МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

А. А. Никитин, В. В. Фомичев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2016

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Н62

***Авторы*:**

Никитин Алексей Антонович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, доцент кафедры высшей математики департамента математики факультета экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Фомичев Василий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

***Рецензенты*:**

Крищенко А. П. — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заведующий кафедрой математического моделирования Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана, лауреат Премии Правительства РФ в области науки и техники;

Фоменко Т. Н. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Никитин, А. А.

Н62 Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 460 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-9916-5458-6

Данный учебник предназначен для желающих более глубоко освоить материал, входящий в курс математического анализа: основы теории множеств, числовые последовательности и ряды, непрерывность и дифференцируемость функций, определенный интеграл и т.д. Учебник содержит в конспективной форме материал, входящий в классический курс математического анализа для студентов первого курса, а также многочисленные теоремы, примеры и задачи, выходящие за рамки классического курса, но полезные для более глубокого и всестороннего изучения основ современной математики.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов, обучающихся по математическим направлениям и специальностям. Учебник может быть рекомендован также преподавателям математического анализа, ведущим дополнительные занятия, спецсеминары и факультативы, а также всем интересующимся данной дисциплиной.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-9916-5458-6

Оглавление

Посвящается памяти
нашего дорогого учителя
Владимира Александровича
ИЛЬИНА

Предисловие

Предлагаемый читателям учебник «Углубленный курс математического анализа: учебник и практикум для академического бакалавриата» не похож на классический учебник по математическому анализу. Хотя он и содержит основные сведения, необходимые для изучения классического курса «Математический анализ I», изучаемого студентами математических специальностей университетов на первом году обучения, основное внимание уделяется тем вопросам, которые тесно примыкают к стандартным, базовым курсам, но ввиду своей сложности не разбираются на лекциях и семинарах, а выносятся на самостоятельное изучение сильными студентами либо рассматриваются в рамках дополнительных занятий, факультативов, спецкурсов по математическому анализу. Представленный учебник как раз и возник из спецсеминара, который проводился одним из авторов учебника на протяжении нескольких лет для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

По своей структуре учебник в целом совпадает с классическими курсами, читаемыми в университетах. В основном авторы, конечно, следовали структуре курса В. А. Ильина, читаемого на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, на котором они «выросли». В предлагаемом учебнике в краткой форме приводятся основные сведения из этого курса (основные определения, теоремы и т.д.). Однако основной целью авторов при работе над данным учебником было выйти за рамки того стандартного материала, который преподается студентам в обязательном порядке. Конечно, такой «выход» отражает авторский взгляд на то, какие вопросы будут интересны и полезны сильным студентам, желающим глубже проникнуть в темы, составляющие курс математического анализа для студентов младших курсов. В отличие от большинства продвинутых курсов математического анализа в настоящей книге авторами предпринята попытка «углубления» материала без существенного его «расширения», т.е. предлагаемый материал основывается на тех понятиях и утверждениях, которые рассматриваются в стандартной программе.

Кроме теоретического материала учебник содержит большое количество задач (как разобранных, так и предназначенных для самостоятельного изучения). Основная цель этих задач (многие из которых вполне могли бы стать основой для самостоятельных утверждений; учебник не содержит «технических», типовых задач) — помочь более глубокому пониманию различных аспектов теории.

Авторами была сделана попытка свести в едином учебнике углубленные задачи и теоремы из всех основных разделов курса математического анализа, читаемого на первом году обучения студентам математических специальностей. В частности, в данном учебнике подробно рассматриваются основы теории множеств, изложены три подхода к построению множества вещественных чисел: аксиоматический подход, метод дедекиндовых сечений и подход к введению множества вещественных чисел через фундаментальные последовательности из рациональных чисел, которые редко так подробно излагаются в учебниках по математическому анализу. Подробно разбираются элементы теории множеств, которые выходят за рамки стандартных курсов: множество Кантора, совершенные множества на плоскости и т.д. При этом материал изложен в доступной для студентов первого курса форме. Надеемся, что такой материал будет интересен сильным студентам для самостоятельного обучения.

В учебнике наряду со стандартной теорией числовых последовательностей приведены задачи повышенной сложности. В частности, подробно разбираются теоремы Штольца, Теплица, вопросы их применимости. В книгу включена также теория числовых рядов, тесно примыкающая к теории числовых последовательностей. Хотя теория рядов обычно входит в курс «Математический анализ II», ее использование позволяет глубже раскрыть свойства числовых последовательностей, построить ряд интересных примеров.

В учебнике подробно рассматриваются свойства непрерывных и дифференцируемых функций, особое внимание при этом уделяется примерам, выходящим за рамки стандартного курса. Так, рассматриваются функция Кантора и ее свойства, теория непрерывных кривых, геометрические приложения теории дифференцируемости, а именно исследования возрастания-убывания, выпуклости-вогнутости кривых и т.д.

В учебнике рассматривается классическая для курса «Математический анализ I» тема — определенный интеграл Римана. Но дается не только систематическое изложение основных результатов (определение интеграла, леммы Дарбу и т.д.), которые есть во всех классических учебниках. В данном учебнике строго получены необходимые и достаточные условия интегрируемости Коши, Дюбуа — Реймона и Лебега, подробно рассматривается теория несобственных интегралов, приведены различные условия их сходимости и ряд оригинальных задач и примеров.

Включена в учебник и тема «Функциональные последовательности и ряды». Хотя обычно этот раздел входит в курс «Математический анализ II», авторы приводят многочисленные примеры построения функций с оригинальными свойствами (например, нигде не дифференцируемые функции), а эти примеры удобно строить как раз с помощью функциональных последовательностей и рядов. В свою очередь, такие примеры полезны при изучении непрерывности и дифференцируемости функций одной вещественной переменной.

В последней главе учебника рассматриваются основные понятия теории функций многих переменных: непрерывность, дифференцируемость, неявные функции и т.д. Приводится ряд примеров, иллюстрирующих отличие функций многих переменных от функций одной переменной.

Важной особенностью настоящего учебника является большое число описанных в нем «патологических» примеров множеств и функций. Достаточно подробно были рассмотрены множество Кантора, совершенные нигде не плотные множества на плоскости (ковер Серпинского, кладбище Серпинского, гребенка Кантора), функция Кантора, кривая Вада, кривая Пеано, несколько способов построения всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции и т.д. При этом авторы преследовали несколько целей: во-первых, познакомить читателя с различными способами построения красивейших и известнейших примеров и контрпримеров, а во-вторых, попытаться преодолеть многие из формирующихся у людей, изучающих математический анализ, стереотипов (например, таких: множество меры нуль — очень маленькое и почти незаметное; функция, производная которой равна нулю почти всюду, — константа; непрерывная кривая не может быть общей границей трех или большего числа множеств на плоскости; кривая Жордано — «тонкий штрих, вьющийся на плоскости»; непрерывная функция дифференцируема почти всюду и т.п.).

Многие задачи, теоремы и утверждения, помещенные в учебник, были взяты авторами из пособий, книг и интернет-сайтов, указанных в списке литературы. При этом в большинстве случаев авторы позволяли себе не указывать источники рассмотренных тем, поскольку они легко определяются по указанным книгам.

Учебник содержит около сотни оригинальных иллюстраций, которые призваны способствовать более полному пониманию предлагаемого материала. Для их создания использовались программы Matlab, Wolfram Mathematica, JavaScript и др. Еще больше иллюстраций и анимаций, которые, по понятным причинам, не могут попасть в печатное издание, можно найти на сайте www.visualmath.ru, который поддерживается одним из авторов учебника.

Для успешного изучения дисциплины «Математический анализ» студент должен обладать знаниями по элементарной математике в объеме, изучаемом в средней школе. Для успешного освоения курса необходимо параллельное изучение курсов «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра и геометрия».

Для освоения курса «Углубленный курс математического анализа» предполагается, что читатель знает основные положения теории множеств, теории пределов, теории непрерывных функций, теории дифференциального и интегрального исчисления, теории числовых и функциональных рядов, теории несобственных интегралов, теории функций многих переменных. Студент также должен быть хорошо знаком с основными понятиями из курса алгебры: линейного пространства, нормированного и гильбертова пространства и т.д. Читатель должен уметь считать производные функций нескольких переменных, находить неопределенные интегралы, исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряды и несобственные интегралы.

В результате освоения курса студенты расширят свои знания по теории множеств, теории вещественных чисел, теории числовых последовательностей, теории непрерывных функций, теории дифференциального и интегрального исчисления, теории несобственных интегралов и других разделов математического анализа.

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать

- основные понятия, определения и факты теории множеств, теории числовых последовательностей и рядов, дифференциального и интегрального исчисления;

уметь

- применять на практике основные методы математического анализа;
- уметь решать задачи по основным разделам математического анализа: теории множеств, теории числовых последовательностей и рядов, дифференциального и интегрального исчисления;
- уметь доказывать утверждения, строить примеры и контрпримеры к различным утверждениям из курса математического анализа;

владеть

- навыками решения практических задач математического анализа;
- методами математического анализа, проблемно-задачной формой представления математических знаний;
- проблемно-задачной формой представления естественнонаучных знаний.

Авторы выражают благодарность рецензентам А. П. Крищенко и Т. Н. Фоменко за ряд ценных замечаний, а также П. А. Макарову, чья работа вышла далеко за рамки простой редактуры. Авторы благодарны многим своим коллегам с факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета и из других вузов. Из их числа особенно хотелось бы выделить А. А. Кулешова, А. А. Полосина, И. В. Садовничую, А. В. Домрину и А. Х. Шеня. Также авторы благодарят за помощь при подготовке рукописи аспирантов А. В. Мальцеву, Е. И. Атамася. Некоторые из приведенных решений принадлежат различным студентам, которые посещали лекции и семинары авторов. Здесь хотелось бы выделить Антона Савостьянова. Наконец, очень многие из иллюстраций, которые были помещены в учебник, были запрограммированы студентами авторов. Особую благодарность заслуживают Алеся Яковчук и Василий Рубцов.

Глава 1
ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. Аксиоматика множества действительных чисел

Для доказательства ряда основных утверждений из курса математического анализа требуется знать «точную структуру» множества действительных чисел. Оно очень похоже, например, на множество рациональных чисел, но обладает и некоторыми отличиями. Эти отличия (например, свойство полноты) приводят к тому, что ряд утверждений верен для действительных, но не верен для рациональных чисел.

Изучим подробнее множество действительных (вещественных) чисел. Существует целый ряд конструктивных способов определения этого множества: теория бесконечных десятичных дробей, теория сечений в области рациональных чисел, теория фундаментальных последовательностей из рациональных чисел (последовательности Кантора). Далее рассмотрим кратко аксиоматический способ введения действительных чисел. Более подробное освещение данного способа читатель может найти в источниках из списка литературы.

Определение 1.1. Пусть даны два множества X и Y. *Декартово произведение множества X и множества Y* есть такое множество Z, элементами которого являются упорядоченные пары (x, y) для всевозможных $x \in X$ и $y \in Y$ (обозначение: $Z = X \times Y$).

Определение 1.2. Множество $\mathbb{R}$ называется *множеством действительных* (*вещественных*) *чисел*, а его элементы — *действительными числами*, если выполнены следующие условия (*аксиоматика действительных чисел*).

1. Аксиомы сложения.

На множестве $\mathbb{R}$ определена *операция сложения*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

которая сопоставляет каждой упорядоченной паре $(x; y)$ элементов $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый *суммой* x и y, для которого выполнены следующие условия:

а) существует такой элемент (обозначаемый в случае сложения *нулем*, 0), что для $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x;$$

б) для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый *противоположным* к x, такой что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0;$$

в) операция «+» *ассоциативна*, т.е. для $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

г) операция «+» *коммутативна*, т.е. для $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ справедливо

$$x + y = y + x.$$

Если на множестве X определена операция, удовлетворяющая аксиомам 1*а*, 1*б*, 1*в*, то говорят, что X есть *аддитивная группа*[1]. Если, кроме того, выполнена аксиома 1*г*, то группу называют *коммутативной* или *абелевой*.

2. Аксиомы умножения.

На множестве $\mathbb{R}$ определена *операция умножения*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

которая сопоставляет каждой упорядоченной паре $(x; y)$ элементов $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый *произведением* x и y, для которого выполнены следующие условия:

а) существует такой элемент (обозначаемый в случае умножения *единицей*, 1), что для $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x;$$

б) для любого элемента $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ имеется элемент x^{-1}, называемый *обратным*, такой что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$$

в) операция умножения *ассоциативна*, т.е. для $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

г) операция умножения *коммутативна*, т.е. для $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ справедливо

$$x \cdot y = y \cdot x$$

(заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ является (*мультипликативной*) группой);

д) совместная аксиома сложения и умножения: умножение *дистрибутивно* по отношению к сложению, т.е. $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Если на множестве X действуют две операции, удовлетворяющие всем перечисленным аксиомам, то X называется *числовым* (*алгебраическим*) *полем* или просто полем.

В качестве самостоятельной работы предлагаем читателю доказать следующие *свойства аксиом сложения и умножения*.

Задание 1.1. Докажите, что:

(а) в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ существует лишь единственный нуль;

(б) в множестве $\mathbb{R}$ для каждого элемента x существует лишь единственный противоположный элемент;

[1] Подробнее о понятии группы читатель может узнать, например, в книге [11].

(в) в множестве $\mathbb{R}$ существует единственная единица;

(г) в множестве $\mathbb{R}$ для каждого элемента $x \neq 0$ существует лишь единственный обратный элемент.

3. Аксиомы порядка.

Между любыми двумя элементами $\mathbb{R}$ имеется *отношение неравенства* $\leq$, т.е. для $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ установлено, выполняется ли $x \leq y$ (x меньше или равно y) или нет. При этом будем требовать выполнения следующих условий:

а) для каждого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $x \leq x$;

б) из $x \leq y$ и $y \leq x$ следует $x = y$;

в) из $x \leq y$ и $y \leq z$ следует $x \leq z$;

г) для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено или $x \leq y$, или $y \leq x$.

Множество, между некоторыми элементами которого имеется отношение неравенства, удовлетворяющее аксиомам 3*а*, 3*б* и 3*в*, называют *частично упорядоченным*, а если кроме того выполнена аксиома 3*г*, то *линейно упорядоченным*;

д) *связь сложения и порядка в* $\mathbb{R}$: для $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $x \leq y$, и всех $z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + z \leq y + z.$$

е) *связь умножения и порядка в* $\mathbb{R}$: Для $x, y, z \in \mathbb{R}$ таких, что $x \leq y$ и $z \geq 0$, выполнено

$$x \cdot z \leq y \cdot z;$$

Замечание 1.1. Заметим, что всем уже перечисленным аксиомам удовлетворяет и множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$[1]. А вот следующей аксиоме множество $\mathbb{Q}$ уже не удовлетворяет.

4. Аксиома непрерывности (аксиома полноты).

Если X и Y — непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для $\forall\, x \in X$ и $\forall\, y \in Y$ выполнено $x \leq y$, то $\exists\, c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq c \leq y$ для $\forall\, x \in X$ и $\forall\, y \in Y$[2].

Упорядоченное поле, удовлетворяющее аксиоме непрерывности, называется непрерывным упорядоченным полем.

Покажем, что множество $\mathbb{Q}$ не удовлетворяет аксиоме непрерывности. Рассмотрим два подмножества множества $\mathbb{Q}$:

$$P = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \geq 0, p^2 < 2\},\ R = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0, r^2 > 2\}.$$

Очевидно, что для $\forall\, p \in P$, $\forall\, r \in R$ выполнено неравенство $p \leq r$, но $\nexists\, c \in \mathbb{Q}$ такого, что $c^2 = 2$ (доказательство элементарно проводится от противного), а поэтому $\nexists\, c$ такого, что выполнено неравенство $p \leq c \leq r$ для любых элементов $p \in P$ и $r \in R$. Таким образом, приведенные аксиомы определяют «более существенное» множество, чем $\mathbb{Q}$. Покажем, что в некотором смысле они определяют множество $\mathbb{R}$ единственным образом.

---

[1] Строгое определение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ будет дано в дальнейшем.

[2] Важным фактом является то, что элемент c ищется не для каждой пары элементов x и y в отдельности, а он один и тот же для всех элементов из данных множеств.

Определение 1.3. Два поля X и Y называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное отображение[1] f поля X на поле Y, что для любых двух элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполняются два условия:

$$f(x+y)=f(x)+f(y); f(x \cdot y)=f(x) \cdot f(y).$$

Отображение f называется в этом случае *изоморфизмом* или *изоморфным отображением*. Другими словами, два поля называются изоморфными, если существует биекция, сохраняющая операции сложения и умножения.

Если поля X и Y линейно упорядочены и существует изоморфное отображение f поля X на поле Y, сохраняющее отношение порядка, т.е. для всех $x, y \in X$ таких, что $x \leq y$, имеет место соотношение $f(x) \leq f(y)$, то поля X и Y называются *изоморфными упорядоченными полями*.

Примем без доказательства следующую важнейшую теорему.

Теорема 1.1. *Все непрерывные упорядоченные поля изоморфны между собой.*

Таким образом, указанные аксиомы однозначно (с точностью до изоморфизма) определяют множество вещественных чисел.

Множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, целых чисел $\mathbb{Z}$ и рациональных чисел $\mathbb{Q}$ естественным путем «вкладываются» в множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Так, под *множеством натуральных чисел* $\mathbb{N}$ будем понимать множество чисел $n \in \mathbb{R}$ таких, что $n=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ слагаемых}}$, где 1 — особый элемент для операции умножения.

Натуральные числа, противоположные им и нуль называются *целыми числами* (обозначение: $\mathbb{Z}$). Частные m/n, где m, n — взаимно простые целые числа и $n \neq 0$, называются *рациональными числами* (обозначение: $\mathbb{Q}$). Все остальные вещественные числа называются *иррациональными*.

Рассмотрим далее еще один способ определения множества вещественных чисел, а именно, способ введения этих чисел с помощью сечений множества рациональных чисел (*дедекиндовы сечения*).

Определение 1.4. *Сечением* множества рациональных чисел будем называть упорядоченную пару непустых множеств $\{A; B\}$, где $A, B \subset \mathbb{Q}$ такие, что:

1) для $\forall\ a \in A, \forall\ b \in B \Rightarrow a < b$;

2) для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ a \in A, \exists\ b \in B : b - a < \varepsilon$;

3) для $\forall\ a^* \in A, \forall\ a \in \mathbb{Q} : a < a^* \Rightarrow a \in A$; для $\forall\ b^* \in B, \forall\ b \in \mathbb{Q} : b > b^* \Rightarrow$ $\Rightarrow b \in B$;

4) в множестве A нет максимального элемента, в множестве B нет минимального элемента.

Из определения 1.4 следует, что либо $A \cup B = \mathbb{Q}$, либо $A \cup B = \mathbb{Q} \backslash \{p\}$, $p \in \mathbb{Q}$, т.е. объединение A и B дает либо все множество $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{Q}$ без одного элемента. Действительно, если два рациональных числа p' и p'', где $p' < p''$, не принадлежат объединению $A \cup B$, то и $\forall\ q \in \mathbb{Q}, p' < q < p''$, также не принадлежит $A \cup B$ (иначе в силу условия 3 либо $p' \in A$, либо $p'' \in B$). Но тогда

[1] Здесь подразумевается, что читатель уже знаком с понятием взаимно однозначного отображения. Его строгое определение будет дано в дальнейшем.

$(\forall\, a \in A \Rightarrow a < p',\ \forall\, b \in B \Rightarrow b > p'') \Rightarrow \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B$ выполнено $b - a >$ $> p'' - p' = \varepsilon^* > 0$, что противоречит условию 2.

Сечение $\{A; B\}$ соответствует рациональному числу p, если $A \cup B = \mathbb{Q}\backslash\{p\}$. Сечение $\{A; B\}$ в случае $A \cup B = \mathbb{Q}$ и будем считать новым объектом — вещественным числом. На самом деле (если множество уже введено), в случае если $A \cup B = \mathbb{Q}$, фактически множества A и B определяются условием $a < x$, $b > x$ для некоторого иррационального x.

В литературе обычно отказываются от условий 3, 4 и заменяют их на условие $A \cup B = \mathbb{Q}$, и в случае если в A есть максимальный элемент либо в B есть минимальный элемент, сечение ассоциируют с соответствующим рациональным числом. Но это приводит к некоторым техническим трудностям при строгом доказательстве аксиоматики вещественных чисел, поэтому ниже будем опираться на приведенное выше «неклассическое» определение сечения.

Покажем, что, опираясь на это определение, можно ввести три операции (*сравнения*, *сложения* и *произведения*) и установить для них свойства, перечисленные в аксиоматическом подходе.

Операция сравнения. Пусть заданы два сечения

$$x' = \{A'; B'\} \text{ и } x'' = \{A''; B''\}.$$

Будем говорить, что $x' = x''$, если для $\forall\, a' \in A'$, $\forall\, b' \in B'$, $\forall\, a'' \in A''$, $\forall\, b'' \in B''$ выполнено $a' < b''$, $a'' < b'$.

Покажем, что в этом случае для сечений x' и x'' выполнены равенства

$$A' = A'',\ B' = B''.$$

Пусть $a' \in A'$. Покажем, что $a' \in A''$. Предположим, что это не так, т.е. $a' \notin A''$. Тогда либо $a' \in B''$, но в этом случае в силу п. 4 определения сечения[1] $\exists\, \tilde{b}'' \in B''$ такое, что $\tilde{b}'' < a'$, что противоречит условиям из определения равенства $(\forall\, a' < b'')$; либо возможен второй вариант: $a' \in \mathbb{Q}\backslash\{A'' \cup B''\}$, т.е. $A'' \cup B'' = \mathbb{Q}\backslash\{a'\}$, сечение x'' соответствует рациональному числу a'. Но так как во множестве A' нет максимального элемента, то $\exists\, \tilde{a}' \in A'$, $\tilde{a}' > a' \Rightarrow$ $\Rightarrow \tilde{a}' \in B''$ и, как было показано выше, $\exists\, \tilde{b}'' \in B''$, $\tilde{b}'' < \tilde{a}'$, что вновь приводит нас к противоречию. Таким образом, выполнено: $\forall\, a' \in A' \Rightarrow a' \in A''$. В силу симметричности множеств в определении сравнения можно показать, что для $\forall\, a'' \in A''$ справедливо $a'' \in A'$, т.е. $A' = A''$.

Аналогично (с рассмотрением противоположных неравенств) доказывается равенство $B' = B''$.

Если эти условия не выполняются, то для $x' = \{A'; B'\}$ и $x'' = \{A''; B''\}$ возможны следующие ситуации.

1. Для $\forall\, a' \in A'$, $\forall\, b'' \in B''$ выполнено $a' < b''$, но $\exists\, b' \in B'$, $\exists\, a'' \in A''$ такие, что $a'' > b'$. Тогда говорят, что $x' < x''$.
2. Для $\forall\, a'' \in A''$, $\forall\, b' \in B'$ выполнено $a'' < b'$, но $\exists\, a' \in A'$, $\exists\, b'' \in B''$ такие, что $a' > b''$. Тогда говорят, что $x' > x''$.

Ситуация, когда $\exists\, a', a'', b', b''$ такие, что $a' > b''$, $a'' > b'$, невозможна, так как в этом случае в силу п. 1 для сечения x'' выполнено $a' > b'' > a'' > b' \Rightarrow$

[1] В силу отсутствия минимального элемента в множестве B''.

$\Rightarrow a' > b'$, что противоречит п. 1 для сечения x'. Таким образом, любые два сечения связаны одним из знаков: =, >, <.

Покажем, что для введенной операции выполнено свойство транзитивности, т.е.

1) $x' = x''$, $x'' = x''' \Rightarrow x' = x'''$;

2) $x' < x''$, $x'' < x''' \Rightarrow x' < x'''$.

Доказательство

1. Пусть $x' = x''$, $x'' = x'''$. Тогда, как было показано выше,

$$A' = A'', B' = B'', A'' = A''', B'' = B''' \Rightarrow A' = A''', B' = B''' \Rightarrow x' = x'''.$$

2. Пусть $x' < x''$, $x'' < x'''$. Тогда:

• для всех $a' \in A', b'' \in B''$ выполнено $a' < b''$; найдутся $\tilde{b}'$ и $\tilde{a}''$ такие, что $\tilde{a}'' > \tilde{b}'$;

• для всех $a'' \in A'', b''' \in B'''$ выполнено $a'' < b'''$; найдутся $\tilde{b}''$ и $\tilde{a}'''$ такие, что $\tilde{a}''' > \tilde{b}''$ (рис. 1.1).

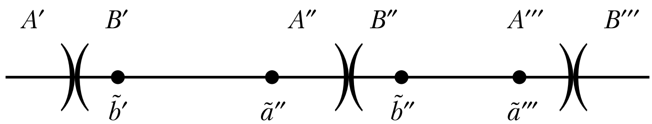

Рис. 1.1

Тогда для всех a' и b''' справедливо

$$a' < \tilde{b}' < \tilde{a}'' < \tilde{b}'' < \tilde{a}''' < b'''.$$

При этом $\exists\, \tilde{a}'''$ и $\tilde{b}' : \tilde{b}' < \tilde{a}'' < \tilde{b}'' < \tilde{a}'''$, откуда $x' < x'''$. ■

Операция сложения. Пусть заданы два сечения $x' = \{A'; B'\}$ и $x'' = \{A''; B''\}$. Суммой x' и x'' назовем сечение $x = \{A; B\}$ такое, что $A = \{a' + a'', a' \in A', a'' \in A''\}$, $B = \{b' + b'', b' \in B', b'' \in B''\}$, т.е. A и B — множества всевозможных сумм соответствующего вида. Покажем, что $x = x' + x''$ — сечение. Действительно:

1) так как для $\forall\, a', a'', b', b''$ имеем $a' < b'$, $a'' < b''$, то $a' + a'' = a < b' + b'' = b$;

2) для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a', a'', b', b''$: $a' - b' < \varepsilon/2$, $a'' - b'' < \varepsilon/2 \Rightarrow a - b = (a' + a'') - (b' - b'') < \varepsilon$;

3) пусть $\tilde{a} \in A$. Рассмотрим $\forall\, a < \tilde{a}$, $a \in \mathbb{Q}$. Так как $\tilde{a} \in A$, то $\tilde{a} = \tilde{a}' + \tilde{a}''$, $\tilde{a}', \tilde{a}'', \tilde{a} \in \mathbb{Q}$. Тогда $\tilde{a} - a = \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = \tilde{a}' + \tilde{a}'' - \varepsilon = (\tilde{a}' - \varepsilon) + \tilde{a}'' \Rightarrow (\tilde{a}' - \varepsilon) \in \mathbb{Q}$, $(\tilde{a}' - \varepsilon) < \tilde{a}' \Rightarrow (\tilde{a}' - \varepsilon) \in A' \Rightarrow a \in A$.

Аналогично если $\tilde{b} \in B$, то для любого $b \in \mathbb{Q}$, $b > \tilde{b} \Rightarrow b \in B$;

4) для $\forall\, a \in A$, т.е. $a = a' + a'' \Rightarrow \exists\, \tilde{a}' > a'$, $\exists\, \tilde{a}'' > a'' \Rightarrow \exists\, \tilde{a} = \tilde{a}' + \tilde{a}'' > a$, $\tilde{a} \in A$.

Аналогично для $\forall\, b \in B\ \exists\, \tilde{b} \in B$: $\tilde{b} < b$.

Таким образом, определенная выше сумма в свою очередь является сечением.

Установим, что для определенной суммы выполнены соответствующие свойства.

1. $x' + x'' = x'' + x'$.

Доказательство

Пусть заданы сечения $x' = \{A'; B'\}$ и $x'' = \{A''; B''\}$. В силу коммутативности сложения для рациональных чисел получаем

$$a' + a'' = a'' + a',\ b' + b'' = b'' + b' \Rightarrow x' + x'' = x'' + x'. \blacksquare$$

2. $(x' + x'') + x''' = x' + (x'' + x''')$.

Доказательство

Аналогично п. 1. $\blacksquare$

3. Существует сечение 0 такое, что $\forall\ x$ выполнено $x + 0 = 0 + x = x$.

Доказательство

В качестве такого сечения рассмотрим сечение $\{A^*; B^*\}$, где $A^* = \{p: p \in \mathbb{Q}, p < 0\}$; $B^* = \{q: q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$. Тогда для $\forall\ x = \{A; B\}$ сумма $x + 0 = \{\tilde{A}; \tilde{B}\}$, где $\tilde{A} = \{a + p \in \mathbb{Q}, p < 0\}$; $\tilde{B} = \{b + q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$. Тогда, выбирая произвольные $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$, получаем

$$\tilde{a} = a + p < a < b; \quad \tilde{b} = b + q > b > a.$$

Следовательно, $\tilde{a} < b$ и $\tilde{b} > a$, т.е $x + 0 = x$. $\blacksquare$

4. Для любого $x = \{A; B\}\ \exists\ x' = \{A'; B'\}$: $x + x' = 0$.

Доказательство

В качестве x' можно рассмотреть сечение вида $A' = \{-b, b \in B\}$; $B' = \{-a, a \in A\}$. Очевидно, что это сечение (так как $\{A; B\}$ — сечение), при этом для суммы $x + x' = \{\tilde{A}; \tilde{B}\}$ выполнены условия

$$\tilde{A} = \{\tilde{a} = a - b\} \Rightarrow \tilde{a} < 0; \tilde{B} = \{\tilde{b} = b - a\} \Rightarrow \tilde{b} > 0 \Rightarrow \{\tilde{A}; \tilde{B}\} = 0,$$

т.е. $x' + x = 0$. $\blacksquare$

Операция произведения. Для того чтобы определить произведение сечений x' и x'', рассмотрим сначала базовый случай: $x' > 0$, $x'' > 0$. В силу определения нуля (0) и операции сравнения это означает, что для $x' = \{A'; B'\}$ и $x'' = \{A''; B''\}$ найдутся a', a'' такие, что $a' > 0$, $a'' > 0$ (и конечно, $\forall\ b', b'' \Rightarrow b' > 0, b'' > 0$). Тогда произведением x' и x'' назовем сечение $x = \{A; B\}$ такое, что

$$B = \{b' \cdot b''\},\ A = \{p \le 0, p \in \mathbb{Q}\} \cup \{a' \cdot a'', a' > 0, a'' > 0\},$$

где a', a'', b', b'' — всевозможные элементы из соответствующих множеств. Как и в случае определения суммы, несложно показать, что $\{A; B\}$ действительно сечение.

В случае если $x' = 0$ имеем $x \cdot x' \overset{def}{=} 0$ для $\forall\ x$.

Если $x \neq 0$, то можно определить $|x| > 0$: $|x| = x$ при $x > 0$ и $|x| = x'$, x' — противоположный для x (см. свойство 4 операции сложения), если $x < 0$.

Тогда под произведением $x' \neq 0$ и $x'' \neq 0$ будем понимать

$$x = \begin{cases} |x'| \cdot |x''|, \text{если } x' > 0 \text{ и } x'' > 0 \text{ или } x' < 0, x'' < 0, \\ \text{противоположный элемент к } |x'| \cdot |x''|, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для операции умножения по аналогии с операцией сложения можно показать, что выполнены следующие свойства.

1. $x' \cdot x'' = x'' \cdot x'$.

2. $(x' \cdot x'') \cdot x''' = x' \cdot (x'' \cdot x''')$.

Свойства легко доказываются сначала для $x' > 0, x'' > 0$ с учетом свойств рациональных чисел, потом обобщаются на случай произвольных знаков.

3. $\exists\ 1$: для $\forall\ x \Rightarrow x \cdot 1 = x$.

В качестве 1 берем сечение

$$\{A; B\} : A = \{p \in \mathbb{Q}, p < 1\}, B = \{q \in \mathbb{Q}, q > 1\}.$$

Легко показать, что $x \cdot 1 = x$ при $x > 0$, далее свойство распространяется на случай $x < 0$.

4. Для $\forall\ x \neq 0\ \exists\ x'$: $x \cdot x' = 1$.

Если $x > 0$, то в качестве x' возьмем сечение

$$\{A'; B'\} : B' = \{1/a\ , a > 0\}, A' = \{p \leq 0, p \in \mathbb{Q}\} \cup \{1/b\}.$$

Легко показать, что это действительно сечение, при этом $x \cdot x' = 1$. Далее, если $x < 0$, то в качестве x' берем элемент, противоположный к обратному для $|x|$.

Таким образом, для сечений выполнены все свойства умножения. Установим теперь совместные свойства операций сравнения, сложения и умножения.

1. $(x' + x'') \cdot x''' = x' \cdot x''' + x'' \cdot x'''$.

Доказательство

Свойство следует из определения операций сложения и умножения, а также из соответствующего свойства для рациональных чисел. ■

2. Для x', x'' таких, что $x' > x''$, и для $\forall\ x'''$ выполнено: $x' + x''' > x'' + x'''$.

Доказательство

Так как $x' > x''$, то $\exists\, a', b''$: $a' > b''$. Обозначим $\varepsilon = a' - b'' > 0$. В сечении x'' найдутся a''' и b''' такие, что $b''' - a''' < \varepsilon$. Следовательно, $a' + a''' > b'' + b'''$, так как $a' - b'' > b''' - a'''$. Но это означает, что $x' + x''' > x'' + x'''$. ■

3. Для всех x', x'', x''' таких, что $x' > x'', x''' > 0$, выполнено $x' \cdot x''' > x'' \times$ $\times\, x'''$.

Доказательство

Свойство устанавливается аналогично свойству 2 с учетом определения операции умножения. ■

Покажем теперь, что для построенного множества сечений выполнено свойство непрерывной упорядоченности, т.е. пусть X, Y — непустые подмножества множества всевозможных сечений, такие что для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leq y$. Тогда найдется сечение c: $x \leq c \leq y$ для $\forall\ x \in X$ и $\forall\ y \in Y$.

Доказательство

Пусть заданы непустые подмножества X и Y. Рассмотрим всевозможные элементы

$$x = \{A'; B'\} \in X; y = \{A''; B''\} \in Y.$$

Определим $A = \bigcup_{x \in X} A'$. Очевидно, что A не имеет максимального элемента (иначе этот элемент максимальный и для какого-то A'). Зафиксируем произвольное $a^* \in A$ (значит, a^* лежит в некотором A') и выберем произвольное рациональное a, меньшее a^*. Получаем, что a лежит в том же самом A', а значит, и в A.

Далее, так как $\exists\, y \in Y$ такой, что $y \geq x$ для $\forall\, x \in X$, то $\exists\, B''$: для $\forall\, b'' \in B''$ $b'' > a'$ для $\forall\, a'$ из любого $A' \Rightarrow b'' > a$ для $\forall\, a \in A$. Таким образом, имеем непустое множество $\tilde{B}$, состоящее из рациональных элементов $b > a$ для $\forall\, a \in A$. Множество $\tilde{B}$ может содержать, а может и не содержать минимальный элемент. Рассмотрим $B = \tilde{B}$, если в $\tilde{B}$ нет минимального элемента, либо $B = \tilde{B} \setminus \{b_*\}$, где b_* — минимальный элемент $\tilde{B}$. Таким образом построено сечение $c = \{A; B\}$ (проверьте, что это действительно сечение!). Покажем, что для $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in Y$ выполнено $x \leq c \leq y$. Пусть $x \in X$, т.е $x = \{A'; B'\}$. Для произвольного $a' \in A'$ выполнено, что $a' \in A$, а значит, $a' < b$ для $\forall\, b \in B$, т.е. $x \leq c$.

Пусть $y \in Y$. Предположим, что $c > y$. Тогда $\exists\, a \in A$ и $b'' \in B''$ такие, что $a > b''$. Но так как $a \in A$, то $\exists\, A'$: $a \in A' \Rightarrow \exists\, x \in X$: $x > y$, что противоречит условию на X и Y, значит, $c \leq y$. ■

Таким образом, построенное множество сечений удовлетворяет всем аксиомам из аксиоматического описания множества $\mathbb{R}$, значит, оно изоморфно множеству $\mathbb{R}$.

1.2. Мощность множества. Кардинальные числа

Как было отмечено выше, множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ является существенным расширением множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. В связи с этим возникает вопрос: а насколько существенно это расширение? И как вообще сравнивать различные бесконечные множества? Ответ на этот вопрос дает *канторова теория множеств.*

Для дальнейшего изложения нам потребуются следующие определения.

Определение 1.5. *Взаимно однозначное соответствие* (*биекция*) *двух множеств* — соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества, и обратно.

Определение 1.6. Два множества называются *эквивалентными*, если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют *одинаковую мощность* (обозначение: $A \sim B$).

Замечание 1.2. На вопрос, что такое мощность множества, можно ответить так: мощность — это нечто, что есть общего у всех эквивалентных между собой множеств (*определение через абстракцию*). Обозначение мощности множества A: $\overline{\overline{A}}$, $|A|$ или card$A$.

Определение 1.7. Всякое множество A, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется *исчислимым* или *счетным* (обозначение мощности счетного множества: $\aleph_0$ (*алеф-нуль*)).

Фактически последнее определение означает, что элементы бесконечного множества A можно пронумеровать.

Определение 1.8. Всякое бесконечное множество, неэквивалентное множеству натуральных чисел, называется *неисчислимым* или *несчетным*.

Изложение теории проведем в форме решения задач.

Задача 1.1

Докажем, что из любого бесконечного множества A можно выделить счетное подмножество D.

Решение

Рассмотрим бесконечное множество A. Выделим из данного множества произвольный элемент a_1. Так как множество A бесконечно, то и множество $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, и мы можем выделить элемент a_2 из оставшегося множества. По тем же соображениям множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$ бесконечно, и мы можем выделить из него элемент a_3. Ввиду бесконечности множества A данный процесс можно продолжать неограниченно, в результате чего мы получим последовательность выделенных элементов $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, которая и образует искомое множество D[1].

Задача 1.2

Докажем, что всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Решение

Ясно, что, для того чтобы множество A было счетным, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде последовательности $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ (доказывается соотношением элемента a_n и его индекса n). Далее, пусть A — счетное множество, а B — его бесконечное подмножество. Так как множество A счетно, расположим его в порядке нумерации его элементов и будем перебирать их один за другим в порядке возрастания их номеров. При этом мы время от времени будем встречать элементы множества B, и каждый элемент этого множества рано или поздно встретится нам. Соотнося каждому элементу B номер «встречи» с ним, мы перенумеруем данное множество, причем в силу его бесконечности нам придется израсходовать на эту нумерацию «все натуральные числа».

Указанные свойства счетного множества позволяют нам утверждать, что счетные множества являются *наименьшими* в некотором смысле (который будет указан далее) бесконечными множествами.

Задание 1.2

Докажите, что: а) объединение конечного и счетного множеств счетно; б) объединение двух счетных множеств счетно.

Задача 1.3

Докажем, что объединение счетного множества попарно непересекающихся счетных множеств есть счетное множество.

[1] Вопрос о том, как можно за конечное время проделать некоторую операцию бесконечное число раз, мы здесь и далее опускаем. Читатель не согласный с таким подходом, может обратиться к литературе по аксиоме выбора и попробовать перевести предлагаемые конструкции на язык, в котором процедура выбора бесконечное число раз за конечное время отсутствует. Мы же будем заботиться в первую очередь о наглядности проводимых построений.

Решение

Пусть счетные множества A_k попарно не пересекаются и счетны. Запишем эти множества так:

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_n^{(1)}, ...\},$$

$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, ..., a_n^{(2)}, ...\},$$

$$...$$

$$A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, ..., a_n^{(n)}, ...\},$$

$$...$$

Заметим, что элементов, у которых сумма индексов равна $p \in \mathbb{N}$, конечное число. Сначала мы выпишем элемент $a_1^{(1)}$, затем элементы $a_1^{(2)}$ и $a_2^{(1)}$, у которых сумма верхнего и нижнего индексов равна 3, затем те элементы, у которых эта сумма равна 4 (занумерованные в произвольном порядке), и т.д. В результате объединение $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ окажется представленным в форме последовательности

$$\{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}, ...\},$$

откуда и следует ее счетность.

Заметим, что данный способ нумерации множества S не является единственным. Предлагаем читателю придумать еще несколько.

Задача 1.4

Пусть E — бесконечное множество, $D \subset E$, D — не более чем счетное множество и $E \setminus D$ бесконечно. Докажем, что множества $E \setminus D$ и E равномощны.

Решение

Выделим помимо подмножества D еще одно счетное множество F в $E \setminus D$. Это всегда можно сделать, используя предыдущие результаты, так как множество $E \setminus D$ бесконечно. Тогда имеем

$$E = (E \setminus D) \cup D = (E \setminus D \setminus F) \cup (D \cup F) \sim (E \setminus D \setminus F) \cup F = E \setminus D.$$

Здесь мы использовали, что объединение двух счетных множеств счетно, т.е. $D \cup F \sim F$.

Задача 1.5

Докажем, что если к бесконечному множеству A прибавить конечное или счетное множество B новых элементов, то это не изменит его мощности, т.е. $A \cup B \sim A$.

Решение

Выделим, пользуясь доказанными выше утверждениями, из множества A счетное подмножество C. И пусть $A \setminus C = D$, тогда

$$A \cup B = D \cup (C \cup B) \sim D \cup C = A.$$

Здесь мы использовали, что объединение двух счетных множеств счетно.

Задача 1.6

Пусть A — бесконечное множество. Докажем существование множества B (такого, что $B \subset A$ и $A \setminus B$ бесконечно), мощность которого равна мощности A.