4. *Кузякина М. В., Семенчин Е. А.* Оценка интенсивности источника примеси с помощью многошагового фильтра Калмана–Бьюси. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010613713, 07.06.2010 г.

А. А. Силаев, В. М. Хаметов (Москва, ЦЭМИ РАН). **Максиминное хеджирование европейского опциона на неполных рынках.**

1. Введение. Рассматривается задача расчета европейского опциона на неполном рынке. В докладе предлагается максиминный метод построения хеджирующего портфеля европейского опциона. Задачу хеджирования европейского опциона мы рассматриваем как игру двух лиц, в которой первый игрок — рынок, второй игрок управляет активами. При этом мы полагаем, что рынок минимизирует функцию полезности, а второй игрок ее максимизирует. Функцию полезности мы выбираем как экспоненциальную и зависящую от «профицита», т. е. разности между платежным обязательством и выручкой, полученной от управления активами за «время жизни» европейского опциона. Стратегиями рынка являются вероятностные меры на траекториях рисковых активов, стратегиями второго игрока — портфели активов.

2. Постановка максиминной задачи. Пусть $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}, P)$, $N_0 \triangleq \{0,1,\dots,N\}$ — стохастический базис, вероятностную меру P назовем базовой. Пусть на стохастическом базисе задана d-мерная случайная последовательность $(S_t, \mathcal{F}_t)_{t\in N_0}$, описывающая эволюцию стоимостей d рисковых активов [1]. Положим для любого $t\in N_0$: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^S_t \triangleq \sigma\{S_0, S_1, \dots, S_t\}$ и $\mathcal{F}^S_N = F$. Пусть $f_N : \mathbf{R}^{d(N+1)} \to \mathbf{R}^1$ — борелевская функция, обозначаемая через $f_N(x.)$, а $f_N(S.) = f_N(x.)|_{x.=S.}$ — $\mathcal{F}_N$-измеримая, ограниченная случайная величина, называемая платежным обязательством [1].

Обозначим $\mathcal{P}_N$ множество вероятностных мер на $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0})$, эквивалентных базовой мере P. Пусть $(\gamma_t, \mathcal{F}_t)_{t\in N_1}$, $N_1 \triangleq \{1,2,\dots,N\}$, есть предсказуемая d-мерная последовательность. Множество таких последовательностей обозначим U^N_1. Пусть $\widetilde{U}^N_1$ — любое подмножество множества U^N_1. Обозначим $\widetilde{U}^N_{t+1}$ $(\widetilde{U}_t)$ сужение $\widetilde{U}^N_1$ на $\{t+1,\dots,N\}$ $(\{t\})$ и будем использовать обозначение $\gamma^N_{t+1}\in\widetilde{U}^N_{t+1}$ $(\gamma\in\widetilde{U}_t)$.

Пару $(Q,\gamma_t)\in\mathcal{P}_N\times U^N_1$ назовем *бистратегией*. Обозначим

$$I^{Q,\gamma^N_{t+1}}(t,S^t_0) \triangleq \mathbf{M}^Q\left[\exp\left\{f_N(S.) - \sum_{i=t+1}^{N}(\gamma_i,\Delta S_i)\right\}\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

где $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$, которую назовем оценкой бистратегии (Q,γ^N_{t+1}). Стратегию $(\gamma_t,\mathcal{F}_t)_{t\in N_1}$ назовем *допустимой*, если $\gamma^N_1 \in D^N_1 \triangleq \{\gamma^N_1\in U^N_1\colon |\gamma_t| \leqslant c$ для любого $t\in N_1\}$, где $c = \mathrm{const} > 0$ — такова, что $\mathbf{M}\,e^{2cS_N} \leqslant k$ $(k>1)$. Бистратегию (Q,γ^N_1) назовем *допустимой*, если $Q,\gamma^N_1\in\mathcal{P}_N\times D^N_1$. Множество допустимых бистратегий обозначим $\mathcal{P}_N\times D^N_1$.

Определение. *Верхним гарантированным значением оценки* $I^{Q,\gamma^N_{t+1}}(t,S^t_0)$ бистратегии $(Q,\gamma^N_1)\in\mathcal{P}_N\times D^N_1$ в момент времени $t\in N_0$ назовем $\mathcal{F}^S_t$-измеримую случайную величину, определяемую равенством

$$\overline{v}^P_t \triangleq P\text{-}\operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{P}_N}\ \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma^N_{t+1}\in D^N_{t+1}} I^{Q,\gamma^N_{t+1}}(t,S^t_0).$$

Утверждение. *Если $f_N(x.)$ — ограниченная борелевская функция, то для любого $t\in N_0$ $\overline{v}^P_t<\infty$ P-п. н.*

3. Приведем рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет верхнее гарантированное значение.

Теорема 1. *Пусть фильтрация* $\{\mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$ *универсально полна. Тогда* $(\overline{v}_t^P, \mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$ *P-п. н. удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\overline{v}_t^P = P\text{-}\operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{P}_N} \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{v}_{t+1}^P e^{-(\gamma,\Delta S_{t+1})}|\mathcal{F}_t^S\right], \quad \overline{v}_t^P|_{t=N} = e^{f_N(S.)}. \tag{1}$$

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любых* $t\in N_1$ *и* $Q\in\mathcal{P}_N$ *P-п. н. справедливо неравенство*

$$\overline{v}_{t-1}^P \leqslant P\text{-} \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{v}_t^P e^{-(\gamma,\Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right].$$

2) *Для любых* $t\in N_1$ *и* $\gamma\in D_t$ *P-п. н. справедливо неравенство*

$$\overline{v}_{t-1}^P \geqslant P\text{-}\operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{P}_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{v}_t^P e^{-(\gamma,\Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right].$$

4. Из теоремы 1 и следствия вытекает разложение любой ограниченной $\mathcal{F}_t^S$-измеримой случайной величины $f_N(S.)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда относительно любой меры* $Q\in\mathcal{P}_N$ *существуют такие согласованная неубывающая последовательность* $(C_t,\mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$, $C_0=0$, *и* $\dot\gamma_t^{NQ}\in D_{t+1}^N$, *что для любого* $t\in N_1$ *Q-п. н.*

$$\Delta\ln\overline{v}_t^Q = (\dot\gamma_t^{NQ},\Delta S_t) + C_t,$$

где $\dot\gamma_t^{NQ}$ *определяется из соотношения Q-п. н.*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{v}_{t+1}^P e^{-(\gamma,\Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_t^S\right] = \mathrm{M}^Q\left[\overline{v}_{t+1}^P e^{-(\dot\gamma_t^{NQ},\Delta S_{t+1})}\Big|\mathcal{F}_t^S\right], \tag{2}$$

причем Q-п. н.

$$f_N(S.) = \ln\overline{v}_0^Q + \sum_{i=1}^N(\dot\gamma_t^{NQ},\Delta S_t) + C_N. \tag{3}$$

5. Рассмотрим теперь задачу расчета европейского опциона на неполном рынке $(B, S^{(1)}, S^{(2)},\ldots,S^{(d)})$, здесь $S^{(i)}=\{S_t^i\}_{t\in N_0}$, где S_t^i — стоимость i-го рискового актива в момент времени $t\in N_0$, $B=\{B_t\}_{t\in N_0}$ — стоимость безрискового актива. Пусть $\pi=(\gamma_t,\beta_t)_{t\in N_1}$ — предсказуемая последовательность, которую мы будем называть *портфелем*. Будем рассматривать только самофинансирующиеся портфели. Капитал портфеля π в момент времени $t\in N_0$, обозначаемый X_t^π определим равенством $X_t^\pi=\beta_tB_t+(\gamma_t,S_t)$. Задача построения максиминного хеджа европейского опциона состоит в нахождении такого портфеля $\overline{\pi}$, согласованной последовательности $(C^t,\mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$ и начального капитала X_0^π таких, что относительно любой меры $Q\in\mathcal{P}_N$ выполнено равенство (3). Следующее утверждение дает методику построения максиминного хеджирующего портфеля.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда относительно любой меры* $Q\in\mathcal{P}_N$ *существуют такие портфель* $\overline{\pi}$, *неубывающая последовательность* $(C_t,\mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$ *и начальный капитал* $X_0^\pi=\ln\overline{v}_0^Q$, *что любое ограниченное платежное обязательство* $f_N(S.)$ *допускает представление Q-п. н.*

$$f_N(S.) = \ln\overline{v}_0^Q + \sum_{i=1}^N(\gamma_i^Q,\Delta S_i) + C_N,$$

где $\{\overline{v}_t^Q\}_{t\in N_0}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (1), $\{\gamma_t^Q\}_{t\in N_0}$ *находится из* (2), *а* $(C_t,\mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$ *допускает представление Q-п. н.*

$$\Delta C_t = \Delta\ln\overline{v}_t^Q - (\gamma_t^Q,\Delta S_t)\geqslant 0, \quad C_t|_{t=0}=0,$$

при этом количество безрискового актива Q-п. н. удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Delta\beta_{t+1}^Q = -\frac{S_t}{B_t}\Delta\gamma_{t+1}^Q, \quad \beta_t^Q|_{t=0} = \ln \overline{\nu}_0^Q,$$

$\gamma_0^Q = 0$, *а капитал портфеля* $\overline{\pi} = (\gamma_t^Q, \beta_t^Q)_{t\in N_1}$ *в момент времени* $t \in N_0$ *допускает представление*

$$X_t^{\overline{\pi}} = \beta_t^Q B_t + (\gamma_t^Q, S_t), \quad Q\text{-п. н.}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00767.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Теория. М.: Фазис, 1998, 1017 с.

Р.В.Спеваков, Р.Г.Спевакова (Набережные Челны, ИЭУиП). **Рекомендации по снижению уровня риска убыточности предприятия и его операционного левериджа.**

В настоящем докладе проводится маржинальный анализ деятельности предприятия ООО «Производственная компания «Завод транспортного электрооборудования» г. Набережные Челны.

Одной из основных задач финансового менеджмента является максимизация массы прибыли и темпов ее наращивания. При этом осуществляется сопоставление выручки от реализации с суммарными переменными и постоянными затратами. Рассчитаем точку безубыточности предприятия ООО «ПК «ЗТЭО» в 2007–2009 годах с целью выявления закономерности в динамике запаса финансовой прчности и риска убыточности предприятия. Итак, в 2007 году предприятие получило выручку от продажи товаров в объеме $B = 458,997$ млн. руб., причем постоянные издержки составляли $F = 41,066$ млн. руб., а условно-переменные — $V = 415,981$ млн. руб. В силу этого маржинальная прибыль предприятия в 2007 году составила $M = 458,997 - 415,981 = 43,016$ млн. руб., а операционная прибыль $EBIT = M - F = 43,016 - 41,066 = 1,95$ млн. руб.

В 2007 году предприятием было продано 1637,934 единиц товара по средней цене $\overline{P} = 0,28023$ млн. руб. за единицу товара (из-за многопрофильности предприятия). Условно-переменные издержки на единицу товара составляли $V = 415,981/1637,934 = 0,25397$ млн. руб., и потому удельный маржинальный доход равнялся $V = 0,28023 - 0,25397 = 0,02626$ млн. руб. Тогда точка операционной безубыточности, т. е. такой количественный объем производства Q^*, при котором маржинальная прибыль M («валовая маржа») равна постоянным издержкам F, находится по формуле $Q^* = F/(\overline{P} - V)$ и равна $Q^*_{2007} = 1563,823$ ед. Порог рентабельности предприятия в 2007 году составит $\overline{P}\,Q^* = 438,23$ млн. руб., а запас финансовой прочности (или предел безопасности предприятия) будет равен $(B - \overline{P}\,Q^*)100\%/B = 4,524\%$. Это означает, что предприятие не перейдет в категорию убыточных в случае снижения выручки в пределах 4,524%. Далее рассчитаем эффект операционного рычага по формуле ЭОР$= M/(M - F) = 43,016/1,95 = 22,06$. Это означает, что при данных ценах $\overline{P}$, объеме производства Q и переменных издержках F увеличение (снижение) объема производства на 1% приведет к увеличению (снижению) операционной прибыли на 22,06%.

Результаты аналогичного операционного анализа, проведенного по данным 2008 и 2009 годов, сгруппированы в следующую таблицу.

Анализ безубыточности, порога рентабельности, запаса финансовой прочности и операционного левериджа приводит к следующим выводам.

ISSN 0869-8325

ТОМ 17

Выпуск 6

ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В выпуске:

Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**
Секция **«Финансовая и страховая математика»**

16 – 23 X • 2010

Одиннадцатый Всероссийский симпозиум
по прикладной и промышленной математике
(Осенняя открытая сессия)

Региональный Макросимпозиум
«Насущные задачи прикладной математики на Кубани»
Научные доклады. Часть II

Редакция журнала «ОПиПМ» • МОСКВА
2010