УДК 330.105, 911.3

В.Д. Матвеенко, М.С. Алькаева, А.В. Королев

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С УЧЕТОМ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА

V.D. Matveenko, M.S. Alkaeva, A.V. Korolev

SPATIAL ECONOMIC GROWTH MODEL WITH HUMAN CAPITAL

Рассматривается модель эндогенного роста с человеческим капиталом на простой пространственной структуре (прямой). Особое внимание уделено специальному случаю – комбинации параметров, при которой удается впервые получить решение задачи центрального планировщика на прямой в явном виде.

ЭНДОГЕННЫЙ РОСТ; ЧЕЛОВЕЧЕСКИЙ КАПИТАЛ; ФИЗИЧЕСКИЙ КАПИТАЛ; ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ; ВНЕШНИЙ ЭФФЕКТ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА; ДУШЕВОЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ.

In this article the endogenous growth model with human capital on the simple spatial structure (the line) is considered. We pay main attention to a special case of a combination of parameters for which we were able to solve the central planner problem on the line in an explicit form, which other authors did not succeed to do.

ENDOGENOUS GROWTH; HUMAN CAPITAL; PHYSICAL CAPITAL; PRODUCTION FUNCTION; EXTERNALITY OF HUMAN CAPITAL; CAPITA CONSUMPTION.

В последние годы в теории международной торговли и пространственной экономики получило развитие направление исследований, которое использует простые модели пространственных структур [5, 6, 8, 9]. Вскоре это направление включило и модели экономического роста на простых пространственных структурах, таких как линия и окружность.

В [1] рассмотрены AK-модели роста в случае, когда моделью пространственной структуры являлась окружность с равномерно распределенным населением и получено явное решение. В [2–4] рассматривались модели роста, где в качестве пространственной структуры использовалась прямая линия, но не удалось получить нестационарные решения в явном виде.

В [2] функция полезности имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-\rho t} c(x,t)\psi(x).$$

Наличие множителя плотности населения, $\psi(x)$, обеспечивает сходимость интеграла по пространственной координате. При этом предположении получается явное стационарное решение во внутренней точке. Найдены условия, при которых оптимальный путь сходится к этому внутреннему решению, так же как и условия, при которых этот путь «колеблется».

В [3, 4] показатель численности населения в каждом местоположении остается постоянным и равен единице. Проводится анализ решения в окрестности устойчивого состояния.

Во всех трех моделях [2–4] центральный планировщик выбирает траекторию, которая максимизирует общую полезность, включая потребление во всех местоположениях во все моменты времени. Значение показателя физического капитала постепенно распределяется равномерно в пространстве.

Ни в одной из перечисленных работ не рассматривался человеческий капитал. В данной статье мы попытаемся заполнить этот пробел и рассмотрим модель с физическим и человеческим капиталами, распределенными в пространстве, в то время как в качестве модели пространственной структуры используется прямая линия. Так же как и в моделях

[10] и [7], время репрезентативного индивидуума распределяется между временем, затрачиваемым на работу в материальном производстве, и временем, расходуемым на накопление человеческого капитала. Показатель физического капитала имеет некоторое начальное распределение и изменяется во времени и в пространстве. Показатель человеческого капитала также имеет некоторое начальное распределение и изменяется в каждом местоположении, но не перемещается в пространстве.

Производственная функция в любом местоположении имеет форму, подобную производственной функции в модели Лукаса [7], а изменения показателя человеческого капитала в любом местоположении описываются в точности, как в модели Лукаса. Функция полезности предполагается линейной относительно душевого потребления, как и в [2]. Решение для всей пространственной структуры находится центральным планировщиком, так же как в [1—4]. Точно так же как в [2—4], для решения задачи центрального планировщика мы применяем основную лемму классического вариационного исчисления.

Мы уделяем основное внимание специальному случаю комбинации значений параметров, при которых мы могли решить задачу на прямой в явном виде, что другим исследователям не удавалось. Напомним, что в [1] было обращение к модели на окружности как раз потому, что не удавалось получить явное решение на прямой.

Далее мы рассмотрим модель на прямой, ее описание и вывод условий оптимальности.

Модель на прямой

Формулировка задачи и условия оптимальности

Производственная функция имеет форму

$$Y(x,t) = AK^{\beta}(x,t)[u(x,t)h(x,t)\times$$
$$\times N(x,t)]^{1-\beta}\left[u_a(x,t)h_a(x,t)\right]^{\gamma}$$

где $K(x, t)$ — физический капитал; $u(x, t)$ — доля несвободного времени, расходуемая в производстве; $h(x, t)$ — человеческий капитал репрезентативного индивидуума; $N(x, t)$ — численность населения; $u_a(x, t)$ — средняя в данном местоположении доля несвободного времени, используемая в производстве; $h_a(x, t)$ — средний в данном местоположении уровень человеческого капитала.

Центральный планировщик максимизирует следующий функционал:

$$\int_0^{\infty}\int_R U\left(C(x,t)\right)e^{-\rho t}dxdt.$$

Функция полезности предполагается линейной по душевому потреблению:

$$U\left(C(x,t)\right) = C(x,t) = c(x,t)N_0(x)e^{\lambda t},$$

где λ — темп прироста населения. Кроме того, мы предполагаем, что человеческий капитал не перемещается в пространстве и что, следуя Ксаю [11], человеческий капитал оказывает внешнее воздействие на процесс производства с эластичностью γ.

Как и в [1—4], изменение величины физического капитала во времени и пространстве описывается дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial K(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} = \\ = Y(x,t) - C(x,t). \quad (1)$$

Изменение человеческого капитала описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left[\delta\left(1-u(x,t)\right)\right]h(x,t), \quad (2)$$

где $\left(1-u(x,t)\right)$ — доля несвободного времени, которая затрачивается на обучение.

Начальное распределение показателей физического и человеческого капиталов считаем заданным:

$$K(x,0) = K_0(x),$$

$$h(x,0) = h_0(x).$$

Следуя [2], предположим, что

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial K_0(x)}{\partial x} = 0, \quad \forall t \ge 0,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial h_0(x)}{\partial x} = 0, \quad \forall t \ge 0.$$

Так же как и в [1–4], мы не накладываем условия $C(x, t) \geq 0$. Во многих случаях неотрицательность потребления является свойством решения задачи оптимизации. В общем случае, если физический капитал подвижен, может существовать часть траектории, где $C(x, t) < 0$ («отрицательное потребление»). Мы объясняем это тем, что центральный планировщик использует возможности национальной экономики, например экспроприирует продукцию подсобного хозяйства для пополнения физического капитала в данном местоположении или для вывоза капитала из него. История знает периоды в СССР, Китае и ряде других стран с плановой экономикой, когда такая ситуация имела место. Однако такая ситуация может возникнуть в модели, использующей окружность, и только при условии подвижности человеческого капитала, а в рассматриваемой здесь модели, использующей прямую линию, она не возникает.

Предложение. Необходимым и достаточным условием достижения максимума функционалом

$$\int_0^\infty \int_R C(x, t) e^{-\rho t} dx dt$$

при ограничениях (1) и (2) является следующая система уравнений:

$$q(x, t) = e^{-\rho t},$$

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} + q(x, t)\{\beta A K^{\beta-1}(x, t) \times$$
$$\times u^{1-\beta+\gamma}(x, t) h^{1-\beta+\gamma}(x, t) N^{1-\beta}(x, t)\} = 0,$$

$$(1-\beta+\gamma) A K^{\beta}(x, t) u^{-\beta+\gamma}(x, t) h^{1-\beta+\gamma}(x, t) \times$$
$$\times N^{1-\beta}(x, t) q(x, t) = \delta h(x, t) p(x, t),$$

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \left[\delta\left(1 - u(x, t)\right)\right] p(x, t) +$$
$$+ (1-\beta+\gamma) A K^{\beta}(x, t) u^{1-\beta+\gamma}(x, t) \times$$
$$\times h^{-\beta+\gamma}(x, t) N^{1-\beta}(x, t) q(x, t) = 0,$$

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} = A K^{\beta}(x, t) \times$$
$$\times u^{1-\beta+\gamma}(x, t) h^{1-\beta+\gamma}(x, t) N^{1-\beta}(x, t) - C(x, t)$$

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \left[\delta\left(1 - u(x, t)\right)\right] h(x, t).$$

Доказательство.

Гамильтониан для задачи центрального планировщика имеет вид:

$$V = \int_0^\infty \int_R U\left[C(x, t)\right] e^{-\rho t} dx dt - \int_0^\infty \int_R q(x, t) \times$$
$$\times \left\{ \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} - A K^{\beta}(x, t) [u(x, t) \times \right.$$
$$\times h(x, t) N(x, t)]^{1-\beta} \left[u_a(x, t) h_a(x, t)\right]^{\gamma} +$$
$$\left. + C(x,t) \right\} dx dt - \int_0^\infty \int_R p(x, t) \times$$
$$\times \left\{ \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} - \left[\delta\left(1 - u(x, t)\right)\right] h(x, t) \right\} dx dt.$$

Интегрируя по частям, получаем следующие соотношения:

$$\int_0^\infty \int_R q(x, t) \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} = \int_R K(x, t) q(x, t) \times$$
$$\times \Big|_0^{+\infty} dx - \int_0^\infty \int_R K(x, t) \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} dx dt,$$

$$\int_0^\infty \int_R q(x, t) \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} dx dt = \int_0^\infty q(x, t) \times$$
$$\times \frac{\partial K(x, t)}{dx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_0^\infty K(x, t) \frac{\partial q(x, t)}{dx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_0^\infty \int_R K(x, t) \times$$
$$\times \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} dx dt,$$

$$\int_0^\infty \int_R p(x, t) \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \int_R h(x, t) p(x, t) \Big|_0^{+\infty} dx -$$
$$- \int_0^\infty \int_R h(x, t) \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} dx dt.$$

Положим,

$$c(x, t) = c^*(x, t) + \varepsilon v_c(x, t),$$

$$K(x, t) = K^*(x, t) + \varepsilon v_K(x, t),$$

$$u(x, t) = u^*(x, t) + \varepsilon v_u(x, t),$$

$$h(x, t) = h^*(x, t) + \varepsilon v_h(x, t),$$

где c^*, K^*, u^*, h^* — оптимальные распределения; v_c, v_K, v_u, v_h — линейные вариации соответствующих функций.

Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = \int_0^{\infty}\int_R \left[N_0(x)e^{\lambda t}e^{-\rho t} - N_0(x)e^{\lambda t}q(x,t)\right] \times$$
$$\times v_c(x,t)dxdt - \int_0^{\infty}\int_R \left(-\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}\right)\times$$
$$\times v_K(x,t)dxdt - \int_R v_K(x,t)q(x,t)\Big|_0^{+\infty}dx -$$
$$-\int_0^{\infty} v_K(x,t)\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}dt + \int_0^{\infty}\int_R \beta AK^{\beta-1}(x,t)\times$$
$$\times u^{1-\beta+\gamma}(x,t)h^{1-\beta+\gamma}(x,t)N^{1-\beta}(x,t)q(x,t)\times$$
$$\times v_K(x,t)dxdt + \int_0^{\infty}\int_R q(x,t)(1-\beta+\gamma)AK^{\beta}(x,t)\times$$
$$\times u^{-\beta+\gamma}(x,t)h^{1-\beta+\gamma}(x,t)N^{1-\beta}(x,t)v_u(x,t)dxdt -$$
$$-\int_0^{\infty}\int_R p(x,t)\delta h(x,t)v_u(x,t)dxdt - \int_0^{\infty}\int_R -\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\times$$
$$\times v_h(x,t)dxdt - \int_R v_h(x,t)p(x,t)\Big|_0^{+\infty}dx +$$
$$+\int_0^{\infty}\int_R \left[\delta\left(1-u(x,t)\right)\right]p(x,t)v_h(x,t)dxdt +$$
$$+\int_0^{\infty}\int_R (1-\beta+\gamma)AK^{\beta}(x,t)u^{1-\beta+\gamma}(x,t)h^{-\beta+\gamma}(x,t)\times$$
$$\times N^{1-\beta}(x,t)q(x,t)v_h(x,t)dxdt.$$

Применяя основную лемму классического вариационного исчисления, получаем требуемое утверждение.

Нахождение явного решения

Сделаем теперь упрощающее предположение: $\beta = \gamma$. Тогда наши условия принимают форму:

$$q(x,t) = e^{-\rho t}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} + q(x,t)\left\{\beta AK^{\beta-1}(x,t)\times \right.$$
$$\left.\times u(x,t)h(x,t)N^{1-\beta}(x,t)\right\} = 0, \tag{4}$$

$$AK^{\beta}(x,t)N^{1-\beta}(x,t)q(x,t) = \delta p(x,t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \left[\delta\left(1-u(x,t)\right)\right]p(x,t) +$$
$$+ AK^{\beta}(x,t)u(x,t)N^{1-\beta}(x,t)q(x,t) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial K(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} = AK^{\beta}(x,t)\times$$
$$\times u(x,t)h(x,t)N^{1-\beta}(x,t) - C(x,t), \tag{7}$$

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \left[\delta\left(1-u(x,t)\right)\right]h(x,t). \tag{8}$$

Кроме того, должны выполняться следующие начальные условия:

$$K(x,0) = K_0(x), \quad h(x,t) = h_0(x), \tag{9}$$

так же как и граничные условия:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial K(x,t)}{\partial x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to+\infty} q(x,t) = \lim_{t\to+\infty} p(x,t) = 0. \tag{11}$$

Подставляя (5) в (6), мы получаем дифференциальное уравнение для теневой цены человеческого капитала:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \delta p = 0,$$

решение которого –

$$p(x,t) = p_0(x)e^{-\delta t}. \tag{12}$$

Однако условия оптимальности не накладывают никаких ограничений на $p_0(x)$. Подставляя (3) и (12) в (5), получаем:

$$AK^{\beta}(x,t)N_0^{1-\beta}(x)e^{(1-\beta)\lambda t}e^{-\rho t} =$$
$$= \delta p_0(x)e^{-\delta t},$$

откуда

$$K(x,t) = K_0(x)e^{\frac{\rho-\delta-(1-\beta)\lambda}{\beta}t}, \tag{13}$$

где $p_0(x) = \frac{A}{\delta}K_0^{\beta}(x)N_0^{1-\beta}(x)$.

Обратимся к показателю человеческого капитала. С помощью подстановки (3) и (13) в (4) получаем:

$$uh = \frac{\rho K_0^{1-\beta}(x)}{\beta AN_0^{1-\beta}(x)}e^{\frac{\rho-\delta-\lambda}{\beta}(1-\beta)t}. \tag{14}$$

Обозначая

$$f(x)=\frac{\rho K_0^{1-\beta}(x)}{\beta A N_0^{1-\beta}(x)} \qquad (15)$$

и

$$\nu=\frac{\rho-\delta-\lambda}{\beta}(1-\beta), \qquad (16)$$

имеем

$$uh=f(x)e^{\nu t}. \qquad (17)$$

Подставляя (14) в (8), находим

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\delta h-\delta f(x)e^{\nu t}. \qquad (18)$$

Ясно, что экономический смысл представляет только случай $\delta > \nu$, т. е. $\delta > (\rho-\lambda)(1-\beta)$. Это значит, что или общество достаточно терпеливо, или процесс накопления человеческого капитала достаточно эффективен. Решая дифференциальное уравнение (18), находим:

$$h(x,t)=B(x)e^{\delta t}+A(x)e^{\nu t}, \qquad (19)$$

где

$$A(x)=\frac{\delta f(x)}{\delta-\nu}, \qquad (20)$$

и определяем постоянную интегрирования из начальных условий. При $t = 0$ имеем:

$$B(x)=h_0(x)-A(x). \qquad (21)$$

С помощью подстановки (20) и (21) в (19) получаем

$$h(x,t)=\left(h_0(x)-A(x)\right)e^{\delta t}+A(x)e^{\nu t}, \qquad (22)$$

где параметр ν определен уравнением (16), а функция $f(x)$ – уравнением (15).

Динамика показателя, характеризующего человеческий капитал в данном местоположении, определяется начальными уровнями показателей человеческого и физического капиталов. Условие неотрицательности показателя человеческого капитала на траектории в некотором местоположении x представляется неравенством $h_0(x) > A(x)$, которое связывает начальные значения показателей физического и человеческого капиталов.

Если некоторое местоположение, x_1, изначально богаче физическим капиталом, чем другое местоположение, x_2, тогда x_1 будет и впредь оставаться богаче физическим капиталом.

Иначе обстоит дело с человеческим капиталом. Местоположение x_2 в момент времени t богаче человеческим капиталом, чем местоположение x_1, если

$$\left[h_0(x_1)-h_0(x_2)\right]e^{\delta t} <$$

$$< \frac{\delta\left[f(x_1)-f(x_2)\right]}{\delta-\nu}\left(e^{\delta t}-e^{\nu t}\right).$$

Переходя к пределу при $t \to +\infty$ получаем:

$$\frac{h_0(x_1)-h_0(x_2)}{f_0(x_1)-f_0(x_2)} < \frac{\delta}{\delta-\nu}. \qquad (23)$$

Неравенство (23) есть условие того, что местоположение x_2 со временем становится богаче человеческим капиталом, чем местоположение x_1. Такая ситуация возможна, когда местоположение x_1 богаче, чем x_2 по обоим видам капитала, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$, $h_0(x_1) > h_0(x_2)$, но неравенство (23) выполняется. Тогда x_1 со временем станет беднее человеческим капиталом, чем местоположение x_2, несмотря на то, что последнее было изначально беднее по обоим видам капитала.

Сравнивая выражения (22) и (14) и учитывая (15), видим, что

$$u(x,t)=\frac{1}{\left(\dfrac{\beta A N_0^{1-\beta}(x)h_0(x)}{\rho K_0^{1-\beta}(x)}-\dfrac{\delta}{\delta-\nu}\right)e^{(\delta-\nu)t}+\dfrac{\delta}{\delta-\nu}}.$$

Так как $\delta > \nu$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)=0$ для любого местоположения x, т. е. время работы в материальном производстве стремится к нулю. Более того, в каждом местоположении время работы в материальном производстве сокращается, а время учебы увеличивается.

Найдем душевое потребление. Подставляя (13) и (14) в (7), получим:

$$C(x,t)=\left(\frac{\delta+(1-\beta)\lambda}{\beta}K_0(x)+\frac{\partial^2 K_0(x)}{\partial x^2}\right)\times$$

$$\times e^{\frac{\rho-\delta-(1-\beta)\lambda}{\beta}t}.$$

Тогда

$$c(x,t)=\frac{1}{N_0(x)}\left(\frac{\delta+(1-\beta)\lambda}{\beta}K_0(x)+\frac{\partial^2 K_0(x)}{\partial x^2}\right)\times$$
$$\times e^{\frac{\rho-\delta-\lambda}{\beta}t}.$$

Решение центрального планировщика таково, что динамика физического и человеческого капиталов в каждом местоположении зависит только от исходных размеров капиталов в данном местоположении, но не от всего начального распределения физического и человеческого капиталов. В каждом местоположении физический капитал и потребление растут с постоянным темпом прироста, одинаковым для всех местоположений.

Все граничные условия для $K(x, t)$, $p(x, t)$, $q(x, t)$ очевидно удовлетворены. Чтобы проверить выполнение граничных условий также для $h(x, t)$, мы должны сделать дополнительное предположение, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\partial K_0(x)/\partial x\right)/K_0^{\beta}(x)=0.$ Это предположение представляется совершенно естественным.

Условие трансверсальности для $K(x, t)$ очевидным образом выполняется, а условие трансверсальности для $h(x, t)$ выполнено, если $\lambda < 2\rho$.

Итак, мы исследовали вариант модели эндогенного роста Лукаса [7] на простой пространственной структуре – прямой. При упрощающем предположении найдены в явном виде траектории развития физического и человеческого капиталов, распределение времени на работу в материальном производстве и накопление человеческого капитала, а также потребления, которые являются решением задачи оптимизации функции общественного благосостояния.

Решение показывает, что чем больше начальный запас человеческого капитала в том или ином местоположении, тем большее время затрачивается в этом местоположении на накопление человеческого капитала в каждый момент времени. Наоборот, чем больше начальный запас физического капитала, тем больше времени затрачивается на работу в материальном производстве. Это вполне соответствует специализации географических областей на различных видах деятельности, которая имеет место в действительности. Также модель показывает, что чем больше доля физического капитала в местоположении, тем больше люди там работают. Чем более нетерпеливо общество (чем больше значение параметра ρ), тем меньше люди учатся и больше работают в материальном производстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Boucekkine R., Camacho C. and Fabbri G.** Spatial dynamics and convergence: The spatial AK model. Working Papers. Department of Economics. University of Glasgow. 2010. March 16, pp. 1–11.

2. **Boucekkine R., Camacho C.** and **Zou B.** Bridging the gap between growth theory and the new economic geography: the spatial Ramsey model // Macroeconomic Dynamics, 2009, no. 13, pp. 20–45.

3. **Brito P.B.** Global endogenous growth and distributional dynamics. Preliminary draft. ISEG. Technical University of Lisbon and UECE. 2011. November.

4. **Brito P.B.** The dynamics of growth and distribution in a spatially heterogeneous world. ISEG, 2004.

5. **Chicarini L.** and **Asherie N.** An analytical model for the formation of economic clusters // Regional Science & Urban Economics, 2008, no. 38, pp. 252–270.

6. **Desmet K.** and **Rossi-Hansberg E.** Innovation in space // American Economic Review : Papers & Proceedings, 2012, no. 102(3), pp. 447–452.

7. **Lucas R.E.** On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics, 1988, no. 22, pp. 3–42.

8. **Lucas R.E.** and **Rossi-Hansberg E.** On the internal structure of cities // Econometrica, 2002, no. 70(4), pp. 1445–1476.

9. **Rossi-Hansberg E.** A spatial theory of trade // American Economic Review, 2005, no. 95(5), p. 1464.

10. **Uzawa H.** Optimum technical change in an aggregative model of economic growth // International Economic Review, 1965, no. 6, pp. 18–31.

11. **Xie D.** Divergence in economic performance: Transitional dynamics with multiple equilibria // Journal of Economic Theory, 1994, no. 63, pp. 97–112.

REFERENCES

1. **Boucekkine R., Camacho C.** and **Fabbri G.** Spatial dynamics and convergence: The spatial AK model. Working Papers. Department of Economics. University of Glasgow. 2010. March 16, pp. 1–11.

2. **Boucekkine R., Camacho C.** and **Zou B.** Bridging the gap between growth theory and the new economic geography: the spatial Ramsey model. *Macroeconomic Dynamics*, 2009, no. 13, pp. 20–45.

3. **Brito P.B.** Global endogenous growth and distributional dynamics. Preliminary draft. ISEG. Technical University of Lisbon and UECE. 2011. November.

4. **Brito P.B.** The dynamics of growth and distribution in a spatially heterogeneous world. ISEG, 2004.

5. **Chicarini L.** and **Asherie N.** An analytical model for the formation of economic clusters. *Regional Science & Urban Economics*, 2008, no. 38, pp. 252–270.

6. **Desmet K.** and **Rossi-Hansberg E.** Innovation in space. *American Economic Review : Papers & Proceedings*, 2012, no. 102(3), pp. 447–452.

7. **Lucas R.E.** On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 1988, no. 22, pp. 3–42.

8. **Lucas R.E.** and **Rossi-Hansberg E.** On the internal structure of cities. *Econometrica*, 2002, no. 70(4), pp. 1445–1476.

9. **Rossi-Hansberg E.** A spatial theory of trade. *American Economic Review*, 2005, no. 95(5), p. 1464.

10. **Uzawa H.** Optimum technical change in an aggregative model of economic growth. *International Economic Review*, 1965, no. 6, pp. 18–31.

11. **Xie D.** Divergence in economic performance: Transitional dynamics with multiple equilibria. *Journal of Economic Theory*, 1994, no. 63, pp. 97–112.

МАТВЕЕНКО Владимир Дмитриевич – заведующий кафедрой «Экономическая теория» Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Санкт-Петербургский филиал, ведущий научный сотрудник ЭМИ РАН, доктор физико-математических наук, профессор.

193171, ул. Седова, д. 55/2, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: matveenko@emi.nw.ru

MATVEENKO Vladimir D. – National Research University Higher School of Economics.

193171. Sedova str. 55/2. St. Petersburg. Russia. E-mail: matveenko@emi.nw.ru

АЛЬКАЕВА Маргарита Сергеевна – студент Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Санкт-Петербургский филиал.

193171, ул. Седова, д. 55/2, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: alkaeva.ms@mail.ru

ALKAEVA Margarita S. – National Research University Higher School of Economics.

193171. Sedova str. 55/2. St. Petersburg. Russia. E-mail: alkaeva.ms@mail.ru

КОРОЛЕВ Алексей Васильевич – доцент Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Санкт-Петербургский филиал, кандидат физико-математических наук.

193171. Sedova str. 55/2. St. Petersburg. Russia. E-mail: danitschi@gmail.com

KOROLEV Alexei V. – National Research University Higher School of Economics.

193171. Sedova str. 55/2. St. Petersburg. Russia. E-mail: danitschi@gmail.com

---