

ЭКСПРЕСС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОРТФЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ Санкт-Петербург, НИУ «Высшая школа экономики»

Теория портфеля относится к тем немногим достижениям экономической науки, которые с успехом применяются в современной хозяйственной практике. Ее создатель Г.Марковиц, в отличие от большинства других экономистов-теоретиков, посвятивших большую часть своей жизни академической и преподавательской работе в университетах, почти четверть века работал в различных фирмах и корпорациях, в том числе десять лет в IBM [1]. На русском языке теория портфеля была впервые изложена в фундаментальной работе Л.Харриса «Денежная теории» [2] в год присуждения Г.Марковицу Нобелевской премии по экономике (1990), и с тех пор заняла важное место в теории и практике управления финансами, а также в учебной литературе по макроэкономике, статистике и теории финансов [3]. Только за последние три года были опубликованы крупные работы по теории и практике решения портфельных задач авторов Г.А.Агасандяна, И.Д.Зыряновой, Т.Н.Кокоткиной, Ю.Н.Морозкина, К.Б.Нуртазиной, Л.Л.Сероштанова, У.А.Узденова и др.

Необходимость все более широкого применения теории портфеля в финансовой деятельности приходит в противоречие с технической сложностью портфельных задач, большинство которых сводится к задачам квадратичного программирования и не может быть решено относительно простыми методами без использования специальных пакетов программ [4, 5]. Вместе с тем, возможности стандартного программного обеспечения, прежде всего Microsoft Office Excel, достаточно широки для того, чтобы попытаться с их помощью разработать алгоритмы оценки оптимальных решений задач портфельного типа. В докладе предлагается один из возможных подходов к решению этой проблемы. Экспресс-метод решения портфельных задач мы определяем как алгоритм оценки параметров оптимального инвестиционного портфеля, использующий лишь функции программы Excel и не использующий специальные программы решения задач квадратичного программирования.

Портфельная задача в общей постановке рассматривает инвестора, который вкладывает средства в акции m видов на основе анализа данных об их доходности за n дней. Пусть R_i^k – доходность акций k -го вида в i -й день, а их средняя доходность за n дней равна R_k . Риск акций k -го вида в теории портфеля отождествляется с дисперсией доходности s_k^2 . Портфель есть вектор (x_1, \dots, x_m) , где x_k – удельный вес средств,

вложенных в акции k -го вида ($0 \leq x_k \leq 1$). Доходность портфеля (R) равна средней доходности акций, рассчитанной с учетом их долей в портфеле. Риск портфеля равен:

$$s^2 = \sum_{k=1}^m x_k^2 s_k^2 + 2 \sum_{k,j=1, k \neq j}^m x_k x_j s_{kj},$$

где s_{kj} – ковариация доходностей акций k -го и j -го вида [1]. Коэффициенты данной квадратичной формы могут быть рассчитаны с помощью функций ДИСП и КОВАР программы Excel, однако при использовании первой из них следует учитывать, что в ней сумма квадратов отклонений делится на $n-1$, а не на n , как в стандартных формулах дисперсии. Это может привести к некоторому различию оптимальных решений, полученных разными методами. Рассмотрим четыре задачи оптимизации инвестиционного портфеля.

Задача 1. Минимизируется риск портфеля из двух акций, его доходность не учитывается. Поскольку сумма x_1 и x_2 равна единице, риск портфеля есть квадратичная функция от x_1 . Определив ее минимум, получим формулу для оптимальной доли акций 1-го вида:

$$x_1^* = (s_2^2 - s_{12}) / (s_1^2 + s_2^2 - 2s_{12}).$$

Данная формула неприменима, если ковариация больше риска акций. В этом случае корреляция доходности акций настолько велика, что их следует рассматривать как акции одного вида. Если формула дает число большее единицы, то оптимальным считаем портфель, состоящий только из акций первого вида. Если же число отрицательное, то оптимальный портфель состоит из акций второго вида.

Из формулы риска следуют два вывода. Во-первых, неверным является «очевидный» вывод, для акций с нулевой корреляцией доходности наименее рискованный портфель состоит лишь из наименее рискованных акций. На самом деле, если риски двух акций те же, но ковариация равна нулю, тогда оптимальная доля акций первого вида равна $s_2^2 / (s_1^2 + s_2^2)$, второго – $s_1^2 / (s_1^2 + s_2^2)$. При этом риск наименее рисованного портфеля равен $s_1^2 s_2^2 / (s_1^2 + s_2^2)$, что меньше риска акций каждого вида. Во-вторых, для минимизации риска портфеля необходимо включать в него пары активов с отрицательной корреляцией доходностей. Так, объемы выручки столовой от продажи чая и минеральной воды зависят от погоды и при этом имеют отрицательную корреляцию, т.к. в холодные дни покупают преимущественно чай, а в теплые дни – воду. Поэтому в меню столовой всегда должны быть чай и вода, и тогда выручка будет слабо зависеть от погоды, т.е. ее дисперсия будет меньше, чем дисперсия выручки от чая и выручка от воды раздельно.

Эффект «слон-муравей». Риск акций зависит от их средней доходности: при прочих равных условиях акции с большей средней

доходностью имеют большую дисперсию. Приведем аналогию: дисперсия роста слонов больше, чем дисперсия роста муравьев, хотя среднее квадратическое отклонение, деленное на средний рост, может оказаться меньше у слонов. При решении задачи минимизации риска этот эффект негативно влияет на доходность оптимального портфеля, поскольку из-за завышенной дисперсии (риска) доля более доходных акций («слонов») оказывается необоснованно заниженной, а оптимальный портфель – деформированным в пользу менее доходных акций («муравьев»). Для устранения этого эффекта мы рекомендуем перед выполнением алгоритма поиска оптимального портфеля скорректировать исходные значения доходности так, чтобы все акции имели одинаковую среднюю доходность. В случае двух акций можно умножить значения доходности более доходных акций на отношение средней доходности менее доходных акций и более доходных акций. Например, заданы доходности акций: первого вида – 4,5,6; второго вида – 7,8,3. Тогда дисперсии (риски) равны 0,667 и 4,667, а ковариация равна -1,33. Согласно приведенной выше формуле, оптимальная доля акций 1-го вида равна 0,75. Доходность оптимального портфеля равна 5,25%, его риск равен 0,17, что меньше риска наименее рискованных акций. Теперь скорректируем значения доходности акции 2-го вида, которые наиболее доходны ($6 > 5$). Умножим их на $5/6$, получим: 5,83; 6,67 и 2,50. Повторим расчеты и получим новые значения: риск акций 2-го вида – 3,24 (вместо 4,67), ковариация доходностей – -1,11 (-1,33), доля акций 1-го вида – 0,71 (0,75), риск портфеля – 0,15 (0,17). Итак, устранение эффекта «слон-муравей» привело к росту удельного веса более доходных акций на 4 п.п.

Задача 2. Минимизируется риск портфеля из произвольного числа акций, его доходность не учитывается. Предположим сначала, что требуется обеспечить доходность портфеля не ниже R_0 . Тогда при минимизации риска портфеля s^2 полный набор ограничений имеет вид:

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad \sum_{k=1}^m x_k = 1, \quad \sum_{k=1}^m x_k R_k \geq R_0.$$

Эта задача квадратичного программирования имеет два вида решений: внутренние и угловые. Для углового решения хотя бы одно неравенство превращается в равенство, а для внутреннего решения все неравенства превращаются в строгие неравенства. Как показывает эмпирический анализ большого числа инвестиционных портфелей, на практике обычно реализуется внутреннее решение, что позволяет сделать акцент на данном виде решений и не учитывать ограничения в форме неравенств. Внутреннее решение представляет собой условный экстремум задачи минимизации функции риска s^2 при одном линейном ограничении – сумма компонентов портфеля равна единице. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \sum_{k=1}^m x_k^2 s_k^2 + 2 \sum_{k,j=1, k \neq j}^m x_k x_j s_{kj} - \lambda (\sum_{k=1}^m x_k - 1),$$

где λ – множитель Лагранжа. Приравняв нулю ее частные производные, получим систему линейных уравнений $A \times X = B$ с $m+1$ неизвестными для определения внутреннего оптимального решения (показан случай трех видов акций):

$$A = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_{12} & s_{13} & -1 \\ s_{12} & s_2^2 & s_{23} & -1 \\ s_{13} & s_{23} & s_3^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица системы A является квадратной и имеет блочный вид, ее первый блок размерности $m \times m$ является симметричной матрицей, у которой на главной диагонали расположены риски акций, а недиагональные элементы равны значениям ковариации. Для выяснения экономического смысла переменной x_4 (в общем случае – x_{m+1}) умножим первое уравнение системы на x_1 , второе – на x_2 , третье – на x_3 , затем полученные равенства сложим. Отсюда x_4 равно минимальному риску портфеля, т.е. в общем случае

$$(x_{m+1})^* = s_{min}^2.$$

Обозначим: $C = A^{-1}$, тогда $X = C \times B$. Учитывая вид вектора B , заключаем, что координаты оптимального портфеля и его риск образуют последний столбец матрицы C :

$$x_i = c_{i,m+1} \quad (i \leq m), \quad s_{min}^2 = c_{m+1,m+1}.$$

Пусть заданы доходности акций: первого вида – 4,3,4,5; второго – 5,5,4,2; третьего – 2,1,5,4. Тогда дисперсии (риски) равны 0,5; 1,5 и 2,5, ковариация доходностей акций 1-го и 2-го видов равна -0,75 и т.д. Получим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} +0,50 & -0,75 & +0,75 & -1,00 \\ -0,75 & +1,50 & -1,25 & -1,00 \\ +0,75 & -1,25 & +2,50 & -1,00 \\ +1,00 & +1,00 & +1,00 & 0,00 \end{pmatrix}.$$

Решим систему уравнений с четырьмя неизвестными с помощью функций МОБР и МУМНОЖ программы Excel (табл.1).

Табл.1. Расчет оптимального портфеля: доходность не задана

№	Обратная матрица системы				Портфель
1	1,386667	-0,48	-0,906667	0,626667	0,627
2	-0,48	0,32	0,16	0,36	0,360
3	-0,906667	0,16	0,746667	0,013333	0,013
4	-0,626667	-0,36	-0,013333	0,053333	$s^2 = 0,053$

Из таблицы следует, что оптимальный портфель – (0,627; 0,360; 0,013). Его риск равен $x_4 = 0,053$, что в десять раз меньше риска наименее рискованных акций: $0,053 \leq 0,5$. Доходность портфеля равна 3,987.

Из матрицы системы, в частности, следует, что если все коэффициенты ковариации равны 0, то доля каждой акций в оптимальном портфеле обратно пропорциональна ее риску. Пусть риски акций – 0,5, 1,5 и 2,5, тогда доли акций пропорциональны числам $1/0,5$, $1/1,5$ и $1/2,5$. Их сумма равна 3,067, поэтому доля акций 1-го вида равна $2/3,067=0,652$, 2-го – $0,667/3,067=0,217$, 3-го – $0,4/3,067=0,131$. Риск портфеля равен 0,326, что меньше риска наименее рискованных акций, но значительно выше, чем риск портфеля, рассчитанного с учетом фактора корреляции (0,053).

Задача 3. Минимизируется риск портфеля из произвольного числа акций, требуемая доходность портфеля равна R_0 . Ограничения имеют вид линейных уравнений, при этом функция Лагранжа принимает более сложный вид:

$$L = \sum_{k=1}^m x_k^2 s_k^2 + 2 \sum_{k,j=1k \neq j}^m x_k x_j s_{kj} - \lambda (\sum_{k=1}^m x_k - 1) - \mu (\sum_{k=1}^m x_k R_k - R_0),$$

где μ – второй множитель Лагранжа. Приравняв нулю ее частные производные, получим систему линейных уравнений с $m+2$ неизвестными для определения внутреннего оптимального решения:

$$A = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_{12} & s_{13} & -1 & -0,5R_1 \\ s_{12} & s_2^2 & s_{23} & -1 & -0,5R_2 \\ s_{13} & s_{23} & s_3^2 & -1 & -0,5R_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ R_0 \end{pmatrix}.$$

Умножим первое уравнение системы на x_1 , второе – на x_2 , третье – на x_3 , затем полученные равенства сложим. Отсюда минимальный риск портфеля является линейной комбинацией оптимальных значений вспомогательных переменных x_{m+1} и x_{m+2} :

$$s_{min}^2 = x_{m+1} + 0,5R_0 x_{m+2}.$$

Обозначим: $C = A^{-1}$, тогда $X = C \times B$. Учитывая вид вектора B , заключаем, что компоненты оптимального портфеля равны линейной комбинации последнего и предпоследнего элементов соответствующей строки матрицы C :

$$x_i = c_{i,m+1} + R_0 c_{i,m+2} \quad (i \leq m).$$

Вернемся к рассмотренному выше примеру и предположим, что требуемая доходность равна 3,9%. Дополним матрицу A пятой строкой

(4; 4; 3; 0; 0) и пятым столбцом (-2; -2; -1,5; 0; 0). Вектор правых частей равен $B = (0; 0; 0; 1; 3,9)$. Обратим матрицу A (табл.2).

Табл.2. Расчет оптимального портфеля: доходность задана

№	Обратная матрица системы					Портфель
1	0,285714	-0,28571	8,97E-16	-4,21429	1,214286	0,521
2	-0,28571	0,285714	-3,9E-16	1,214286	-0,21429	0,379
3	1,34E-15	0	-6,7E-16	4	-1	0,100
4	4,214286	-1,21429	-4	21,33929	-5,33929	-
5	-2,42857	0,428571	2	-10,6786	2,678571	$s^2 = 0,064$

Удельный вес акций 1-го вида в оптимальном портфеле равен $x_1 = -4,21439 + 3,9 \times 1,214286 = 0,521$. Аналогично: $x_2 = 0,379$, $x_3 = 0,1$, $x_4 = 0,516$, $x_5 = -0,232$. Риск портфеля: $s^2_{min} = 0,516 + 0,5 \times 3,9 \times (-0,232) = 0,064$. Итак, требование снизить доходность портфеля с 3,987% до 3,9% привело к увеличению его риска с 0,053 до 0,064, при этом удельный вес акций первого вида снизился с 62,7% до 52,1%, или на 10,6 п.п.

Анализ контрольных примеров показывает, что задача оптимизации не имеет решения, если дисперсия доходности (риск) каких-либо акций меньше, чем коэффициент ковариации доходности этих акций с каким-либо другим видом акций. В этом случае корреляция доходностей значительна, что позволяет рассматривать данную пару видов акций как один вид акций. Тогда перед выполнением алгоритма поиска оптимального портфеля следует исключить из рассмотрения один из видов коррелированных акций с наибольшей разностью «плохого» значения ковариации и дисперсии. Итак, в первом блоке матрицы A системы уравнений каждый диагональный элемент (риск) должен быть максимальным в своей строке и своем столбце. Обратим внимание на то, что отрицательные значения ковариации, превышающие по модулю дисперсию, не исключаются, а приветствуются, поскольку позволяют существенно снизить риск портфеля.

Примером набора сильно коррелированных ценных бумаг, из которых не может быть сформирован инвестиционный портфель с низким риском, служат облигации федерального займа (ОФЗ): ОФЗ-ПД – с постоянным купонным доходом, ОФЗ-АД – с амортизацией долга, ОФЗ-АД-ПК – с амортизацией долга и переменным купонным доходом. Нами исследованы индикаторы рыночного портфеля государственных ценных бумаг на вторичном рынке за период 2004-2011 гг. [6]. Получены данные: ОФЗ-ПД: риск – 1,31, значения ковариации – 0,93 и 1,90; ОФЗ-АД: риск – 0,77, значения ковариации – 0,93 и 1,65; ОФЗ-АД-ПК: риск – 5,56, значения ковариации – 1,90 и 1,65.

Из полученных данных следует, что для облигаций ОФЗ-ПД и ОФЗ-АД риск меньше некоторого значения ковариации, а поэтому

нерискованный портфель с их участием сформировать невозможно. Значения корреляции доходности оказались весьма большими: ОФЗ-ПД/ОФЗ-АД – 0,92; ОФЗ-ПД/ОФЗ-АД-ПК – 0,71; ОФЗ-АД/ОФЗ-АД-ПК – 0,8, что позволяет в рамках портфельной теории рассматривать эти виды облигаций как один актив «ОФЗ». В то же время риск облигаций влияет на их удельный вес в обращении. Так, наиболее рискованными облигациями являются ОФЗ-АД-ПК, поскольку купонные выплаты по ним зависят от уровня инфляции, а поэтому не могут быть достоверно спрогнозированы. Характерно, что они имеют наименьшую долю на рынке: в 2008 г. – 2,1%, в 2011 г. – 0,9%. Доли двух других видов облигаций не сильно отличались от теоретических значений, рассчитанных в предположении о нулевой корреляции. Они составили соответственно: фактические значения – 29 и 66%, теоретические – 34 и 58%.

Задача 4. Максимизируется доходность портфеля из произвольного числа акций, требуемый риск портфеля равен s_0^2 . Данная задача является двойственной задачей по отношению к предыдущей задаче: целевая функции и ограничение поменялись местами. Ее функция Лагранжа:

$$L = \sum_{k=1}^m x_k R_k - \lambda \left(\sum_{k=1}^m x_k - 1 \right) - \mu \left(\sum_{k=1}^m x_k^2 s_k^2 + 2 \sum_{k,j=1, k \neq j}^m x_k x_j s_{kj} - s_0^2 \right).$$

Приравняем ее частные производные нулю, получим систему уравнений с четырьмя неизвестными. Она нелинейная, т.к. последнее уравнение – второй степени (показан случай двух видов акций):

$$\begin{cases} x_1 s_1^2 + x_2 s_{12} + \lambda / 2\mu = R_1 / 2\mu \\ x_1 s_{12} + x_2 s_2^2 + \lambda / 2\mu = R_2 / 2\mu \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1^2 s_1^2 + x_2^2 s_2^2 + 2x_1 x_2 s_{12} = s_0^2 \end{cases}$$

Заменим систему параметрическим множеством линейных систем на единицу меньшей размерности. Для этого умножим первое уравнение на x_1 , второе – на x_2 , полученные уравнения сложим. Учитывая третье и четвертое уравнения, получим новое линейное уравнение:

$$s^2 + \lambda / 2\mu = (x_1 R_1 + x_2 R_2) / 2\mu, \text{ или } x_1 R_1 + x_2 R_2 - \lambda = 2s_0^2 \mu.$$

Из двух первых уравнений системы и данного уравнения составим параметрическую систему трех линейных уравнений $A \times X = B$ относительно переменных x_1, x_2, λ , рассматривая переменную μ в качестве параметра (приведенная ниже система легко обобщается на случай произвольного числа акций):

$$A = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_{12} & 1/2\mu \\ s_{12} & s_2^2 & 1/2\mu \\ R_1 & R_2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} R_1/2\mu \\ R_2/2\mu \\ 2s_0^2\mu \end{pmatrix}.$$

В процессе преобразования системы из нее было исключено уравнение, обеспечивающее равенство единице суммы компонентов портфеля, поэтому решение новой системы при произвольном значении параметра, вообще говоря, не задает какого-либо портфеля. Для того чтобы найти систему, которая задает искомым оптимальный портфель, определим вспомогательную функцию-индикатор, которая зависит от параметра μ и равна сумме первых m координат решения системы:

$$F(\mu) = \sum_{k=1}^m x_k(\mu).$$

Для детального описания свойств данной функции требуются дополнительные исследования, однако анализ контрольных примеров показывает, что ее значения обычно не равны единице. Те значения параметра, при которых она в точности равна единице, указывают на систему, которая может оказаться оптимальной. Таким образом, равенство $F=1$ есть необходимое свойство системы, задающей оптимальный портфель. Поскольку обычно имеется лишь несколько таких значений параметра, из них несложно выбрать те, которые отвечают искомому оптимуму. Логично предположить, что данная функция не является монотонной, поскольку в силу нелинейности ограничения на риск в данной задаче могут существовать несколько оптимальных портфелей.

Метод решения данной задачи является более трудоемким по сравнению с предыдущими тремя задачами, что связано с наличием нелинейного ограничения. Во-первых, следует задать некоторый крупный шаг изменения параметра μ , например 1, и последовательно решать системы для натуральных значений параметра до тех пор, пока не определятся промежутки изменения параметра с наименьшими отклонениями индикатора F от единицы. Затем следует выбрать более мелкий шаг и искать на выделенных промежутках системы уравнений с индикатором, равным единице. И, наконец, из них выбрать системы, задающие оптимальные портфели.

Вернемся к числовому примеру, рассмотренному при анализе Задачи 1. Пусть требуемая доходность портфеля равна 0,2, тогда задача поиска наиболее доходного портфеля описывается функцией Лагранжа

$$L = 5x_1 + 6x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 1) - \mu(0,67x_1^2 + 4,67x_2^2 - 2 \times 1,33x_1x_2 - 0,2).$$

Составим параметрическую систему линейных уравнений, выберем промежутки изменения параметра 0,8-1,2 и шаг 0,1. Подставим значения

параметра 0,8; 0,9;...1,2 в параметрическую запись системы и решим полученные пять систем линейных уравнений средствами Excel (табл.3). Как мы видим, индикатор монотонно возрастает от 0,995 до 1,004 и принимает значение 1 при значении параметра 1. Таким образом, данная система задает оптимальный портфель (0,686; 0,314) с максимальной 5,31 и заданным риском 0,2. Очевидно, данное решение не является единственным, а второе можно получить, решив квадратное уравнение $s^2 = 0,2$. Таким образом, для завершения решения задачи предложенным методом следует найти еще один промежуток изменения параметра, на котором индикатор принимает единичное значение.

Табл.3. Расчет оптимального портфеля: риск задан

№	Параметр μ	Решение системы			Индикатор $F=x_1+x_2$
		x_1	x_2	λ	
1	0,8	0,668	0,327	4,979	0,995
2	0,9	0,678	0,319	4,945	0,997
3	1,0	0,686	0,314	4,910	1,000
4	1,1	0,694	0,307	4,875	1,001
5	1,2	0,701	0,303	4,840	1,004

Предложенные алгоритмы решения задач могут быть использованы в случае, когда информационной базой расчетов служат не доходности акций, а их цены (котировки). Эти цены могут различаться в тысячи раз, что вызывает сильный искажающий эффект «слон-муравей», а поэтому перед решением задач необходимо нормировать цены. Так, 8 мая 2013 г. котировки акций составили: Газпром – 131,81 руб., ВТБ – 0,05091 руб. [7] Обозначим через p_j^k – цена акций k -го вида в конце j -го дня, p_k – средняя цена акций k -го вида за n дней. Тогда нормированная цена акции в конце j -го дня есть отношение ее цены в этот момент к средней цене за n дней:

$$r_j^k = \frac{p_j^k}{p_k}.$$

Из формулы следует, что средняя нормированная цена акций каждого вида за рассматриваемый период r_k равна 1.

При адаптации алгоритмов решения портфельных задач к экономической практике следует учитывать, что другим доступным текущим показателем фондового рынка, помимо котировки, является ежедневный темп прироста цены. Так, 8 мая 2013 г. данный показатель составил: Газпром – 0,97%, Роснефть – 1,33%, Русгидро – -2,97% и т.д. [7] Обозначим через α_j^k – темп прироста цены акций k -го вида за j -й день, выраженный десятичной дробью, тогда нормированная цена акций k -го вида в конце j -го дня равна

$$r_j^k = r_0^k \prod_{t=1}^j (1 + \alpha_t^k),$$

где r_0^k – нормированная цена акций k -го вида в начале первого дня (может быть больше, меньше или равна единице). Вычисление по данной формуле реализуется рядом статистических функций Excel. Риск акций и значения ковариации рассчитываются на основе доступных данных о текущих котировках и их ежедневных темпах прироста по формулам

$$s_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (r_j^k - 1)^2, \quad s_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (r_j^k - 1)(r_j^l - 1).$$

Рассчитав данные коэффициенты, можно составить функцию риска портфеля и решить Задачу 1 о минимизации его риска, которая не учитывает показатели доходности. Что касается других трех рассмотренных задач, то для их решения необходимо знать показатели доходности акций, которые не могут быть рассчитаны с использованием понятия нормированной цены. Эта проблема может быть решена, если показатели доходности акций будут определены на основе других массивов данных и интегрированы в задачи в качестве экзогенных переменных. Таким образом, предложенные алгоритмы решения портфельных задач позволяют использовать две группы показателей (риск и доходность), рассчитанные на основе разных статистических данных и несогласованные между собой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance, March, 1952.
2. Харрис Л. Денежная теория. М.: Прогресс, 1990. – 749 с.
3. Корнейчук Б.В., Симкина Л.Г. Макроэкономика. Тесты и задачи. СПб.: Нева; М.: Олма-пресс Образование, 2002. – 224 с.
4. Даугавет В.А. Численные методы квадратичного программирования. СПб.: СПбГУ, 2004. – 127 с.
5. Гибсон Р.К. Формирование инвестиционного портфеля: управление финансовыми рисками. М.: Альпина Бизнес Букс, 2008. – 274 с.
6. Инвестиции в России. 2012: Стат.сб./Росстат. – М., 2012.
7. Росбизнесконсалтинг. URL: quote.rbc.ru/shares.