ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2012, том 442, № 5, с. 583–588

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЕГО НЕОСОБОЙ ТОЧКИ

© 2012 г. А. Д. Брюно, А. В. Парусникова

Представлено академиком Д.В. Аносовым 21.09.2011 г.

Поступило 06.10.2011 г.

В работе методами степенной геометрии найдены все асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве в окрестности его неособой точки для всех значений четырех комплексных параметров уравнения. Получено 10 семейств разложений решений уравнения, одно из которых не было известно раньше. Три разложения являются рядами Лорана, а остальные семь – рядами Тейлора. Все они сходятся в (проколотой) окрестности неособой точки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пятое уравнение Пенлеве

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \quad (1)$$

где α, β, γ, δ – комплексные параметры, z – независимая, w – зависимая комплексные переменные, $w' = \dfrac{dw}{dz}$. Уравнение (1) имеет две особые точки $z = 0$ и $z = \infty$.

В этой работе методами двумерной степенной геометрии [1, 2] найдем все асимптотические разложения решений (АРР) уравнения (1) в окрестности его неособой точки $z = z_0$, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq \infty$ для всех значений параметров α, β, γ, δ. Для этого в уравнении (1) сделаем замену $z = t + z_0$, которая переводит точку $z = z_0$ в точку $t = 0$. Полученное после замены уравнение представим в виде дифференциальной суммы (многочлена по t, w, w', w''), т.е. умножим его на $(t + z_0)^2w(w - 1)$ и перенесем все члены уравнения в правую часть:

$$f(t, w) \stackrel{\text{def}}{=} -(t+z_0)^2 w(w-1)w'' + (t+z_0)^2\left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2}\right)(w')^2 - (t+z_0)w(w-1)w' + (w-1)^3(\alpha w^2 + \beta) + \gamma(t+z_0)w^2(w-1) + \delta(t+z_0)^2 w^2(w+1) = 0. \quad (2)$$

Наша задача сводится к нахождению АРР уравнения (2) при $t \to 0$. Ищем разложения решений вида

$$w = c_r(t)t^r + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s(t)t^s,$$

где $c_r(t)$, $c_s(t)$, $r, s \in \mathbb{C}$, $\mathbf{K} \subset \{s | \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r\}$, множество $\mathbf{K}$ счетно. Функции $c_r(t)$, $c_s(t)$ либо постоянные, либо многочлены от $\ln t$, либо ряды по убывающим степеням $\ln t$, либо конечные суммы или ряды по степеням t^i с ограниченными сверху или снизу показателями степени.

2. СЛУЧАЙ $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$

При $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ носитель $\mathbf{S}(f)$ уравнения (2), многоугольник $\Gamma(f)$ с ребрами $\Gamma_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, изображены на рис. 1. Поскольку мы рассматриваем случай $t \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0\}$, т.е. нас интересуют только вершины $\Gamma_1^{(0)} = (0, 0)$, $\Gamma_2^{(0)} = (-2, 2)$, $\Gamma_3^{(0)} = (-2, 3)$ $\Gamma_4^{(0)} = (0, 5)$ и ребра $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$. Вершинам $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_4^{(0)}$ соответствуют алгебраические укороченные уравнения. Они не дают решений согласно замечанию 1.1 из [1].

Вершине $\Gamma_3^{(0)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$-z_0^2 w^2 w'' + \frac{3}{2}z_0^2 w(w')^2 = 0 \quad (3)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{-(1, r) | -1 < r < 0\}$. Подставляя $w = c_r t^r$ в уравнение (3), получаем, что $r = 0$ или $r = -2$; такие r не лежат в нормальном конусе $\mathbf{U}_3^{(0)}$, и решений, соответствующих вершине

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

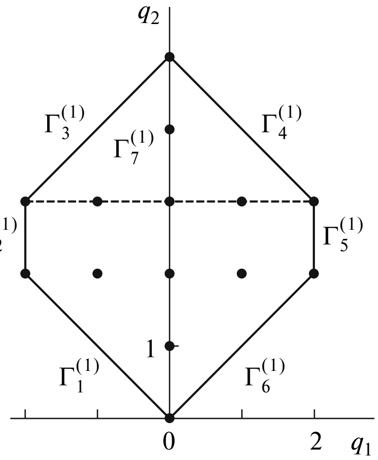

Рис. 1. Носитель $\mathbf{S}(f)$ уравнения (2) и многоугольник $\Gamma(f)$ в случае $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ (сплошные линии). Пунктиром изображено горизонтальное ребро $\Gamma_7^{(1)}$, которое появляется вместо ребер $\Gamma_3^{(1)}$ и $\Gamma_4^{(1)}$ в случае $\beta\gamma\delta \neq 0$, $\alpha = 0$.

$\Gamma_3^{(0)}$, нет. Аналогично получаем, что нет АРР уравнения (1), соответствующих вершине $\Gamma_2^{(0)}$.

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(t, w) \stackrel{\text{def}}{=} z_0^2 ww'' - \frac{1}{2}z_0^2(w')^2 - \beta = 0 \tag{4}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(-1, -1), \lambda > 0\}$. Подставляя $w = c_1 t$ в уравнение (4), получаем, что $w_j = (-1)^j \dfrac{\sqrt{-2\beta}t}{z_0}$, $j = 1, 2$. Полученное решение подставляем в первую вариацию $\delta\hat{f}_1^{(1)}/\delta w$, получаем оператор $\mathcal{L}_j = z_0^2 c_{1j}\left(t\dfrac{d^2}{dt^2} - \dfrac{d}{dt}\right)$, характеристический многочлен которого равен $c_{1j}z_0^2 k(k-2)$ (корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 2$). В конусе задачи $\mathcal{K} = \{k > 1\}$ лежит только корень $k = 2$, это единственное критическое число. Условие совместности [1] выполнено. Итак, получаем семейства АРР уравнения (1)

$$\mathbb{O}_{1,2}\colon w = (-1)^j\frac{\sqrt{-2\beta}}{z_0}(z - z_0) + \sum_{s=2}^{\infty} c_{sj}(z - z_0)^s, \quad j = 1, 2, \tag{5}$$

где c_{2j} – произвольные постоянные. Разложения существуют при $\beta \neq 0$. Аналогично имеем, что ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствуют два семейства АРР уравнения (1)

$$\mathbb{O}_{3,4}\colon w = (-1)^j\frac{z_0}{\sqrt{2\alpha}(z - z_0)} + \sum_{s=0}^{\infty} c_{sj}(z - z_0)^s, \quad j = 3, 4, \tag{6}$$

где c_{0j} – произвольные постоянные. Разложения существуют при $\alpha \neq 0$.

З а м е ч а н и е. Здесь и далее коэффициенты c_s и c_{sj}, $j = 1, 2, ..., 7$, о которых не сказано, что они являются произвольными, постоянны и однозначно определены (могут быть получены как решения системы линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем).

Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)}(t, w) \stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} z_0^2 ww'' - \frac{1}{2}z_0^2(w')^2 - z_0^2 w^2 w'' + \frac{3}{2}z_0^2 w(w')^2 = 0 \tag{7}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{\lambda(-1, 0), \lambda > 0\}$. Подставляя $w = c_0$ в уравнение (7), получаем тождество. Подставив $w = c_0$, $c_0 \neq 0$ в первую вариацию $\dfrac{\delta\hat{f}_2^{(1)}}{\delta w}$, получаем оператор $\mathcal{L}_5 = z_0^2 c_0(1 - c_0)\dfrac{d^2}{dt^2}$, который равен нулевому только при $c_0 = 1$ ($c_0 \neq 0$ по условию), поэтому случай $c_0 = 1$ будет рассмотрен отдельно в разделе 3. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_5$ равен $c_0(1 - c_0)z_0^2 k(k-1)$ (корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$). В конусе задачи $\mathcal{K} = \{k > 0\}$ лежит только корень $k = 1$, это единственное критическое число. Условие совместности [1] выполнено. Итак, получаем семейство АРР уравнения (1)

$$\mathbb{O}_5\colon w = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(z - z_0)^s, \tag{8}$$

где $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные, $c_0 \neq 0$, $c_0 \neq 1$. Разложение существует при всех значениях параметров уравнения α, β, γ, δ.

3. СЛУЧАЙ $c_0 = 1$

Найдем разложения решений уравнения (2), первый член которых равен 1. Для этого в уравнении (2) сделаем замену $w = 1 + v$, получим уравнение

$$g(t, v) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, 1 + v) = 0, \tag{9}$$

будем искать его разложения решений, такие что $v = o(t)$, $t \to 0$.

3.1. П о д с л у ч а й $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$. При $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (9), многоугольник $\Gamma(g)$ с ребрами $G_j^{(1)}$, $j = 1, 2, ..., 6$, изображены на рис. 2. Поскольку мы рассматриваем случай $t \to 0$, $v \to 0$, то

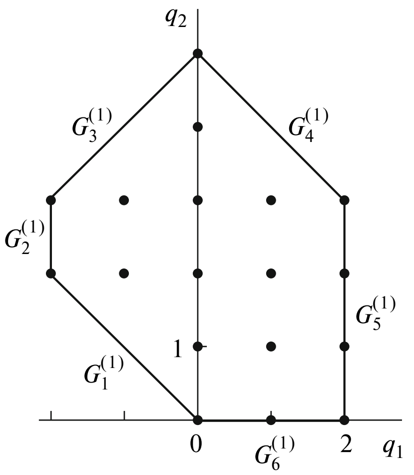

Рис. 2. Носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (9) и многоугольник $\Gamma(g)$ с ребрами $G_j^{(1)}$ в случае $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$.

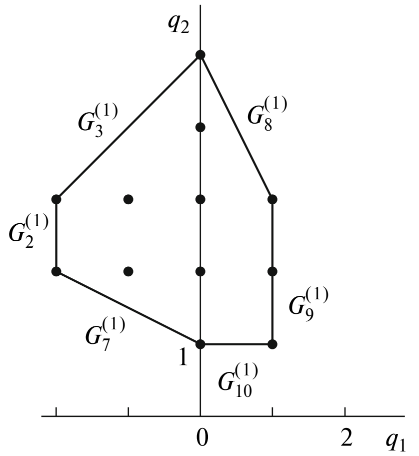

Рис. 3. Носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (9) и многоугольник $\Gamma(g)$ с ребрами $G_j^{(1)}$ в случае $\beta\gamma\delta \neq 0$, $\delta = 0$.

конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0, p_2 \leq 0\}$, т.е. нас интересуют только вершины $G_1^{(0)} = (0, 0)$, $G_2^{(0)} = (-2, 2)$ и ребра $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ и $G_6^{(1)}$.

Вершине $G_1^{(0)}$ соответствует алгебраическое укороченное уравнение $(\alpha + \beta)v^3 = 0$, которое не дает решений.

Вершине $G_2^{(0)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$-z_0^2 v v'' + z_0^2 (v')^2 = 0 \tag{10}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_2^{(0)} = \{-(1, r) | 0 < r < 1\}$. Подставляя $v = c_r t^r$ в уравнение (10), получаем, что $r = 0$; такое r не лежит в нормальном конусе $\tilde{\mathbf{U}}_2^{(0)}$, поэтому решений, соответствующих вершине $G_2^{(0)}$, нет. Вершина $G_2^{(0)}$ является резонансной для ребра $G_2^{(1)}$, значит, ребру $G_2^{(1)}$ могут соответствовать разложения, содержащие $\ln t$.

Ребру $G_1^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{g}_1^{(1)}(t, v) \stackrel{\text{def}}{=} 2\delta z_0^2 - z_0^2 v v'' + z_0^2 (v')^2 = 0 \tag{11}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \{\lambda(-1, -1), \lambda > 0\}$. Подставляя $v = c_1 t$ в уравнение (11), получаем, что $v_{1,2} = \pm\sqrt{-2\delta}\, t$. Это решение подставляем в первую вариацию $\frac{\delta \hat{g}_1^{(1)}}{\delta v}$. Получаем оператор $z_0^2 c_0\left(-t\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt}\right)$, характеристический многочлен которого равен $-c_0 z_0^2 k(k-3)$ (корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 3$). В конусе задачи $\mathcal{K} = \{k > 0\}$ лежит только корень $k = 3$, это единственное критическое число. Условие совместности [1] выполнено. Итак, получаем семейства АРР уравнения (1):

$$\mathcal{O}_{6,7}\colon w = 1 + (-1)^j \sqrt{-2\delta}(z - z_0) + \sum_{s=2}^{\infty} c_{sj}(z - z_0)^s, \quad j = 6, 7, \tag{12}$$

где $c_{2j} = -\frac{\gamma}{2z_0} - \delta + \frac{(-1)^j\sqrt{-2\delta}}{2z_0}$, c_{3j} — произвольная постоянная. Разложения существуют при $\delta \neq 0$.

Ребру $G_2^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$-z_0^2(1 + v) v v'' + z_0^2\left(\frac{3v}{2} + 1\right)(v')^2 = 0 \tag{13}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_2^{(1)} = \{\lambda(-1, 0), \lambda > 0\}$. Уравнение (13) получается из уравнения (7) в результате подстановки $w = 1 + v$. Найдем теперь решения $v \to 0$ при $t \to 0$, соответствующие ребру $G_2^{(1)}$. Решив уравнение (13), получаем $v = \text{const}$ и $v = -1 + \operatorname{cth}^2(Ct + D)$, где $C, D = \text{const}$. Если решение $v \neq 0$, то при $t \to 0$ оно не стремится к нулю, т. е. решения уравнения (13) не подходят.

Ребру $G_6^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $2\delta(t + z_0)^2 = 0$, которое не дает решений.

3.2. Подслучай $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $\delta = 0$. При $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (9), многоугольник $\Gamma(g)$ с ребрами $G_j^{(1)}$, $j = 2, 3, 7$–10, изображены на рис. 3. Поскольку мы рассматриваем случай $t \to 0$,

$v \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \le 0, p_2 \le 0\}$, т.е. нас интересуют только вершины $G_1^{(0)} = (0, 1)$, $G_2^{(0)} = (-2, 2)$ и ребра $G_2^{(1)}$, $G_7^{(1)}$ и $G_{10}^{(1)}$.

Вершине $G_1^{(0)}$ соответствует алгебраическое укороченное уравнение, которое не дает решений. Вершине $G_2^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение (10), ребру $G_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (13). Ранее мы выяснили, что им не соответствуют никакие разложения решений. Ребру $G_{10}^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $\gamma(t + z_0)v = 0$, которое имеет однократное решение $v = 0$, т.е. $w = 1$. Оно является решением уравнения (2), но не является решением уравнения (1), ибо (2) получено умножением уравнения (1) на $w - 1$.

Ребру $G_7^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{g}_7^{(1)}(t, v) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma z_0 v - z_0^2 v v'' + z_0^2 (v')^2 = 0 \qquad (14)$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_7^{(1)} = \{\lambda(-1, -2), \lambda > 0\}$. Подставляя $v = c_2 t^2$ в уравнение (14), получаем, что $v = -\dfrac{\gamma t^2}{2z_0}$. Это решение подставляем в первую вариацию $\dfrac{\delta \hat{g}_7^{(1)}}{\delta v}$, получаем оператор $\gamma z_0\left(\dfrac{1}{2}t^2\dfrac{d^2}{dt^2} - 2\dfrac{d}{dt} + 2\right)$, характеристический многочлен которого равен $\dfrac{\gamma}{2z_0}(k-1)(k-4)$ (корни $k_1 = 1$ и $k_2 = 4$). В конусе задачи $\mathcal{K} = \{k > 2\}$ лежит только корень $k = 4$, это единственное критическое число. Условие совместности [1] выполнено. Таким образом, получаем семейство АРР уравнения (1)

$$\mathcal{O}_8\colon w = 1 - \frac{\gamma}{2z_0}(z - z_0)^2 + \sum_{s=4}^{\infty} c_s (z - z_0)^s, \qquad (15)$$

где c_4 – произвольная постоянная, которое существует при $\gamma \ne 0, \delta = 0$.

3.3. П о д с л у ч а й $\alpha\beta \ne 0, \gamma = \delta = 0$. При $\gamma = \delta = 0$ аналогичные предыдущим выкладки показывают, что новых АРР уравнения (2), таких что $v \to 0$ при $t \to 0$, не получаем. Однако уравнение (11) имеет двукратное решение $v = 0$, которому соответствует особое решение уравнения (1) $\mathcal{I}_1$: $w = 1$. Также заметим, что пятое уравнение Пенлеве (1) при данных значениях параметров может быть проинтегрировано явно, что сделано, например, в [2].

4. СЛУЧАИ $\alpha = 0$ И $\beta = 0$

При $\alpha = 0$, $\beta\gamma\delta \ne 0$ носитель $\mathbf{S}(f)$ уравнения (2), многоугольник $\Gamma(f)$ с ребрами $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_5^{(1)}$, $\Gamma_6^{(1)}$ и с ребром $\Gamma_7^{(1)}$ (штриховая линия) изображены на рис. 1. Поскольку теперь высота многоугольника $\Gamma(f)$ меньше, чем при $\alpha \ne 0$, то полагаем, что уравнение (1) имеет при $\alpha = 0$ особое решение $\mathcal{I}_2$: $w = \infty$. Мы рассматриваем случай $t \to 0$, поэтому конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \le 0\}$, т.е. нас интересуют только вершины $\Gamma_1^{(0)} = (0, 0)$, $\Gamma_2^{(0)} = (-2, 2)$, $\Gamma_3^{(0)} = (-2, 3)$ и ребра $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_7^{(1)}$.

Разложения, соответствующие вершинам $\Gamma_1^{(0)}$, $\Gamma_2^{(0)}$ и ребрам $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$ не изменятся по сравнению со случаем $\alpha \ne 0$.

Рассмотрим вершину $\Gamma_3^{(0)}$. Ей соответствует укороченное уравнение (3) и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{-(1, r) | r < 0\}$. Подставляя $w = c_r t^r$ в уравнение (3), получаем, что $r = 0$ или $r = -2$; только $r = -2$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_3^{(0)}$. Подставляем $w = c_{-2}t^{-2}$ в первую вариацию $\dfrac{\delta \hat{f}_3^{(0)}}{\delta w}$, получаем оператор $\mathcal{L}_9 = -c_{-2}^2 t^{-6} z_0^2\left(t^2\dfrac{d^2}{dt^2} + 6t\dfrac{d}{dt} + 6\right)$, характеристический многочлен которого равен $-c_{-2}^2 z_0^2 (k+2)(k+3)$ (корни $k_1 = -2$ и $k_2 = -3$). Ни один из корней k_1 и k_2 не лежит в конусе задачи $\mathcal{K} = \{k > -2\}$, т.е. критических чисел нет. Условие совместности [1] выполнено. Таким образом, получаем семейство АРР уравнения (1)

$$\mathcal{O}_9\colon w = \sum_{s=-2}^{\infty} c_s (z - z_0)^s, \qquad (16)$$

где c_{-2} – произвольная постоянная. Разложение существует при $\alpha = 0$.

Ребро $\Gamma_7^{(1)}$ горизонтально, поэтому сделаем в соответствующем ему укороченном уравнении замену $\ln w = \eta$, сократим на w^3, получим уравнение

$$-(t+z_0)^2\left(\eta'' - \frac{(\eta')^2}{2}\right) - (t+z_0)\eta' + \beta + \gamma(t+z_0) + \delta(t+z_0)^2 = 0, \qquad (17)$$

носитель которого изображен на рис. 4. Поскольку мы рассматриваем случай $t \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \le 0, p_2 \ge 0\}$, т.е. нас интересуют только вершина $\Phi_4^{(0)} = (-2, 2)$ и ребра $\Phi_4^{(1)}$ и $\Phi_5^{(1)}$.

Вершине $\Phi_4^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение $\frac{z_0^2(\eta')^2}{2} = 0$. Его решения $\eta = \mathrm{const}$ не подходят, так как мы ищем решения $\eta \to \infty$ при $t \to 0$.

Ребру $\Phi_4^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $-z_0^2\left(\eta'' - \frac{(\eta')^2}{2}\right) = 0$. Его решения $\eta = -2\ln\left(-\frac{t}{2} + C\right) + D$ при $C \neq 0$ не подходят (см. рассуждения выше), а при $C = 0$ получаем первый член разложения (16).

Ребру $\Phi_5^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $\frac{(t+z_0)^2(\eta')^2}{2} = 0$. Его решения $\eta = \mathrm{const}$ не подходят (см. рассуждения выше).

Проведя в случае $\beta = 0$ рассуждения, аналогичные описанным выше, получаем, что разложения, соответствующие вершинам $\Gamma_3^{(0)}$, $\Gamma_4^{(0)}$ и ребрам $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$, останутся теми же, что и в случае $\beta \neq 0$, а вершине $\Gamma_2^{(0)}$ соответствует семейство АРР уравнения (1)

$$\mathcal{O}_{10};\ w = \sum_{s=2}^{\infty} c_s (z - z_0)^s, \tag{18}$$

где c_2 – произвольная постоянная. Разложение существует при $\beta = 0$. Кроме того, уравнение (1) имеет при $\beta = 0$ особое решение $\mathcal{J}_3$: $w = 0$.

5. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ И СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ

Т е о р е м а 1. *В окрестности неособой точки уравнения* (1) *имеется* 10 *семейств асимптотических разложений его решений*:

$\mathcal{O}_{1,2}$ (5), *которые существуют при* $\beta \neq 0$;

$\mathcal{O}_{3,4}$ (6), *которые существуют при* $\alpha \neq 0$;

$\mathcal{O}_5$ (8), *которое существует при всех значениях параметров*;

$\mathcal{O}_{6,7}$ (12), *которые существуют при* $\delta \neq 0$;

$\mathcal{O}_8$ (15), *которое существует при* $\delta = 0, \gamma \neq 0$;

$\mathcal{O}_9$ (16), *которое существует при* $\alpha = 0$;

$\mathcal{O}_{10}$ (18), *которое существует при* $\beta = 0$.

Семейство $\mathcal{O}_5$ *двухпараметрическое, остальные семейства однопараметрические.*

Теорема 1 следует из вычислений, проведенных в разделах 1–4.

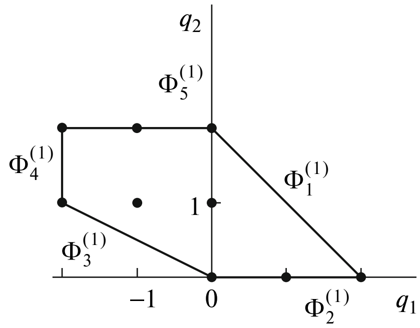

Рис. 4. Носитель уравнения (17) и его многоугольник с ребрами $\Phi_j^{(1)}$.

Семейства разложений $\mathcal{O}_j, j = 1$–$4, 9, 10$, были известны [3]. Семейства разложений $\mathcal{O}_j$, $j = 1, 2, ..., 7$, имеются в работе [4]. Для семейств разложений $\mathcal{O}_6$ и $\mathcal{O}_7$ в работе [4] указано, что коэффициент c_{3j}, $j = 6, 7$, произволен. Мы впервые указываем семейство разложений $\mathcal{O}_8$, где коэффициент c_4 произволен.

Уравнение (1) инвариантно относительно замены

$$(z, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\tilde{z}, \frac{1}{\tilde{w}}, -\tilde{\beta}, -\tilde{\alpha}, -\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}\right). \tag{19}$$

Л е м м а 1. *При замене* (19) *семейства асимптотических разложений* $\mathcal{O}_i$ *уравнения* (1) *перейдут в семейства* $\mathcal{O}_j$, *а особые решения* $\mathcal{J}_k$ – *в решения* $\mathcal{J}_l$. *Соответствие между номерами* i *и* j, *а также соответствие между* k *и* l *приведены в табл.* 1.

Доказательство очевидно.

Т е о р е м а 2. *Разложения* $\mathcal{O}_j$, $j = 1, 2, 5$–$8, 10$, *сходятся в окрестности* $z = z_0$, *а разложения* $\mathcal{O}_3$, $\mathcal{O}_4$, $\mathcal{O}_9$ *сходятся в проколотой окрестности точки* $z = z_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала сходимость разложения $\mathcal{O}_5$ (доказательство сходимости разложений $\mathcal{O}_j, j = 1, 2, 6, 7, 8, 10$, проводится аналогично).

В уравнении (1) сделаем замену $z = t + z_0$, $w = c_0 + c_1 t + p(t)$, где $p(0) = 0$, $p'(0) = c_1$ и $c_0 \neq 0$, $c_0 \neq 1$, получим уравнение

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j	3	4	1	2	5	6	7	8	10	9
k	1	2	3							
l	1	3	2							

$$p'' = \left(\frac{1}{2(c_0+c_1t+p)} + \frac{1}{c_0+c_1t+p-1}\right)(c_1+p')^2 -$$
$$- \frac{c_1+p'}{t+z_0} + \frac{(c_0+c_1t+p-1)^2}{(t+z_0)^2}\left(\alpha(c_0+c_1t+p) + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta}{c_0+c_1t+p}\right) + \frac{\gamma(c_0+c_1t+p)}{t+z_0} +$$
$$+ \frac{\delta(c_0+c_1t+p)(c_0+c_1t+p+1)}{c_0+c_1t+p-1}. \qquad (20)$$

Сформулируем теорему Коши для уравнений второго порядка, разрешенных относительно старшей производной (см., например, [5]). Пусть

$$y'' = \varphi(t, y, y'), \qquad (21)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \qquad (22)$$

и функция $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ аналитична по (u_1, u_2, u_3) в окрестности точки (t_0, y_0, y'_0), тогда существует единственное решение $y(t)$ задачи Коши (21), (22), причем это решение является аналитической функцией в окрестности точки t_0.

Теорему Коши применим к уравнению (20) (все слагаемые в правой части уравнения являются аналитическими функциями в окрестности точки $(t_0, y_0, y'_0) = (0, 0, c_1)$), поэтому разложение $\mathbb{O}_5$ сходится в окрестности точки $t = 0$, т.е. $z = z_0$.

Докажем сходимость разложения $\mathbb{O}_3$ (доказательство сходимости разложений семейств $\mathbb{O}_4$ и $\mathbb{O}_9$ проводится аналогично). По лемме 1 семейство $\mathbb{O}_3$ получается из семейства $\mathbb{O}_1$ при помощи замены (19). Зафиксируем некоторый набор параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Выше доказано, что $w_1(z, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta)$ сходится в окрестности точки $z = z_0$, причем w_1 представляется в окрестности точки $z = z_0$ рядом Тейлора (5). Если исходить из вида этого ряда, то функция $\tilde{w}_1 = \dfrac{w_1}{z - z_0}$ также сходится в окрестности точки $z = z_0$, $\tilde{w}_1(z_0) \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$w_3(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{w_1(z, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta)} =$$
$$= \frac{1}{(z - z_0)\tilde{w}_1(z, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta)},$$

функция $\tilde{w}_1(z, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta)$ аналитична в окрестности точки $z = z_0$, в точке $z = z_0$ в нуль не обращается, поэтому $w_3(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ в проколотой окрестности точки $z = z_0$ разлагается в сходящийся ряд Лорана (имеет полюс первого порядка). Доказательство закончено.

Впрочем, теорема 2 легко выводится из теоремы 1.7.2 работы [2].

Предварительный подробный вариант этой работы – препринт [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11–01–00023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.Д.* // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.
2. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* // Тр. ММО. 2010. Т. 71. С. 6–118.
3. *Gromak V.I., Laine I., Shimomoura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. B.; N.Y.: Walter de Gruyter, 2002. 303 p.
4. *Karulina E.S.* // J. Math. Sci. 2007. V. 145. № 5. P. 5252–5259.
5. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 436 с.
6. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Разложения решений пятого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки. Препр. № 18. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2011. 16 с.