

Слоения, порожденные дифференциалами абелева типа¹

Кочетков Ю.Ю.

Кочетков Ю.Ю.: профессор, кафедра алгебры и логики МИЭМ (Московский институт электроники и математики); адрес: 127220, г. Москва, Башиловская ул., д. 1, корп. 2, кв. 227.

Аннотация. Изучена геометрия слоений, порожденных некоторыми дифференциалами абелева типа. Получено достаточное условие замкнутости слоев.

Ключевые слова: слоения, абелевы дифференциалы.

Рассмотрим дифференциал

$$\eta = \frac{\sqrt{z} dz}{\sqrt{(z-A)(z-B)(z-C)}},$$

где A , B и C — попарно-различные ненулевые комплексные числа. Дифференциал η задает два слоения на \mathbb{C} : F_r и F_i . Слои F_i — это интегральные кривые уравнения $\text{Im} \eta = 0$, а слои F_r — это интегральные кривые уравнения $\text{Re} \eta = 0$. Наша цель — изучения слоения F_r .

Общий случай

Если $|z| \gg 1$, то

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(z-A)(z-B)(z-C)}} = \frac{1}{z} + O(|z|^{-2}).$$

Поэтому на F_r -слое $\arg(dz) = \pm\pi/2 + \arg(z) + O(|z|^{-1})$, а на F_i -слое $\arg(dz) = \arg(z) + O(|z|^{-1})$. Таким образом, F_r -слой, проходящий через точку z_0 , $|z_0| \gg 1$, мало отличается от окружности с центром в начале координат, а F_i -слой, проходящий через ту же точку, — от радиальной прямой.

Лемма 1. Пусть $|z_0| \gg 1$, тогда F_r -слой, проходящий через z_0 , замкнут.

Доказательство. Обозначим наш F_r -слой через C . Предположим, что C , сделав оборот вокруг начала координат, не замыкается (см. рис. 1).

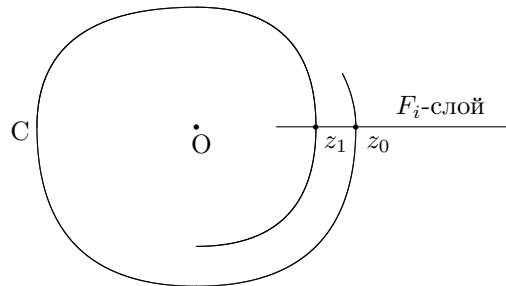


рис. 1

¹Эта работа была поддержана РФФИ, проект 04-01-00647.

Пусть D — F_i -слой, проходящий через z_0 , а z_1 — первая точка пересечения D с C при движении по D в сторону начала координат. Рассмотрим замкнутый контур L , образованный частью слоя C на участке от z_0 до z_1 и частью слоя D на участке от z_1 до z_0 . Отметим, что точки ветвления дифференциала η находятся внутри L , поэтому $\int_L \eta = 2\pi i$. Но интеграл по C -части L чисто мнимый по определению F_r -слоя, а интеграл по D части — веществен и не равен нулю. Противоречие. \square

Определение 1. Замкнутый F_r слой L такой, что точки ветвления A, B, C и 0 лежат внутри L , мы будем называть O -слоем.

Лемма 2. *Обозначим через G объединение O -слоев. Тогда G — открытое множество.*

Доказательство. Пусть L — некоторый O -слой, и точка z_0 лежит в малой окрестности L . Рассмотрим F_r -слой, проходящий через z_0 . Если он не замыкается, то аргументация, использованная в доказательстве Леммы 1, приводит к противоречию. \square

Следствие. *Граница C_0 множества G является замкнутым F_r -слоем, содержащим точку ветвления дифференциала η .*

Лемма 3. *Точка 0 принадлежит C_0 .*

Доказательство. Достаточно доказать, что из точек A, B и C выходит только одна дуга F_r -слоя (из точки 0 выходят три дуги). В самом деле, пусть α — аргумент вектора, касательного к траектории F_r -слоя, выходящей из A . Тогда

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\arg(A)}{2} - \frac{\arg(A-B)}{2} - \frac{\arg(A-C)}{2} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\alpha = \pm\pi + \arg(A-B) + \arg(A-C) - \arg(A).$$

Если же φ — аргумент вектора, касательного к траектории F_r -слоя, выходящей из точки 0 , то

$$\frac{3\varphi}{2} - \frac{3\pi}{2} - \frac{\arg(ABC)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Поэтому

$$\varphi = \frac{\arg(ABC)}{3} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Следовательно, замкнутый слой C_0 обязательно проходит через точку 0 , а точка A (или B или C) принадлежит C_0 только в том случае, когда слою принадлежит дуга, соединяющая точки 0 и A . \square

Подведем итог.

Теорема 1. *F_r -слоение имеет следующее описание:*

- существует замкнутый слой C_0 , содержащий точку 0 ;
- слои, находящиеся вне C_0 , замкнуты и на бесконечности мало отличаются от окружностей с центром в начале координат;
- точки ветвления A, B и C лежат внутри C_0 , а в исключительных случаях эти точки (все или одна) лежат на C_0 .

Таким образом, поведение F_r -слоения может быть нетривиальным только внутри слоя C_0 .

Частный случай

В этом разделе мы подробно рассмотрим случай, когда точка A лежит на оси OX , $A \in (0, +\infty)$, точки B и C лежат на оси OY , $B \in (0, +i\infty)$, $C \in (0, -i\infty)$ и $|B| > |C|$ (см. рис. 2).

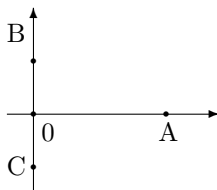


рис. 2

Мы будем изучать поведение F_r -слоев внутри замкнутого слоя C_0 . Сначала отметим, что при движении точки z вдоль координатных осей от 0 до A , от 0 до B , от 0 до C , от A до $+\infty$, от B до $+i\infty$ и от C до $-i\infty$ знак $\operatorname{Re} \eta$ не меняется. Теперь рассмотрим обходы точек ветвления.

Лемма 4. Рассмотрим следующие пути обхода точек ветвления (рис. 3):

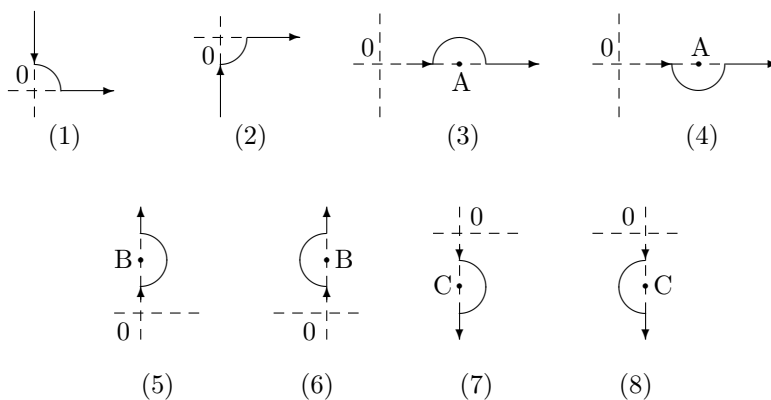


рис. 3

Тогда в случае

- (1) знак $\operatorname{Re} \eta$ меняется на противоположный;
- (2) знак $\operatorname{Re} \eta$ не меняется;
- (3) знак $\operatorname{Re} \eta$ не меняется;
- (4) знак $\operatorname{Re} \eta$ меняется на противоположный;
- (5) знак $\operatorname{Re} \eta$ не меняется;
- (6) знак $\operatorname{Re} \eta$ меняется на противоположный;
- (7) знак $\operatorname{Re} \eta$ не меняется;
- (8) знак $\operatorname{Re} \eta$ меняется на противоположный.

Доказательство. Докажем лемму в первом случае (остальные случаи рассматриваются аналогично). Пусть $z \in (0, B)$ и $v = (z - A)(z - B)(z - C)$. Тогда

$$\frac{\pi}{2} < \arg(v) < \pi, \quad \pi < \arg(v^{-1}) < \frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(zv^{-1}) < 0.$$

Выберем ту ветвь $\sqrt{zv^{-1}}$, на которой

$$-\frac{\pi}{4} < \arg(\sqrt{zv^{-1}}) < 0.$$

Так как мы движемся от B к 0 , то

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg(\eta) < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} \eta < 0.$$

Если мало z , то $\arg(\sqrt{zv^{-1}}) \approx -\pi/4$. При обходе точки O , вектор z поворачивается на $\pi/2$ по часовой стрелке, и аргумент $\arg(\sqrt{zv^{-1}})$ становится примерно равным $-\pi/2$. Вектор v теперь лежит по второй четверти, $\pi/2 < \arg(v) < \pi$, и $-\pi < \arg(v^{-1}) < -\pi/2$. Так как z — вещественное положительное число, то

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(\sqrt{zv^{-1}}) < -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} \eta > 0$. □

Эти правила позволяют доказать следующий важный результат.

Лемма 5. Пусть

$$a = \int_0^A |\operatorname{Re} \eta|, \quad b = \int_0^B |\operatorname{Re} \eta|, \quad c = \int_0^C |\operatorname{Re} \eta|.$$

Тогда $b = a + c$.

Доказательство. Рассмотрим контур L (рис. 4)

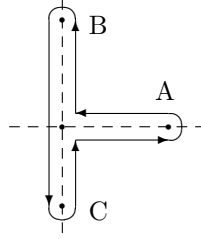


рис. 4

Так как контур L замкнут и точки ветвления находятся внутри него, то $\int_L \eta = 2\pi i$ и $\int_L \operatorname{Re} \eta = 0$. Выберем ту ветвь η , чтобы на участке от 0 до C имело бы место соотношение $\operatorname{Re} \eta > 0$. Тогда $\operatorname{Re} \eta > 0$ на участке от C до 0 ; $\operatorname{Re} \eta > 0$ на участке от 0 до A (правило 2); $\operatorname{Re} \eta > 0$ на участке от A до 0 ; $\operatorname{Re} \eta < 0$ на участке от 0 до B (правило 1); $\operatorname{Re} \eta < 0$ на участке от B до 0 . Следовательно, $2c + 2a - 2b = 0$. □

Рассуждая, как в доказательстве Леммы 3, мы можем найти направления F_r -траекторий, выходящих из точек ветвления (рис. 5):

- векторы, касательные к траекториям, выходящим из точек B и C , направлены в точку A ;
- пусть α — аргумент вектора, касательного к траектории, выходящей из точки A , тогда $\arg(B - A) < \alpha < \pi$;

- аргументы векторов, касательных к траекториям, выходящим из точки 0, равны 0 и $\pm 2\pi/3$.

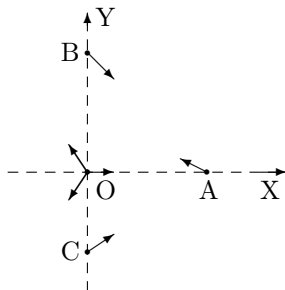


рис. 5

Нам будет удобно ось $(0, +\infty)$ называть A -осью, ось $(0, +i\infty)$ — B -осью, а ось $(0, -i\infty)$ — C -осью. Введем на этих трех осях новые координаты: если z принадлежит A -, B - или C -оси, то положим

$$\|z\| = \int_0^z |\operatorname{Re} \eta|.$$

Так $\|A\| = a$, $\|B\| = b$ и $\|C\| = c$.

Теперь дадим описание замкнутого контура C_0 .

Лемма 6. F_r -траектория, образующая контур C_0 , выходит из точки 0 под углом 120° к положительному направлению оси OX . Затем она пересекает B -ось в точке B_1 , $\|B_1\| = 2b$, далее она пересекает A -ось в точке A_1 , $\|A_1\| = 2a$, далее она пересекает C -ось в точке C_1 , $\|C_1\| = 2c$, а затем возвращается в точку 0. Направление возвращения в точку 0 образует угол 60° с положительным направлением оси OX (рис. 6).

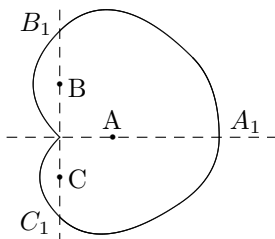


рис. 6

Доказательство. Достаточно рассмотреть интегралы от $\operatorname{Re} \eta$ по следующим контурам (рис. 7)

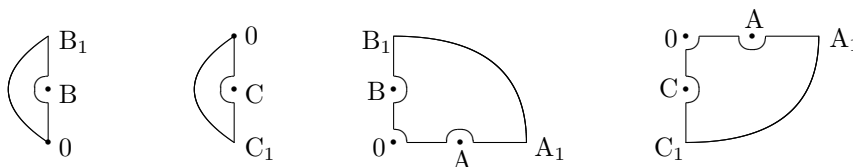


рис. 7

и воспользоваться правилами Леммы 4. □

Теперь рассмотрим F_r -слой, лежащий внутри контура C_0 .

Лемма 7. Пусть L — F_r -слой, лежащий внутри C_0 . Тогда:

- (1) если L пересекает B -ось в точке y в направлении первой четверти, то далее L пересекает A -ось в точке x , $\|x\| = \|y\|$;
- (2) если L пересекает B -ось в точке y в направлении второй четверти, то далее, сделав поворот вокруг точки B , L пересекает B -ось в точке y_1 , $\|y_1\| = 2b - \|y\|$, т.е.

$$\int_y^B |\operatorname{Re} \eta| = \int_B^{y_1} |\operatorname{Re} \eta|;$$

- (3) если L пересекает C -ось в точке z в направлении четвертой четверти, то далее L пересекает A -ось в точке x , $\|x\| = \|z\| + 2a$;
- (4) если L пересекает C -ось в точке z в направлении третьей четверти, то далее, сделав поворот вокруг точки C , L пересекает C -ось в точке z_1 , $\|z_1\| = 2c - \|z\|$, т.е.

$$\int_z^C |\operatorname{Re} \eta| = \int_C^{z_1} |\operatorname{Re} \eta|;$$

- (5) если L пересекает A -ось в точке x в направлении четвертой четверти, то: а) если $\|x\| > 2a$, то далее L пересекает C -ось в точке z , $\|z\| = \|x\| - 2a$ (см. пункт 3); б) если $\|x\| < 2a$, то далее, сделав поворот вокруг точки A , L пересекает A -ось в точке x_1 , $\|x_1\| = 2a - \|x\|$, т.е.

$$\int_x^A |\operatorname{Re} \eta| = \int_A^{x_1} |\operatorname{Re} \eta|;$$

- в) если $\|x\| = 2a$, то L попадает в точку 0 ;
- (6) если L пересекает A -ось в точке x в направлении первой четверти, то далее L пересекает B -ось в точке y , $\|y\| = \|x\|$ (см. пункт 1).

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству Леммы 6. \square

Пример. Пусть $a = 1$, $c = 2$, тогда $b = 3$. Рассмотрим поведение F_r -слоя, который проходит через точку y , $\|y\| = 11/2$, на B -оси в направлении первой четверти (рис. 8). Имеем,

$$\begin{aligned} \frac{11}{2}(B) &\rightarrow \frac{11}{2}(A) \rightarrow \frac{7}{2}(C) \rightarrow \frac{1}{2}(C) \rightarrow \frac{5}{2}(A) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{5}{2}(B) \rightarrow \frac{7}{2}(B) \rightarrow \frac{7}{2}(A) \rightarrow \frac{3}{2}(C) \rightarrow \frac{5}{2}(C) \rightarrow \frac{9}{2}(A) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{9}{2}(B) \rightarrow \frac{3}{2}(B) \rightarrow \frac{3}{2}(A) \rightarrow \frac{1}{2}(A) \rightarrow \frac{1}{2}(B) \rightarrow \frac{11}{2}(B) \end{aligned}$$

слой замкнулся.

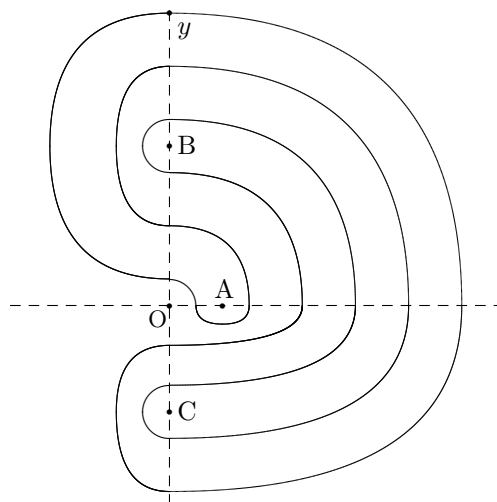


рис. 8

Этот пример указывает, как должны выглядеть условия замкнутости F_r -слоев внутри контура C_0 .

Теорема 2. Если a и c соизмеримы, то все F_r -слои внутри контура C_0 замкнуты. В противном случае все F_r -слои внутри контура C_0 незамкнуты.

Доказательство. Рассмотрим замкнутый F_r -слой (траекторию) L , лежащий внутри контура C_0 . Предположим сначала, что L не содержит точки ветвления. Пусть L пересекает B -ось в точке с координатой y в направлении первой четверти. Тогда траектория будет пересекать оси следующим образом:

$$\begin{aligned} y(B) \rightarrow y(A) \rightarrow y - 2a(C) \rightarrow 2c + 2a - y(C) \rightarrow 2c + 4a - y(A) \rightarrow \\ \rightarrow 2c + 4a - y(B) \rightarrow y - 2a(B) \rightarrow y - 2a(A) \end{aligned}$$

Далее траектория будет пересекать A -ось в направлении четвертой четверти в точках $y - 4a, y - 6a, \dots$. Если $y - 2ka > 0$, но $y - 2(k+1)a < 0$, то траектория, после пересечения A -оси в точке $y - 2ka$, делает полуоборот вокруг точки A , пересекает A -ось в точке $2(k+1)a - y$ в направлении первой четверти, пересекает B -ось в точке $2(k+1)a - y$ в направлении второй четверти и, сделав полуоборот вокруг точки B , пересекает B -ось в точке $y + 2c - 2ka$ в направлении первой четверти.

Другими словами, траектория L пересекает B ось в точках вида $2lc - 2ka - y$ в направлении второй четверти и в точках вида $y + 2mc - 2na$ в направлении первой четверти. Так как траектория замкнута, то либо $y = y + 2mc - 2na$, либо $y = 2lc - 2ka - y$. Но во втором случае траектория попала в точку ветвления, “вышла из нее в противоположном направлении и вернулась в y ”. Так как L , по предположению, не содержит точек ветвления, то $y = y + 2mc - 2na$, и a и c соизмеримы.

Если замкнутая траектория содержит точку ветвления, то она выходит из точки ветвления и приходит в другую точку ветвления. В этом случае надо, например, положить $y = b = a + c$ и рассматривать равенства:

- $a + c + 2mc - 2na = a$ (траектория попала в A);
- $a + c + 2mc - 2na = c$ (траектория попала в C);
- $2lc - 2ka - a - c = 0$ (траектория попала в 0);

Все эти случаи дают соизмеримость a и c .

Пусть теперь a и c соизмеримы: $a = kc/l$, $b = (k+l)c/l$. Проводя вычисления как выше в единицах c , мы получим, что траектория будет пересекать B -ось в точках вида $\pm y + s/l$, где знаменатель l фиксирован, а числитель s ограничен. Что и доказывает замкнутость каждой траектории в соизмеримом случае. \square

Пример. $a = 0$, $b = c$. В этом случае $B = -C$, и слоение выглядит так (рис. 9):

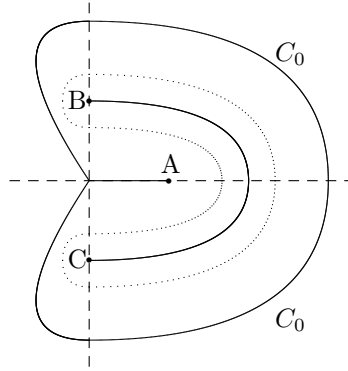


рис. 9

Здесь точками показана типичный слой внутри C_0 .

Пример. $c = a$, $b = 2a$. Слоение выглядит так (рис. 10):

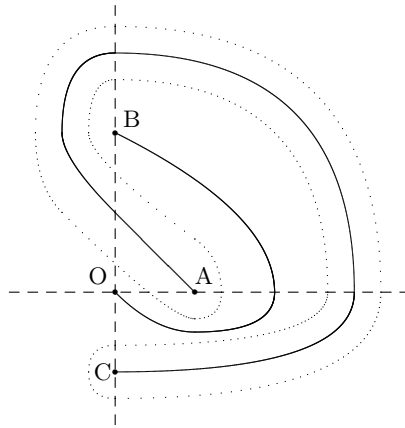


рис. 10

Здесь точками показан типичный слой внутри C_0 .

Если a и c несоизмеримы, то траектория внутри контура C_0 плотна во внутренности C_0 и демонстрирует псевдослучайное поведение.