\|A\| - \|J(A)\|$ |
|---|---|---|
| $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ | $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ | 0 |
| $\{x_1, x_2, x_3\}$ | $\{y_2, y_3\}$ | 1 |
| $\{x_1, x_2, x_4\}$ | $Y$ | $-1$ |
| $\{x_1, x_3, x_4\}$ | $Y$ | $-1$ |
| $\{x_2, x_3, x_4\}$ | $\{y_1, y_3, y_4\}$ | 0 |
| $\{x_1, x_2\}$ | $\{y_2, y_3\}$ | 0 |
| $\{x_1, x_3\}$ | $\{y_2, y_3\}$ | 0 |
| $\{x_1, x_4\}$ | $Y$ | $-2$ |
| $\{x_2, x_3\}$ | $\{y_3\}$ | 1 |
| $\{x_2, x_4\}$ | $\{y_1, y_3, y_4\}$ | $-1$ |
| $\{x_3, x_4\}$ | $\{y_1, y_3, y_4\}$ | $-1$ |
| $\{x_1\}$ | $\{y_2, y_3\}$ | $-1$ |
| $\{x_2\}$ | $\{y_3\}$ | 0 |
| $\{x_3\}$ | $\{y_3\}$ | 0 |
| $\{x_4\}$ | $\{y_1, y_4\}$ | $-1$ |

Рассмотрим теперь двудольный граф, который изображен на рис. 1.13а, и добавим к нему вершину $y_0$ и дуги, соединяющие все вершины множества $X$ с $y_0$. Этот граф (обозначим его через $G^*$) изображен на рис. 1.13б.

Множество $J^*(A)$ вершин в $Y \cup \{y_0\}$, связанных дугами с вершинами $A \subseteq X$ в $G^*$, можно представить в виде $J(A) \cup \{y_0\}$.

Тогда

$$|J^*(A)| - |A| = |J(A) \cup \{y_0\}| - |A| = \\ = |\{y_0\}| + |J(A)| - |A| = d + |J(A)| - |A| \geq 0,$$

т.к. для рассматриваемого графа $G$ имеем $|J(A)| - |A| \geq -1$, а $d = 1$ (табл. 1.1).

Поэтому $G^*$ удовлетворяет условию Холла. Построим в $G^*$ совершенное паросочетание и затем удалим из него дуги, которые оканчиваются в $y_0$. Такое паросочетание и будет искомым максимальным паросочетанием в $G$.

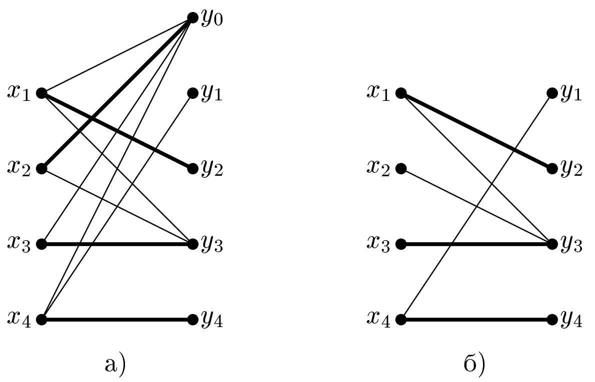



Рис. 1.14

На рис. 1.14а показано совершенное паросочетание в графе $G^*$. Удалив из него дугу $x_2y_0$, получим максимальное паросочетание в $G$, состоящее из дуг $x_1y_2$, $x_3y_3$ и $x_4y_4$ (рис. 1.14б).

Теперь докажем теорему 3.

Доказательство. Построим из графа $G = (X \cup Y, \Gamma)$, дефицит которого равен $d$, новый граф $G^*$, добавив в $Y$ $d$ новых вершин и соединив каждую их них со всеми вершинами $X$. Записывая формально,

$$G^* = (X^* \cup Y^*, \Gamma^*), \quad X^* = X, \quad Y^* = Y \cup \mathcal{D},$$

где $|\mathcal{D}| = d$, и $\Gamma^* = \Gamma \cup \Gamma'$, где $\Gamma'$ содержит дуги, проведенные из всех вершин $X^*$ во все вершины из $\mathcal{D}$.

Рассмотрим теперь произвольное множество $A \subseteq X^*$ и множество $J^*(A)$. Очевидно, что $J^*(A) = \mathcal{D} \cup J(A)$. Тогда

$$|J^*(A)| - |A| = |\mathcal{D}| + |J(A)| - |A| = d + |J(A)| - |A| \geq 0.$$

Из этого следует, что $G^*$ удовлетворяет условию Холла и для него может быть построено совершенное паросочетание $M^*$. Удалив из $M^*$ дуги, инцидентные вершинам из $\mathcal{D}$, получим максимальное паросочетание в $G$. По построению $|M| = |X| - d$. ■

Следует отметить, что способ построения максимального паросочетания, предлагаемый теоремой 3, с вычислительной точки зрения неэффективен, поскольку для нахождения $d$ надо построить все подмножества множества $X$. Если $|X| = n$, то таких подмножеств, как известно, $2^n$, что при больших $n$ делает анализ невозможным.

Поэтому далее будет изложен экономный способ нахождения максимального паросочетания, однако прежде приведем два определения.

Рассмотрим произвольный (не обязательно двудольный) граф $G = (A, \Gamma)$. Граф $G$ называется *связным,* если любые две его вершины соединены цепью.

Пусть $B$ — подмножество $A$. *Подграфом* $G_B$ графа $G$ называется граф $(B, \Gamma \cap (B \times B))$, т.е граф, вершинами которого являются элементы из множества $B$, а дугами — только те дуги графа $G$, которые соединяют вершины из $B$.

**Пример.** $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $A' = \{a_1, a_2, a_5\}$. На рис. 1.15а (с. 32) показан граф $G$, а на рис. 1.15б — его подграф $G_{A'}$.

*Компонентой графа* $G$ называется максимальный по числу вершин связный подграф графа $G$.

На рис. 1.16 (с. 32) показан граф, состоящий из двух компонент.

Вернемся к паросочетаниям и обратимся к следующему примеру. Рассмотрим двудольный граф, показанный на рис. 1.17 (с. 32).

На этом графе выделены паросочетания: на рис. 1.17а не максимальное $M$, на рис. 1.17б — максимальное $M^*$. Рассмотрим множество дуг $F = (M \backslash M^*) \cup (M^* \backslash M)$, т.е. множество дуг из *симметрической разности* $M$ и $M^*$. Другими словами, $F$ содержит дуги, которые принадлежат ровно одному из паросочетаний, т.е.

$$F = \{x_1y_3,\ x_1y_2,\ x_3y_3\}.$$

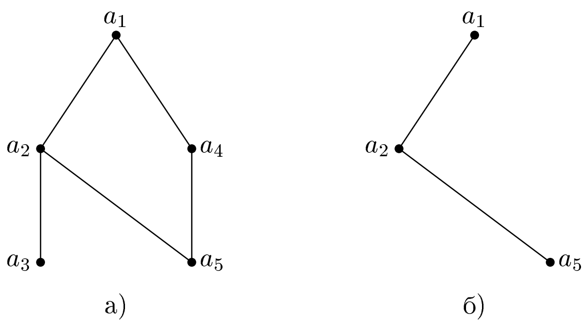



Рис. 1.15

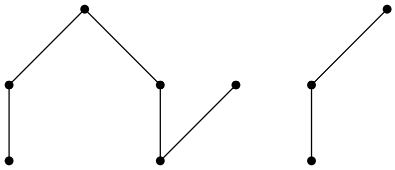


Рис. 1.16

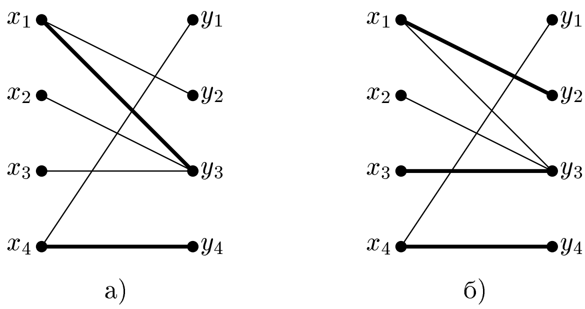



Рис. 1.17

Граф $G_F$, построенный на вершинах, которым инцидентны дуги из $F$, и содержащий эти дуги, показан на рис. 1.18.

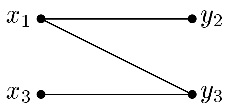



**Рис. 1.18**

Каждая из вершин этого графа имеет степень 1 или 2. Покажем, что в этом случае компонентами графа будут только цепи и циклы. Для этого потребуется следующая лемма.

**Лемма 1.** *Сумма степеней вершин неориентированного графа равна удвоенному числу его дуг.*

Доказательство. Сумма степеней вершин — это число входов дуг в вершины. С другой стороны, каждая дуга входит в две вершины, поэтому число входов в вершины в два раза больше числа дуг. ■

В частности, в любом неориентированном графе сумма степеней вершин — четное число.

Пусть $G$ — компонента графа $G_F$. Возможны два случая:

1) в этой компоненте есть вершина $a$ степени 1. Поскольку общая сумма степеней четная, есть и вторая вершина $b$ степени 1.

Рассмотрим минимальный путь $G'$, соединяющий $a$ и $b$. В $G'$ входят все дуги, выходящие из $a$ и $b$ (их по одной и они входят в $G'$), и все дуги, выходящие из «средних» вершин (их не более двух по условию и ровно две в $G'$). Поэтому $G'$ — компонента $G$ и, поскольку $G$ связен, $G = G'$, т.е. $G$ — простая цепь;

2) в $G$ есть только вершины степени 2. Выберем произвольную вершину и будем «идти» по дугам $G$, не проходя ни по какой дуге два раза. Попасть в уже пройденную вершину невозможно, поскольку тогда ее степень была бы как минимум 3. Если попадаем в новую вершину, то, поскольку ее степень 2, можем из нее выйти. Поэтому путь закончится возвращением в исходную вершину. Пройденные дуги и вершины образуют простой цикл. По тем же соображениям, что и в предыдущем пункте, этот цикл совпадает с $G$. Таким образом, утверждение доказано.

В рассматриваемом выше примере получаем цепь $x_3y_3$, $y_3x_1$, $x_1y_2$. Рассмотрим другой пример.

**Пример.** На рис. 1.19 приведен двудольный граф $G$ и два паросочетания: не максимальное (рис. 1.19а) и максимальное (рис. 1.19б). $G_F$ (рис. 1.19в) содержит один цикл ($x_2y_3$, $y_3x_3$, $x_3y_4$, $y_4x_2$) и одну цепь ($y_1x_1$, $x_1y_2$, $y_2x_4$).

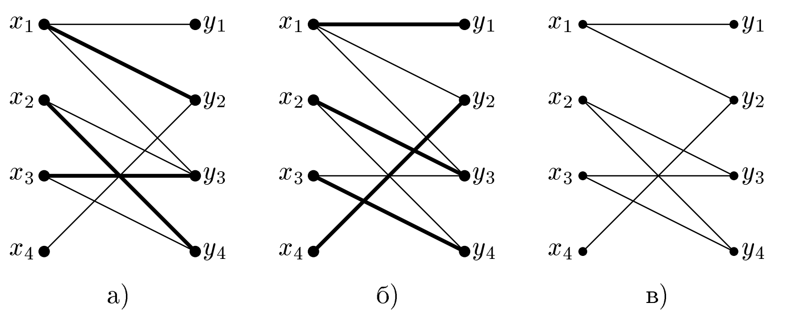



**Рис. 1.19**

В каждой цепи или цикле графа $G_F$ дуги из $M$ чередуются с дугами из $M^*$. В каждом цикле число дуг из $M$ равно числу дуг из $M^*$. Однако, поскольку $M^*$ — максимальное паросочетание, то $|M^*| > |M|$. Отсюда следует, что в графе $G_F$ хотя бы одна компонента должна быть чередующейся цепью для $M$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 4.** *Если в двудольном графе $G$ паросочетание $M$ не максимально, то $G$ содержит чередующуюся цепь для $M$.*

Из доказательства теоремы 2 следует, что, пользуясь чередующейся цепью, можно увеличить мощность паросочетания $M$ на 1.

Отсюда вытекает алгоритм поиска максимального паросочетания:

1) взять любое паросочетание $M$ (даже содержащее всего одну дугу);

2) найти чередующуюся цепь для $M$;

3) если такая цепь найдена, то так, как это сделано в доказательстве теоремы 2, построить паросочетание $M'$, содержащее на одну дугу больше, чем $M$.

Повторить пункт 2 для $M'$;

4) если чередующаяся цепь не найдена, то $M$ — максимальное паросочетание.

Чтобы реализовать алгоритм поиска максимального паросочетания, необходимо уметь находить чередующуюся цепь. Приведем алгоритм поиска, иллюстрируя его примером.

Рассмотрим двудольный граф $G$, изображенный на рис. 1.20а.

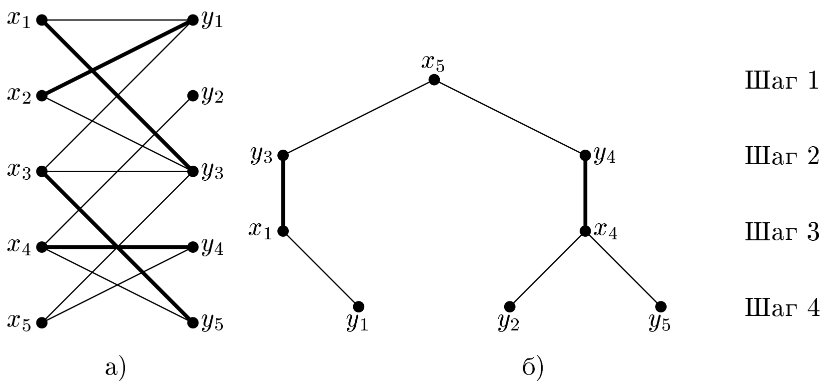



**Рис. 1.20**

Начнем с паросочетания $M = \{x_1y_3, x_2y_1, x_3y_5, x_4y_4\}$, выделенного на рис. 1.20а. Поиск чередующейся цепи начнем с вершины $x_5$, которой не инцидентна никакая дуга из $M$. Алгоритм строит «дерево», начинающееся в выбранной вершине $x_0$, в данном случае — $x_5$ (рис. 1.20б).

Поместим на следующий уровень вершины $y_1, \ldots, y_k$, с которыми $x_0$ связана дугами. Если никакая дуга из $M$ не инцидентна хотя бы одной из этих вершин $y_i$, то дуга $x_0y_i$ — чередующаяся цепь, и процесс поиска останавливается. В нашем случае в $M$ есть дуги, инцидентные вершинам $y_3$ и $y_4$. Тогда на следующий уровень «дерева» поместим все вершины, с которыми $y_1, \ldots, y_k$ связаны дугами из паросочетания $M$. В примере это дуги $y_3x_1$ и $y_4x_4$. На следующий уровень «дерева» поместим вершины, соединенные дугами с предыдущим уровнем. В нашем случае это вершины $y_1$, $y_2$, $y_5$, соединяемые с $x_1$ и $x_4$ дугами $x_1y_1$, $x_4y_2$ и $x_4y_5$. Если никакая дуга из $M$ не инцидентна хотя бы одной из вершин этого уровня, то чередующаяся цепь найдена. В рассматриваемом примере вершины $y_1$ и $y_5$ инцидентны дугам из паросочетания $M$, а $y_2$ — нет. Таким образом, найдена чередующаяся цепь $x_5y_4, y_4x_4, x_4y_2$. Если такой цепи на этом шаге не найдено, то продолжаем процесс.

Может так случиться, что процесс поиска остановится, а искомая вершина не будет найдена. Это означает, что чередующейся цепи, которая начиналась бы в $x_0$, нет. Тогда надо перейти к другой вершине из $X$.

Если чередующаяся цепь так и не найдена, то $M$ — максимальное паросочетание.

После того, как найдена чередующаяся цепь, таким же способом, как это было сделано в доказательстве теоремы 2, можно найти паросочетание $M'$, содержащее большее число дуг. В цепи $x_5y_4, y_4x_4, x_4y_2$ имеем $x_4y_4 \in M$. Исключаем ее из $M$ и включаем в $M'$ дуги $x_5y_4$ и $x_4y_2$. Полученное паросочетание максимально и, даже более того, совершенно (рис. 1.21).

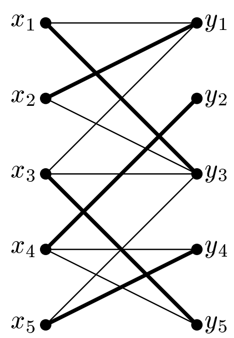



Рис. 1.21

## 1.5

## Трансверсали семейств множеств

Рассмотрим следующий условный пример. На кафедре математики работают шесть преподавателей — $A, B, C, D, E, F$, которые являются членами четырех комиссий университета.

Распределяются эти преподаватели по комиссиям следующим образом:

*методическая комиссия*: $A, B$;

*финансовая комиссия*: $A, C$;

*научная комиссия*: $A, B, C$;

*студенческая комиссия*: $D, E, F$.

Необходимо избрать по одному представителю от каждой комиссии в Ученый совет при следующем ограничении: нельзя, чтобы член Ученого совета представлял более одной комиссии. Можно ли сделать это?

Ответ положительный, т.к. можно избрать представителей от комиссий следующим образом:

*методическая комиссия* — $B$,

*финансовая комиссия* — $C$,

*научная комиссия* — $A$,

*студенческая комиссия* — $D$.

Однако, если преподаватель $A$ выходит из состава всех комиссий, то избрать представителей с учетом поставленного выше условия нельзя.

В общем виде данная проблема может быть сформулирована следующим образом: дано семейство множеств

$$\mathcal{L} = \{S_i | i \in I\},$$

которые могут иметь непустое пересечение. Надо выбрать представителей $\sigma_i, i \in I$, из каждого множества $S_i$ так, чтобы

$$\sigma_i \in S_i \text{ и при } i \neq j \text{ имело место } \sigma_i \neq \sigma_j.$$

Такое множество различных представителей называется *трансверсалью семейства* $\mathcal{L}$, или *полной системой представителей семейства* $\mathcal{L}$.

Найдем условия, при которых трансверсаль для $\mathcal{L}$ существует.

Оказывается, что задача сводится к нахождению совершенного паросочетания в специально построенном двудольном графе. Обратимся к примеру с комиссиями.

Построим двудольный граф $G$, в котором множество $X$ — это множество комиссий, $Y$ — множество преподавателей, $\Gamma$ — множество дуг, которые связывают каждую комиссию с входящими в нее преподавателями (рис. 1.22).

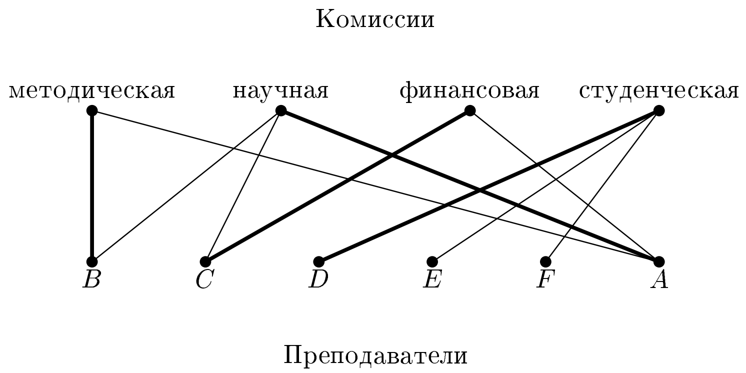



**Рис. 1.22**

Построенная выше трансверсаль для этой системы множеств (комиссий) показана на рис. 1.22 жирными линиями.

Таким образом, возвращаясь к общей формулировке задачи, имеем $X = I$, $Y = \bigcup\limits_{i \in I} S_i$ и дуга $ij \in \Gamma$, если $j \in S_i$.

Очевидно, что трансверсаль для этой задачи — это совершенное паросочетание для $G$. Напомним, что условие Холла является необходимым и достаточным для существования совершенного паросочетания в $G$, и переформулируем его в соответствующих терминах.

Подмножество $A \subseteq X$ — это набор множеств из семейства $\mathcal{L}$, а $J(A)$ — это множество элементов этих множеств, т.е. $\bigcup\limits_{i \in A} S_i$.

Теперь теорема 2 может быть переформулирована следующим образом:

**Теорема 5.** *Конечное семейство конечных множеств*

$$\mathcal{L} = \{S_i \mid i \in I\}$$

*имеет трансверсаль в том и только в том случае, когда*

$$\Big|\bigcup_{i \in A} S_i\Big| \geq |A| \quad \text{для всех} \quad A \subseteq I.$$

Иначе говоря, теорема 5 утверждает, что любые $k$ множеств (комиссий) должны иметь не менее $k$ элементов (преподавателей).

# 1.6

## Задачи

**1.** Пусть $X = \{2, 3, 5, 11\}$ и $Y = \{99, 100, 102\}$.

Определим дугу между элементами $x$ и $y$, если $x$ является делителем $y$ или $y$ является делителем $x$. Постройте двудольный граф и проверьте, что выполняется теорема 1.

**2.** *Полным двудольным графом* $K_{r,s}$ называется двудольный граф, для которого $|X| = r$, $|Y| = s$ и любые две вершины в $X$ и $Y$ соединены дугой.

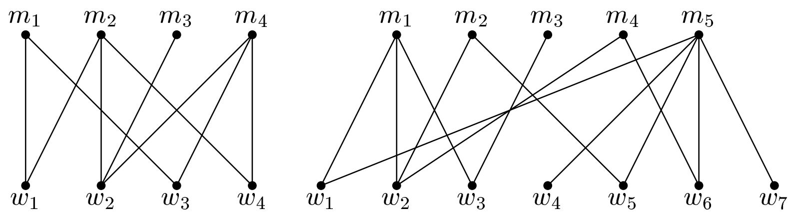
а) Какова степень каждой вершины $x$ в $X$?

б) Какова степень каждой вершины $y$ в $Y$?

в) Сколько дуг содержит граф $K_{r,s}$?

г) Постройте граф $K_{3,4}$.

**3.** На дискотеку пришли несколько ребят и девушек. Их отношение знакомства показано на рис. 1.23а и 1.23б. Каковы дефициты этих графов? Проинтерпретируйте полученные результаты.




а) б)

**Рис. 1.23**

**4.** Найдите дефициты двудольных графов, изображенных на рис. 1.24а и 1.24б (с. 40). Существуют ли в этих графах совершенные паросочетания?

**5.** Пусть $G = (X \cup Y, \Gamma)$, где $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{v, w, x, y, z\}$ и $\Gamma = \{av, ax, bv, bz, cw, cy, cz, dy, dz, ez\}$. Найдите, пользуясь алгоритмом, максимальное паросочетание в $G$. (*Указание:* начните с $M = \{av, bz, cy\}$.)

**6.** Пусть $G = (X \cup Y, \Gamma)$ — двудольный граф и $|X| = |Y| = n$.

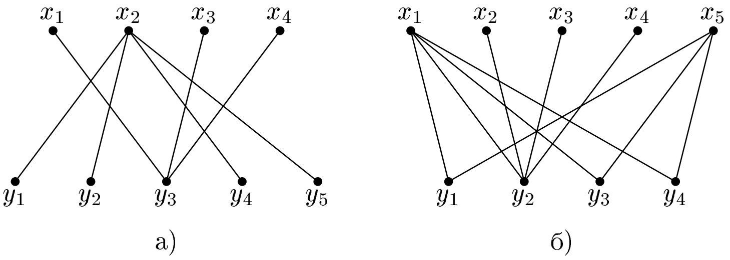



**Рис. 1.24**

Пусть $\delta$ — минимальная степень вершин графа $G$.

а) Покажите, что $\forall A \subseteq X$ имеет место неравенство $|A| - |J(A)| \leq n - \delta$.

б) Покажите, что если $|\Gamma| > (m-1)n$, то $G$ имеет паросочетание с не менее чем $m$ дугами.

**7.** На рис. 1.25 показан двудольный граф, в котором $X$ — множество студентов, $Y$ — множество учебных курсов (Мэ — микроэкономика, М — макроэкономика, Иэ — институциональная экономика, Ф — финансы). Дуга $xy$ означает, что студент $x$ хорошо знает курс $y$. Как бы Вы проинтерпретировали максимальное паросочетание этого графа? Найдите его.

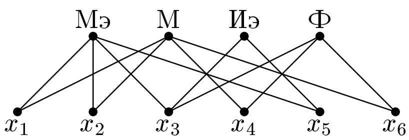



**Рис. 1.25**

**8.** *Вершинным покрытием* графа $G$ называется множество вершин $C$ такое, что каждая дуга графа $G$ инцидентна хотя бы одной вершине в $C$. Покажите, что если $G$ — двудольный граф, то мощность максимального паросочетания равна мощности минимального вершинного покрытия $G$.

**9.** Пусть $S = \{1, \ldots, 5\}$, а семейство $\mathcal{L}$ состоит из множеств $S_1 = \{2, 4, 5\}$, $S_2 = \{1, 5\}$, $S_3 = \{3, 4\}$, $S_4 = \{3, 4\}$. Найдите трансверсаль для $\mathcal{L}$.

**10.** Пусть $S = \{1, \ldots, 5\}$, а семейство $\mathcal{L}$ состоит из множеств $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{2, 3, 4, 5\}$, $S_4 = \{1, 2\}$. Найдите трансверсаль семейства множеств $\mathcal{L}$ или объясните, почему она не существует.

**11.** Пусть $S$ — множество всех депутатов Государственной Думы Российской Федерации, а $\mathcal{L}$ состоит из $n$ комиссий Госдумы РФ $S_1, \ldots, S_n$. В каком случае можно найти $n$ различных депутатов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ таких, что депутат $\sigma_j$ является членом комиссии $S_j$?

**12.** Предположим, что имеется $m$ мужчин и $n$ женщин и что женщина $j$ считает мужчину $i$ приемлемым или неприемлемым в качестве супруга. В каком случае можно заключить $n$ браков так, чтобы каждая женщина имела приемлемого для нее мужа?

**13.** Рассмотрим следующие пять комитетов: $C_1 = \{a, c, e\}$, $C_2 = \{b, c\}$, $C_3 = \{a, b, d\}$, $C_4 = \{d, e, f\}$, $C_5 = \{e, f\}$. Комитеты должны послать различных представителей на годичное собрание, и $C_1$ выдвигает $e$, $C_2$ — $b$, $C_3$ — $a$ и $C_4$ — $f$.

а) Покажите, что невозможно учесть пожелания всех комитетов.

б) Найдите систему различных представителей комитетов.

в) Можно ли найти полную систему различных представителей (трансверсаль), если комитет $C_1$ не хочет менять кандидатуру $e$; комитет $C_2$ — кандидатуру $b$?

**14.** Приведите пример трансверсали семейства множеств в мире спорта.