ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

1. Введение. Для решения задачи о потере устойчивости тонких пологих оболочек под действием безмоментных усилий в ряде случаев применим так называемый локальный подход. Коэффициенты системы уравнений устойчивости считаются постоянными ("замораживаются"), а граничные условия игнорируются. Этот подход применим в тех случаях, когда деформация при потере устойчивости носит локальный характер, а закрепление края не является слабым(см. [1])

Локальная устойчивость оболочек при отсутствии основания. В статье [2] рассматривается локальный подход в случае отсутствия начальных усилий сдвига, в работе [3] исследован общий случай локальной потери устойчивости пологих оболочек. В книге [4] рассмотрен общий вид уравнений равновесия тонких оболочек, и исследуется вопрос их устойчивости как для локального подхода, так и в других случаях, когда локальный подход неприменим.

Локальная устойчивость оболочек при наличии упругого основания. В статье [5] исследуется устойчивость пластин из ориентированных стеклопластиков, покоящихся на упругом винклеровском основании. В работе [6] рассматривается устойчивость тонких пластин и пологих трансверсально изотропных оболочек, лежащих на упругом основании и находящихся под действием безмоментных начальных усилий. Цель настоящей статьи — обобщить некоторые результаты, содержащиеся в работе [6], на случай ортотропных оболочек.

2. Постановка задачи. Рассматривается полая ортотропная оболочка на упругом винклеровском основании, находящаяся под действием безмоментных начальных усилий. Предполагается справедливость гипотез Кирхгоффа-Лява, а также соотношений технической теории оболочек(см. [4]). Требуется получить общий вид уравнений устойчивости и выражение для критической нагрузки, а также вычислить критическую нагрузку и найти форму вмятин в конкретном примере. В качестве такового берется сферическая оболочка из однонаправленного стеклопластика.

3. Уравнения устойчивости пологих ортотропных оболочек на упругом основании. Введем на срединной поверхности рассматриваемой оболочки криволинейную систему координат α, β , совпадающую с линиями главных кривизн. Пусть A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны. Определим новые координаты и параметры кривизны следующим образом: $x = \alpha A, y = \beta B, k_i = 1/R_i$ ($i=1,2$). Тогда система уравнений равновесия для полой ортотропной оболочки на упругом основании в проекциях на орты после деформации будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + q_1 &= 0, \quad \{1, 2\} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + (k_1 + \varkappa_1)T_1 + 2\tau S + (k_2 + \varkappa_2)T_2 + q_n + P &= 0, \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + Q_1 &= 0 \quad \{1, 2\} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь T_1, T_2, S — тангенциальные усилия, Q_1, Q_2 — перерезывающие усилия, M_1, M_2, H — изгибающие и крутящий моменты, q_1, q_2, q_n — проекции интенсивности внешней нагрузки, отнесенные к единице площади срединной поверхности, P — реакция основания,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{E_1 h (\varepsilon_1 + \nu_{21} \varepsilon_2)}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, & M_1 &= \frac{E_1 h^3 (\varkappa_1 + \nu_{21} \varkappa_2)}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} & \{1, 2\} \\ S &= G_{12} h \omega, & H &= \frac{G_{12} h^3 \tau}{6} \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_1 w, & \varkappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \{1, 2\} \\ \omega &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}, & \tau &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

h — толщина оболочки, u_1, u_2, w — проекции перемещения, G_{12} — модуль сдвига в касательном направлении, ν_{12}, ν_{21} — коэффициенты Пуассона, символ $\{1, 2\}$ означает, что имеет место еще одно соотношение, полученное циклической перестановкой $x, y; 1, 2$.

Полагая нагрузку следящей, заменим каждую из входящих в систему (1) неизвестных функций u_1, u_2, w , суммами двух слагаемых $u_1^0 + u_1, u_2^0 + u_2, w^0 + w$, где первые слагаемые — функции, соответствующие исследуемому напряженному состоянию, а вторые — их малые вариации. Производя линеаризацию, получаем следующую систему уравнений устойчивости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, & \{1, 2\} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + k_1 T_1 + k_2 T_2 + T_1^0 \varkappa_1 + 2S^0 \tau + T_2^0 \varkappa_2 + P &= 0, & (2) \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + Q_1 &= 0 & \{1, 2\} \end{aligned}$$

где $\{T_1^0, T_2^0, S^0\} = -\lambda \{t_1, t_2, t_3\}$, T_1^0, T_2^0, S^0 — начальные усилия, λ — параметр нагружения. Величины t_1, t_2, t_3 являются безразмерными и имеют порядок единицы. Введем функцию усилий Φ таким образом, чтобы удовлетворялись первые два уравнения системы (2):

$$T_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Тогда (2) преобразуется в следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1 h} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{E_2 h} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{12} h} - \frac{\nu_{12}}{E_2 h} - \frac{\nu_{21}}{E_1 h} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \Delta_k w &= 0 \\ - \frac{h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left(E_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (2E_\nu + 4G_{12}(1 - \nu_{12} \nu_{21})) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + & (3) \\ + \Delta_k \Phi + \Delta_T w + P &= 0 \end{aligned}$$

Здесь $E_\nu = E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$, $\Delta_k = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta_T = T_1^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + T_2^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Будем искать решения (3) в виде

$$w = w_0 e^{iz}, \quad \Phi = \Phi_0 e^{iz}, \quad z = \frac{px + qy}{R}$$

где R — характерный линейный размер серединной поверхности (например, радиус кривизны). Согласно модели винклеровского основания с коэффициентом постели, зависящим от волнообразования, рассмотренной в [7], для прогиба w , имеющего вышеуказанный вид, реакция основания равна $P = -\frac{E_0 a_2 r w}{R}$, где $r = \sqrt{p^2 + q^2}$, E_0, ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона основания соответственно, $a_2 = \frac{2(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(3-4\nu_0)}$. Выражая параметр нагружения из (3) и полагая $\rho_i = Rk_i$ ($i = 1, 2$), $h_* = \frac{h}{R}$, $p = r \cos \varphi$, $q = r \sin \varphi$ получаем:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda}{h} = \frac{1}{f_T(\varphi)} \left(\frac{f_R(\varphi)}{r^2 f_1(\varphi)} + h_*^2 r^2 f_2(\varphi) + \frac{E_0 a_2}{h_* r} \right)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= \frac{\sin^4 \varphi}{E_1} + \frac{\cos^4 \varphi}{E_2} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{\nu_{12}}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ f_2(\varphi) &= \frac{E_1 \cos^4 \varphi + E_2 \sin^4 \varphi + (2E_\nu + 4G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\ f_R(\varphi) &= (\rho_2 \cos^2 \varphi + \rho_1 \sin^2 \varphi)^2, \quad f_T(\varphi) = t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \cos \varphi \sin \varphi + t_2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Пусть $E_2 = c_1 E_1$, $G_{12} = c_2 E_1$, $r = \frac{s}{h_*^{1/2}}$, $\omega = \frac{E_0 a_2}{E_1 h_*^{3/2}}$, $\Lambda_2 = \frac{\Lambda_1}{E_1 h_*}$. Тогда

$$\Lambda_2(s, \varphi, \omega) = \frac{1}{f_T(\varphi)} \left(\frac{f_R(\varphi)}{s^2 f_3(\varphi)} + s^2 f_4(\varphi) + \frac{\omega}{s} \right)$$

где

$$\begin{aligned} f_3(\varphi) &= \sin^4 \varphi + \frac{\cos^4 \varphi}{c_1} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{\nu_{12}}{c_1} - c_1 \nu_{12} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ f_4(\varphi) &= \frac{\cos^4 \varphi + c_1 \sin^4 \varphi + (2c_1 \nu_{12} + 4c_2(1 - c_1 \nu_{12}^2)) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{12(1 - c_1 \nu_{12}^2)} \end{aligned}$$

Критическое значение параметра нагружения получаем после минимизации функции $\Lambda_2(s, \varphi, \omega)$ по переменным s, φ :

$$\Lambda_{2*}(\omega) = \min_{s, \varphi}^+ \Lambda_2(s, \varphi, \omega) = \Lambda_2(s_*, \varphi_*, \omega)$$

где знак $^+$ говорит о том, что ищется положительный минимум, а звездочка указывает на критические значения соответствующих величин. Предполагается также, что существуют такие φ , при которых $f_T(\varphi) > 0$.

4. Пример. В качестве примера рассмотрим сферическую оболочку из однонаправленного стеклопластика, имеющего механические характеристики [8]: $E_1 = 5.27 * 10^4$ МПа, $E_2 = 1.19 * 10^4$ МПа, $G_{12} = 5.62 * 10^3$ МПа, $\nu_{12} = 0.25$. В данном случае $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $c_1 = 0.226$, $c_2 = 0.107$. При однородном сжатии сферы (случай 1) $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 0$, при чистом сдвиге (случай 2) $t_1 = t_2 = 0$ и $t_3 = 1$, при сжатии

вдоль направления α (случай 3) $t_1 = 1, t_2 = t_3 = 0$, и, наконец, при сжатии вдоль направления β (случай 4) $t_2 = 1, t_1 = t_3 = 0$. Проведем сравнительный анализ параметра критической нагрузки $\Lambda_{2*}(\omega)$, параметра волнообразования $s_*(\omega)$ и угла наклона вмятин $\varphi_*(\omega)$ для нагружений, имеющих место в случаях в случаях 1 — 4.

4.1. Критическая нагрузка. Зависимость параметра критической нагрузки Λ_{2*} от коэффициента жесткости основания ω при однородном сжатии (1), чистом сдвиге (2), сжатии вдоль направлений α (3) и β (4) отражена на рис. 1 и в таблице 1. Как видно из них, критическая нагрузка принимает наибольшее значение при сжатии оболочки вдоль направления α . Так, для $\omega = 0$ эта критическая нагрузка в 1,1 раза превосходит ту, что имеет место при сжатии вдоль β , для $\omega = 0,9$ их отношение возрастает до 1,47. В случае отсутствия основания ($\omega = 0$) меньше всего отличаются друг от друга критические нагрузки при однородном сжатии и чистом сдвиге (их отношение $\approx 0,97$). При $\omega = 0,9$ ближе всего друг к другу подходят критические нагрузки 1 и 4 (однородное сжатие и сжатие вдоль β). Их отношение становится приблизительно равным 0,96, в то время как для однородного сжатия и чистого сдвига оно уменьшается до 0,89. Наибольшее влияние жесткости основания на критическую нагрузку имеет место при однородном сжатии вдоль наиболее прочной параллели α (при возрастании ω с 0 до 0,9 она увеличивается приблизительно в 3,05 раза). Далее следует чистый сдвиг (2,99 раза), затем — однородное сжатие (2,74), и, наконец, сжатие вдоль слабой параллели β (2,28).

Рис.1.

Таблица 1.

ω	1	2	3	4
0	0.201	0.207	0.276	0.251
0,3	0.338	0.363	0.491	0.378
0,6	0.451	0.497	0.675	0.481
0,9	0.551	0.618	0.841	0.572

4.2. Параметр волнообразования. Теперь рассмотрим зависимость параметра волнообразования s_* от ω (рис. 2 и таблица 2). Как мы видим, параметр волнообразования монотонно возрастает с увеличением ω . Наибольшее значение он принимает при сжатии вдоль β (возрастает с 2,31 при $\omega = 0$ до 3,39 при $\omega = 0,9$), а наименьшим является в случае сжатия вдоль α (возрастает с 1,28 при $\omega = 0$ до 1,89 при $\omega = 0,9$). Между

ними лежат его значения при чистом сдвиге (с 1,76 при $\omega = 0$ до 2,67 при $\omega = 0,9$) и однородном сжатии (с 1,92 при $\omega = 0$ до 3,14 при $\omega = 0,9$)

Рис.2.

Таблица 2.

ω	1	2	3	4
0	1.916	1.758	1.279	2.311
0,3	2.461	2.137	1.523	2.808
0,6	2.841	2.429	1.722	3.155
0,9	3.141	2.671	1.889	3.391

4.3. Угол наклона вмятин. Вмятины, образовавшиеся при потере устойчивости, наклонены к оси β под углом $-\varphi_*$. Зависимость φ_* от ω отображена на рис. 3 и в таблице 3. В случае сжатия вдоль α угол наклона вмятин φ_* равен нулю, то есть вмятины всегда вытянуты вдоль β . При сжатии вдоль β угол φ_* монотонно возрастает от 1,22 при $\omega = 0$ пока не становится равным $\frac{\pi}{2}$ при $\omega \geq 0,7$. В этом случае вмятины вытягиваются вдоль α . Угол наклона вмятин меняется в случае чистого сдвига с 0,85 при $\omega = 0$ до 0,91 при $\omega = 0,9$, а в случае однородного сжатия — с 0,97 при $\omega = 0$ до 1,23 при $\omega = 0,9$.

Рис.3.

Таблица 3.

ω	1	2	3	4
0	0.967	0.852	0.000	1.220
0,3	1.106	0.887	0.000	1.361
0,6	1.178	0.900	0.000	1.481
0,9	1.225	0.905	0.000	1.571

Литература

1. Товстик П.Е. Потеря устойчивости тонких оболочек, связанная со слабым закреплением края // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астрон. 1991. №3. С. 76 — 81
2. Работнов Ю. Н. Локальная устойчивость оболочек // Докл. АН СССР. 1946. т. 52. №2. С. 111–112.
3. Ширшов В. П. Локальная устойчивость оболочек // Труды второй всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Киев, 1962. С. 314–317.
4. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. М., Наука. 1995.
5. Пелех Б.Л., Тетерс Г.А., Мельник Р.В. Об устойчивости стеклопластиковых пластинок, связанных с упругим основанием // Механика полимеров. 1968. №6. С. 1082–1088
6. Товстик П. Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Известия РАН. 2005. Вып.1. С. 147–160.
7. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М.,Наука. 1977.
8. Чамис К. Анализ и проектирование конструкций. Т.7 М., Машиностроение, 1978.

Summary

A. V. Miheev. Research of local stability of shallow orthotropic shells on elastic base

In this work we consider the task of stability of shallow orthotropic shell on elastic base. The dependence of critical load parameter on constants of shell's elasticity and rigidity of base is considered. As example we analyse the case of spherical shell made of unidirectional glass-fiber material.

A. B. Михеев. Исследование локальной устойчивости пологих ортотропных оболочек на упругом основании.

В данной работе рассматривается задача устойчивости пологой ортотропной оболочки, находящейся на упругом основании. Исследуется зависимость параметра критической нагрузки от характеристик упругости оболочки и жесткости основания. В качестве примера анализируется случай сферической оболочки из однонаправленного стеклопластика.

УДК 539.3

Михеев А. В. Исследование локальной устойчивости пологих ортотропных оболочек на упругом основании // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 200 Вып.() С. 00–00.

Исследуется критическая нагрузка для пологой ортотропной оболочки, находящейся на упругом основании. Подробно рассматриваются характеристики потери устойчивости сферической оболочки из однонаправленного стеклопластика при разных видах нагружения. Библиогр. 8 назв. Ил. 3. Табл. 3.