В.Н. Афанасьев, д-р техн. наук

(Московский государственный институт электроники и математики)

УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ

Теоретические основы решения линейно-квадратических задач в ряде случаев могут быть применены при синтезе управляющих воздействий для нелинейных систем. Одним из многообещающих и быстро развивающихся методов для проектирования нелинейных регуляторов является метод, основанный на применении уравнения Риккати, параметры которого зависят от состояния объекта. Неоднозначность представления нелинейной системы в виде системы линейной структуры, но с параметрами, зависящими от состояния, отсутствие достаточно универсальных алгоритмов решения уравнения Риккати, параметры которого также зависят от состояния, порождают множество возможных субоптимальных решений. В работе предложен метод синтеза гарантированного управления для нелинейного неопределенного объекта с параметрами, зависящими от его состояния. Приведен пример построения регулятора для нелинейной неопределенной системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из многообещающих и быстро развивающихся методов для проектирования нелинейных регуляторов является уравнение Риккати, параметры которого зависят от состояния объекта (State Dependent Riccati Equations, SDRE). Впервые, судя по ссылкам, встречающимся в публикациях по использованию метода SDRE в задачах проектирования регуляторов для нелинейных объектов, проблема управления нелинейными объектами при представлении их в виде линейных моделей с параметрами, зависящими от состояния (State Dependent Coefficient, SDC), и функционалами, матрицы штрафа которых также зависят от состояния объекта, была сформулирована в начале 60-х г. 20-го XX в. в [1]. Разработка предложенного в [1] метода была продолжена в [2, 3]. С конца 90-х г. этот метод привлекает все большее внимание ученых и практиков.

Преобразование исходного нелинейного дифференциального уравнения, которое описывает исходную систему управления, в систему с линейной структурой, но с

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-08-00677).

параметрами, зависящими от состояния, и использование квадратичного функционала качества позволяют при синтезе управления осуществить переход от уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Это и составляет основу SDRE-метода синтеза оптимальных нелинейных систем управления.

К настоящему моменту опубликовано достаточно большое количество теоретических работ и примеров успешного использования SDRE-метода при построении систем управления подвижными объектами, производственными и экологическими системами. Известны, например, решения задач управления искусственной человеческой поджелудочной железой, контроля положения космического корабля, управления химическим реактором и др. [4−12].

В рамках 17-го Симпозиума IFAC по автоматическому управлению в космосе - 2007 (Тулуза, Франция) была организована специальная секция, на которой обсуждалось состояние и перспективы развития теории и практики SDRE-метода проектирования управления нелинейными объектами (например, [4 - 6]).

Несмотря на имеющиеся достаточно убедительные примеры применения SDRE-метода, остается множество проблем, связанных с ограничениями, накладываемыми на систему, с неоднозначностью преобразований исходной системы, с построением эффективных алгоритмов решений матричных уравнений Риккати с параметрами, зависящими от состояния, в темпе функционирования системы управления.

В данной статье задача управления нелинейным объектом, подвергающимся воздействию неконтролируемых возмущений, рассматривается в более общем виде, чем известных автору публикациях, а именно в ключе дифференциальной игры, что позволяет обобщить ряд ранее опубликованных теоретических результатов и получить конструктивные решения некоторых постановок задач управления. Такой класс задач принято относить к управлениям с гарантирующим результатом [13, 14].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть нелинейный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t) = f(t,x) + g_1(t,x)w(t) + g_2(t,x)u(t),\ x(0) = x_0,\\
(2.1)\qquad &y(t) = h(t,x),\\
&f,\, g_1,\, g_2 : T\times\Omega \to R^n,\ h: T\times\Omega \to R^m.
\end{aligned}
$$

Здесь $T-$ интервал $[0, T]$; Ω − область (открытое связное множество) R^n, содержащая начало; $x \in R^n$ − состояние системы; $x_0 \in X_0$, X_0- область возможных начальных состояний системы; $y \in R^m$, $m \le n$, − выход системы; $u \in R^r-$ управление, подлежащее нахождению; $w \in R^m-$ неизвестное возмущение; матрицы $f(t,x),\ g_1(t,x),\ g_2(t,x),\ h(t,x)$ действительны и непрерывны. Предполагается, что пара $\langle f(t,x), g_1(t,x)\rangle$ и $\langle f(t,x), g_2(t,x)\rangle$ является управляемой, пара $\langle f(t,x), h(t,x)\rangle$ − наблюдаемой. Кроме того, будем предполагать функции $f(t,x),\ g_1(t,x),\ g_2(t,x),\ h(t,x)$ достаточно гладкими, чтобы через любые $(0,x_0) \in T\times\Omega$ проходило одно и только одно решение (2.1) $x(t,0,x_0)$ и был единственный соответствующий выход системы $y(t) = h(t, x(t,0,x_0))$.

Рассматривая задачу синтеза закона управления как дифференциальную игру двух игроков U и W на интервале $[0, T]$, введем функционал

$$
(2.2)\qquad J(x,u,w) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^T \left\{ x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) - w^T(t)Pw(t) \right\} dt.
$$

Здесь матрица Q может быть положительно полуопределенной; матрицы R, $P-$ положительно определенные. Требования к значениям параметров матриц Q, R, P будут определены далее. Задача заключается в построении оптимальной стратегии с обратной связью для игроков U и W. Ограничения на управляющие воздействия учитываются при назначении матриц P и R.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА: ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Следуя [15], оптимальные стратегии с обратной связью для игроков U и W на интервале $[0, T]$, $T\to\infty$, определяются выражениями:

$$
(3.1)\qquad w(t) = P^{-1}g_1^T(t,x)\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\}^T,\quad u(t) = -R^{-1}g_2^T(t,x)\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\}^T,
$$

где $V(x)$ − положительно определенная функция, отвечающая алгебраическому уравнению Гамильтона-Якоби

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(t,x) + \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left[g_1(t,x) P^{-1} g_1^T(t,x) - g_2(t,x) R^{-1} g_2^T(t,x) \right] \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\}^T = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из условия положительной определенности функционала (2.2) следует, что назначения матриц R и P должны быть такими, чтобы матрица $\left[g_2(t,x) R^{-1} g_2^T(t,x) - g_1(t,x) P^{-1} g_1^T(t,x) \right]$ была, по крайней мере положительно полуопределенной.

Основная трудность реализации управлений в виде (3.1) заключается в нахождении вектора $\partial V(x)/\partial x$, удовлетворяющего скалярному уравнению (3.2). Одним из возможных способов нахождения робастного управления с использованием уравнения (3.2) является метод, основанный на аппроксимации этого уравнения рядом Тейлора вокруг точки равновесия [16]. Однако метод, основанный на представлении неравенства с частными производными с использованием аппроксимации возле точки равновесия, не позволяет получить более общие решения.

4. ОБЪЕКТ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ

Сделаем ряд предположений относительно матриц $f(t,x)$, $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$ и $h(t,x)$. Пусть, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существуют такие δ и T^*, что

$$\begin{aligned} &f(t,x) = \left[A_1(t) + A_2(x) \right] x(t), \\ &g_1(t,x) = G_{11}(t) + G_{12}(x), \ g_1(t,x) = G_{21}(t) + G_{22}(x), \\ &h(t,x) = \left[H_1(t) + H_2(x) \right] x(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$\left\| A_1(t) \right\| \le a_1, \ \left\| G_{11}(t) \right\| \le g_{11}, \ \left\| G_{21}(t) \right\| \le g_{21}, \ \left\| H_1(t) \right\| \le h_1, \ t \in [t_0, T], \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &\left| A_2(x) x(t) \right| \le \varepsilon |x|, \ \left| G_{12}(x) k_w(x) \right| \le \varepsilon |x|, \ \left| G_{22}(x) k_u(x) \right| \le \varepsilon |x|, \ \left| H_2(x) x(t) \right| \le \varepsilon |x|, \\ &\left(|x| \le \delta, \ t \ge T^* \right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $k_w(x) = w(t)$, $k_u(x) = u(t)$ − управления, реализованные с использованием обратной связи.

Из условия (4.3) следует, что

$\left|A_2(x)x(t)\right| = o(\left|x\right|)$, $\left|G_{12}(x)k_w(x)\right| = o(\left|x\right|)$, $\left|G_{22}(x)k_u(x)\right| = o(\left|x\right|)$, $\left|H_2(x)x(t)\right| = o(\left|x\right|)$ при $\left|x\right| \to 0$ равномерно по $t,\ t \ge t_0$ [17]. Таким образом, решение дифференциального уравнения (2.1), тождественно равное нулю, асимптотически устойчиво.

Из условий (4.2) можно сделать вывод, что

$$\begin{aligned} &\underline{A}_1 \le A_1(t) \le \overline{A_1},\ \underline{G}_{11} \le G_{11}(t) \le \overline{G_{11}},\ \underline{G}_{21} \le G_{21}(t) \le \overline{G_{21}}, \\ &\underline{H}_1 \le H_1(t) \le \overline{H}_1,\ t \in [t_0, T], \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} &\left\|A_2(x_0)x(t)\right\| > \left\|A_2(x)x(t)\right\|,\ \left\|G_{21}(x_0)k_w(x)\right\| > \left\|G_{21}(x)k_w(x)\right\|, \\ &\left\|G_{22}(x_0)k_u(x)\right\| > \left\|G_{22}(x)k_u(x)\right\|,\ \left\|H_2(x_0)x(t)\right\| > \left\|H_2(x)x(t)\right\|,\ t > t_0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

или, объединив условия (4.4) и (4.5), будем иметь:

$$\begin{aligned} &\left\|\underline{A}_1 x(t)\right\| < \left\|\left[A_1(t) + A_2(x)\right]x(t)\right\|, < \left\|\left[\overline{A}_1 + A_2(x_0)\right]x(t)\right\| \\ &\left\|\underline{G}_{11} x(t)\right\| < \left[\left\|G_{11}(t) + G_{12}(x)\right\| x(t)\right] < \left\|\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(x_0)\right]x(t)\right\|, \\ &\left\|\underline{G}_{21} x(t)\right\| < \left\|\left[G_{21}(t) + G_{22}(x)\right]x(t)\right\| < \left\|\left[\overline{G}_{21} + G_{22}(x_0)\right]x(t)\right\|, \\ &\left\|\underline{H}_1 x(t)\right\| < \left\|\left[H_1(t) + H_2(x)\right]x(t)\right\| > \left\|\left[\overline{H}_1 + H_2(x_0)\right]x(t)\right\|,\ \ t > t_0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Следует отметить, что представление матриц $f(t,x),\ g_1(t,x),\ g_2(t,x),\ h(t,x)$ в виде (4.1) не является единственным [2, 11].

О п р е д е л е н и е. Представление управляемой и наблюдаемой системы (2.1) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = \left[A_1(t) + A_2(x)\right]x(t) + \left[G_{11}(t) + G_{12}(x)\right]w(t) + \\ &+ \left[G_{21}(t) + G_{22}(x)\right]u(t),\ x(0) = x_0, \\ &y(t) = \left[H_1(t) + H_2(x)\right]x(t) \end{aligned} \tag{4.7}$$

является эквивалентным, если матрицы $\left\langle\left[A_1(t) + A_2(x)\right], \left[G_{11}(t) + G_{12}(x)\right]\right\rangle$ и $\left\langle\left[A_1(t) + A_2(x)\right], \left[G_{21}(t) + G_{22}(x)\right]\right\rangle$ образуют управляемые пары, а матрицы $\left\langle\left[A_1(t) + A_2(x)\right], \left[H_1(t) + H_2(x)\right]\right\rangle$ образуют наблюдаемую пару при всех возможных $(t,x) \in \Omega$.

Пусть количество возможных эквивалентных представлений исходной системы $k \ge 1$. Далее рассмотрим одну из систем вида (4.7), попадающую под введенное определение.

5. СИНТЕЗ ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

Пусть эквивалентная модель системы (2.1) имеет вид (4.7). Определим одну из возможных траекторий при $A^*,\ g_1^*,\ g_2^*,\ H^* = const$. Если

- $f(t,x),\ g_1(t,x),\ g_2(t,x),\ h(t,x)$ измеримы на множестве D при любых фиксированных $A,\ g_1,\ g_2, H$ и x;
- $f(t,x),\ g_1(t,x),\ g_2(t,x),\ h(t,x)$ непрерывны по x при любых фиксированных t и $A,\ g_1,\ g_2, H$;
- при фиксированном t функции $f(t,x),\ g_1(t,x),\ g_2(t,x),\ h(t,x)$ непрерывны по совокупности переменных x и $A,\ g_1,\ g_2, H$,

то существуют функции $m(t)$ и $n(t)$, интегрируемые по Лебегу на интервале $[0,T]$, такие, что если $\left|A^* x(t) + g_1^* k_w(x) + g_2^* k_u(x)\right| = m(t)$ и $\left|H^* x(t)\right| = n(t)$, то

(5.1) $$\left|f(t,x) + g_1(t,x)k_w(x) + g_2(t,x)k_u(x)\right| \ge m(t),\ t \in [t_0, T], \quad \left|h(t,x)\right| \ge n(t).$$

Таким образом, параметры объекта $A^*,\ g_1^*,\ g_2^*, H^*$ можно назвать «наихудшими» в том смысле, что

$$\left|A^* z(t) + g_1^* k_w(z) + g_2^* k_u(z)\right| \le \left|f(t,x) + g_1(t,x)k_w(x) + g_2(t,x)k_u(x)\right|,\ \text{т.е. } \left|z(t)\right| \ge \left|x(t)\right| \text{ и}$$

$$\left|H^* z(t)\right| \ge \left|h(t,x)\right|,\ \text{т.е. } \left|H^* z(t)\right| \ge \left|y(t)\right|.$$

Линейная модель с параметрами $A^*,\ g_1^*,\ g_2^*, H^*$ имеет вид

(5.2) $$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} z(t) = A^* z(t) + g_1^* k_w(z) + g_2^* k_u(z),\ z(0) = x(0), \\ &\mu(t) = H^* z(t). \end{aligned}$$

Перепишем функционал (2.2) для модели (5.2)

(5.3) $$J(x,u,w) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ z^T(t) Q z(t) + \left[k_u(z)\right]^T R\, k_u(z) - \left[k_w(z)\right]^T P k_w(z) \right\} dt.$$

Управления $k_w(z)$ и $k_u(z)$ будут иметь вид

(5.4) $$k_w(z) = w(t) = P^{-1} \left(g_1^*\right)^T \left\{ \frac{\partial V(z)}{\partial z} \right\}^T, \quad k_u(z) = u(t) = R^{-1} \left(g_2^*\right)^T \left\{ \frac{\partial V(z)}{\partial z} \right\}^T,$$

где $V(z)$ − положительно определенная функция, отвечающая алгебраическому уравнению Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z(t)}A^*z(t)+\frac{1}{2}z^T(t)\left(H^*\right)^T QH^*z(t)+ \tag{5.5}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial V(z)}{\partial z}\left[g_1^*P^{-1}\left(g_1^*\right)^T-g_2^*R^{-1}\left(g_2^*\right)^T\right]\left\{\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right\}^T=0.$$

Пусть $\partial V(z)/\partial z(t)=z^T(t)S$, где $S-$ положительно определенная матрица. Тогда из (5.5) будем иметь

$$SA^*+\left(A^*\right)^T S+S\left[g_1^*P^{-1}\left(g_1^*\right)^T-g_2^*R^{-1}\left(g_2^*\right)^T\right]S+\left(H^*\right)^T QH^*=0. \tag{5.6}$$

Для синтеза управлений исходным объектом (2.1) введем функцию Ляпунова такую, что

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}\{f(t,x)+g_1(t,x)w(t)+g_2(t,x)u(t)\}\le -W(x), \tag{5.7}$$

где $W(x)\ge 0$.

Законы управления должны быть такими, чтобы

$$\inf_u \sup_w \frac{\partial V(x)}{\partial x}\{f(t,x)+g_1(t,x)w(t)+g_2(t,x)u(t)\}<0 \quad \forall x\ne 0.$$

Определим скалярную функцию $W(x)$ в виде:

$$W(x)=\frac{1}{2}h^T(t,x)Q\,h(t,x)+$$
$$+\frac{1}{2}x^T(t)S\left[g_2(t,x)R^{-1}\left[sign\,g_2^T(t,x)\right]\left(g_2^*\right)^T-g_1(t,x)P^{-1}\left[sign\,g_1^T(t,x)\right]\left(g_1^*\right)^T\right]Sx(t).$$

Здесь матрица $\left[g_2(t,x)R^{-1}\left[sign\,g_2^T(t,x)\right]\left(g_2^*\right)^T-g_1(t,x)P^{-1}\left[sign\,g_1^T(t,x)\right]\left(g_1^*\right)^T\right]$ – по крайней мере положительно полуопределенная.

Тогда условие (5.7) примет вид

$$x^T(t)S\{f(t,x)+g_1(t,x)w(t)+g_2(t,x)u(t)\}\le$$
$$\le -\frac{1}{2}h^T(t,x)Q\,h(t,x)-$$
$$-\frac{1}{2}x^T(t)S\left[g_2(t,x)R^{-1}\left[sign\,g_2^T(t,x)\right]\left(g_2^*\right)^T-g_1(t,x)P^{-1}\left[sign\,g_1^T(t,x)\right]\left(g_1^*\right)^T\right]Sx(t)$$
$$\forall x\ne 0.$$

Т е о р е м а 5.1. При определенных выше функциях $V(x)$ и $W(x)$ система

$$
(5.8)\quad \begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t) = f(t,x) + \\
&+\left\{g_1(t,x)P^{-1}\left[sign\, g_1^T(t,x)\right]\left(g_1^*\right)^T - g_2(t,x)R^{-1}\left[sign\, g_2^T(t,x)\right]\left(g_2^*\right)^T\right\}Sx(t), \\
&x(t_0) = x_0,
\end{aligned}
$$

равномерно асимптотически устойчива, если и только если

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x^T(t)S\left[g_1(t,x)P^{-1}\left[sign\, g_1^T(t,x)\right]\left(g_1^*\right)^T - g_2(t,x)R^{-1}\left[sign\, g_2^T(t,x)\right]\left(g_2^*\right)^T\right]Sx(t) + \\
&+\frac{1}{2}h^T(t,x)Qh(t,x) \geq -x^T(t)Sf(t,x) \quad \forall x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставив в левую часть неравенства (5.7) управления, синтезированные с использованием модели (5.2)

$$
(5.9)\quad w(t) = P^{-1}(x)\left[sign\, g_1^T(t,x)\right]\left(g_1^*\right)^T Sx(t),\; w(t) = R^{-1}(x)\left[sign\, g_2^T(t,x)\right]\left(g_2^*\right)^T Sx(t),
$$

будем иметь:

$$
(5.10)\quad \begin{aligned}
&\frac{1}{2}x^T(t)S\left[g_1(t,x)P^{-1}\left[sign\, g_1^T(t,x)\right]\left(g_1^*\right)^T - g_2(t,x)R^{-1}\left[sign\, g_2^T(t,x)\right]\left(g_2^*\right)^T\right]Sx(t) + \\
&+\frac{1}{2}h^T(t,x)Qh(t,x) \geq -\; x^T(t)Sf(t,x) \quad \forall x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Из (5.10), принимая во внимание, что $f(t,x) = [A_1(t) + A_2(x)]$, следует, что «наихудшими» параметрами A^*, g_1^*, g_2^*, H^* модели (5.2) являются

$$
A^* = [\overline{A}_1 + A_2(|x_0|)],\; g_1^* = \left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right],\; g_2^* = \underline{G}_{21},\; H^* = \left[\overline{H_1} + H_2(|x_0|)\right]. \square
$$

Т е о р е м а 5.2. Если $z(t)$ является решением дифференциального уравнения с постоянными параметрами

$$
(5.11)\quad \begin{aligned}
&\frac{d}{dt}z(t) = \Big\{ [\overline{A}_1 + A_2(|x_0|)] + \\
&+\left[\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]P^{-1}\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^T - \underline{G}_{21}R^{-1}\underline{G}_{21}^T\right]S \Big\} z(t),\; z(t_0) = x_0,
\end{aligned}
$$

а $x(t)$ − возможные решения исходного нелинейного уравнения

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t) = f(t,x) + \\
&+g_1(t,x)P^{-1}\left(sign\, g_1^T(t,x)\right)\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^T Sx(t) - g_2(t,x)R^{-1}\left(sign\, g_2^T(t,x)\right)\underline{G}_{21}^T Sx(t), \\
&x(0) = x_0,
\end{aligned}
$$

где положительно определенная матрица S является решением алгебраического уравнения Риккати:

(5.12)
$$\begin{aligned}&S[\overline{A}_1 + A_2(|x_0|)] + [\overline{A}_1 + A_2(|x_0|)]^T S +\\&+ S\left\{\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]P^{-1}\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^T - \underline{G}_{21} R^{-1} \underline{G}_{21}{}^T\right\}S +\\&+ [\overline{H_1} + H_2(|x_0|)]^T Q[\overline{H_1} + H_2(|x_0|)] = 0,\end{aligned}$$

то при всех возможных $(t,x)\in\Omega$ справедливо соотношение $|z(t)|\geq|x(t)|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость теоремы 5.2 следует из условия равномерной асимптотической устойчивости исходного объекта с управлениями вида (5.9), условия нахождения «наихудших» параметров исходного объекта и того факта, что выражение $x^T(t)\left[\overline{H_1} + H_2(|x_0|)\right]^T Q\left[\overline{H_1} + H_2(|x_0|)\right]x(t)$ по крайней мере − положительно полуопределенное. □

Управления (5.9) описывают стратегию с обратной связью в дифференциальной игре для игроков U и W, описываемой динамической системой (5.2). Отметим, что эквивалентное представление системы (2.1) в виде (4.7) приводит к различным управлениям вида (5.9), так как в уравнениях вида (5.12), решениями которых определяются положительно определенные матрицы S, будут содержаться различные матрицы с постоянными параметрами, характеризующими каждое из представлений.

Положительно определенная матрица S, являющаяся решением уравнения (5.12), в управляющих воздействиях (5.9) обеспечит конечное значение функционала на робастной модели объекта [18]

(5.13)
$$J(z^0,u^0,w^0) = \frac{1}{2}x^T(0)Sx(0).$$

С л е д с т в и е и з т е о р е м ы 5.2. Из того обстоятельства, что решение уравнения модели (5.2) на $[0,T]$ является мажорантой (в том смысле, что $|z(t)|\geq|x(t)|$) для решений исходной системы с управлениями (5.9), следует, что

(5.14)
$$J(x,u,w) \leq \frac{1}{2}x^T(0)Sx(0),$$

где положительно определенная матрица S является решением уравнения (5.12), при всех возможных $(t,x)\in\Omega$.

Уточним важное свойство уравнения, исходной динамической системы с управляющими воздействиями (5.9). Перепишем уравнение (5.8) в виде

(5.15)
$$\frac{d}{dt}x(t) = \varphi(x,\alpha(t.x)),\; x(0) = x_0,$$

где

$$(5.16)\qquad \begin{aligned}&\varphi(x,\alpha(t,x)) =\\ &= f(t,x)+\\ &+\Big\{g_1(t,x)P^{-1}\big[sign\, g_1^T(t,x)\big]\big(g_1^*\big)^T - g_2(t,x)R^{-1}\big[sign\, g_2^T(t,x)\big]\big(g_2^*\big)^T\Big\}Sx(t).\end{aligned}$$

Здесь $\alpha(t,x)$ − параметры матриц $f(t,x)$, $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$, $t\in[0,T]$; Ω_α − область (t,x,α)-пространства. В силу сделанных ранее предположений относительно этих матриц множество Ω_α − замкнутое множество возможных траекторий параметров системы в интервале $[0,T]$.

Т е о р е м а 5.3. Пусть вектор функция $\varphi(x,\alpha(t,x))$ обладает следующими свойствами:

- $\varphi(x,\alpha(t,x))$ измерима на множестве Ω_α при любых фиксированных траекториях $\alpha(t,x)$ и соответствующих решениях $x_\alpha(t)$, $t\in[0,T]$;
- $\varphi(x,\alpha(t,x))$ непрерывна по совокупности $\{x_\alpha(t),\alpha(t,x)\}$;
- $\varphi\in(C,Lip)$ в Ω_α

и $\alpha^*\in\partial\Omega_\alpha$ − постоянные параметры робастной модели системы $\frac{d}{dt}z(t)=\varphi(z,\alpha^*)$, $z(t_0)=x_0$, а $z(0,T)$ − единственное решение уравнения на интервале $[0,T]$. В таком случае для каждой траектории изменения параметров $\alpha(t,x)\in\Omega_\alpha$ существует соответствующее единственное решение задачи (5.15) $x_\alpha(t)$ на $[0,T]$ и если $\alpha(t,x)$ последовательно от решения к решению устремлять к α^*, т.е. $\alpha(t,x)\to\alpha^*$, то соответствующие решения $x_\alpha(0,T)$ будут сходиться к $z(0,T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При сделанных выше предположениях о непрерывности правой части исходного дифференциального уравнения объекта справедливо заключение о существовании интегрируемой по Лебегу на интервале $[0,T]$ функции $m(t)$ такой, что если $\left\|\varphi(z,\alpha^*)\right\|=m(t)$, где $\alpha^*\in\partial\Omega_\alpha$, то $\left\|\varphi(x,\alpha(t,x))\right\|<m(t),\ \alpha(t,x)\in\Omega_\alpha$, $t\in[0,T]$, если $\alpha(t,x)\neq\alpha^*$. Учитывая, что $\varphi\in(C,Lip)$ в Ω_α, решение уравнения (5.15) непрерывно зависит от начальных условий и параметров системы, а, следовательно, если $\alpha(t,x)$ последовательно от решения к решению устремлять к α^*, т.е. $\alpha(t,x)\to\alpha^*$, то соответствующие решения $x_\alpha(t_0,T)$ будут сходиться к $z(t_0,T)$. □

6. «КОРИДОР» ОТКЛОНЕНИЙ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

Оценим максимально возможное рассогласование между траекториями модели (5.2) и возможными траекториями исходного объекта с управлениями (5.9). Пусть

(6.1) $$\varepsilon(t) = z(t) - x_{\min}(t),$$

где $x_{\min}(t)$ есть решение уравнения

(6.2) $$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x_{\min}(t) = \Big\{ \underline{A}_1 + \underline{G}_{11}P^{-1}\underline{G}_{11}{}^{T}S - \\ &-\left[\overline{G}_{21}(t) + G_{22}(|x_0|)\right]R^{-1}\left[\overline{G}_{21}(t) + G_{22}(|x_0|)\right]^{T} S \Big\} x_{\min}(t),\ x(t_0) = x_0.\end{aligned}$$

Уравнение для возможных отклонений имеет вид

(6.3) $$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = L\varepsilon(t) - \\ &-\left\{ \alpha + q_1P^{-1}\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^{T} S + q_2R^{-1}\underline{G}_{21}^{T}S \right\} x_{\min}(t),\ \varepsilon(t_0) = 0,\end{aligned}$$

где

(6.4) $$\begin{aligned}&L = \overline{A}_1 + A_2(|x_0|) + \left[\overline{G}_{11}(t) + G_{12}(|x_0|)\right]P^{-1}\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^{T} S - \underline{G}_{21}R^{-1}\underline{G}_{21}^{T}S, \\ &\alpha = \overline{A}_1 + A_2(|x_0|) - \underline{A}_1,\ q_1 = \overline{G}_{11}(t) + G_{12}(|x_0|) - \underline{G}_{11},\ q_2 = \overline{G}_{21}(t) + G_{22}(|x_0|) - \underline{G}_{21}.\end{aligned}$$

Т е о р е м а 6.1**.** Возможный коридор отклонений решений уравнения (2.1) с управлениями (5.9) не превышает величину

(6.5) $$\|\varepsilon(t)\| < \|L\|^{-1}\|\beta x(t_0)\|\left[1 - \exp\|L\|(t - t_0)\right],\ (t,x) \in \Omega,\ t \in [t_0, T],$$

где $\beta = \alpha + \left\{ q_1P^{-1}\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^{T} + q_2R^{-1}\underline{G}_{21}^{T} \right\} S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** Запишем норму решения уравнения (6.3)

$$\|\varepsilon(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left[\exp L(t - \tau)\right]\beta x_{\min}(\tau)d\tau \right\| < \left\| L^{-1}\left(1 - e^{L(t - t_0)}\right)\beta x(t_0) \right\|.$$

Таким образом, «коридор» возможных решений в робастной дифференциальной игре описывается соотношением

$$\|\varepsilon(t)\| < \left\| L^{-1}\left(1 - e^{L(t - t_0)}\right)\beta x(t_0) \right\|,\ (t,x) \in \Omega.$$

Отсюда имеем (6.5). □

Сформулируем требования, которым должна отвечать матрица L (6.4) робастной модели для случая, когда время переходного процесса задано.

Т е о р е м а 6.2. Пусть задача управления объектом

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t,x) + g_1(t,x)w(t) + g_2(t,x)u(t),\ x(t_0) = x_0, \tag{6.6}$$

где

$$u(t) = -R^{-1}\underline{G}_{21}{}^T Sx(t),\ w(t) = P^{-1}\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^T Sx(t), \tag{6.7}$$

S положительно определенная матрица − есть решение алгебраического уравнения Риккати (5.12), заключается в достижении значения $\left\|x^*\right\| = d$ из начального состояния $\left\|x(t_0)\right\|$ за время $t \le T - t_0$. Тогда если

$$1)\ \frac{d}{dt}z(t) = Lz(t),\ z(t_0) = x_0, \tag{6.8}$$

где

$$\begin{aligned} L = {} & \overline{A}_1(t) + A_2(|x_0|) + \\ & + \left\{\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]P^{-1}\left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^T - \underline{G}_{21}R^{-1}\underline{G}_{21}{}^T\right\}S, \end{aligned} \tag{6.9}$$

есть модель системы, т.е. $\left\|z(t)\right\| \ge \left\|x(t)\right\|$, и если

$$2)\ \left\|Lx(t_0)\right\| \ge \left\|Lx(t)\right\|,$$

то для того чтобы решение уравнения (6.6) с начальным условием $\left\|x(t_0)\right\|$ и управлениями (6.7) за заданное время $T - t_0$ достигло бы или вышло бы за заданную границу, т.е. $\left\|x(T)\right\| \le d$, матрица L должна быть такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|Lx(t_0)\right\| \ge \frac{\left\|x(t_0)\right\| - d}{T - t_0}. \tag{6.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для модели (6.8) в момент T $\left\|z(T)\right\| = d$.

Допустим, что при всех возможных $(t,x) \in \Omega$ объект (6.6) с управлениями (6.7) асимптотически устойчив. Тогда для модели (6.8) последовательно получаем:

$$\left\|z(t_0)\right\| - d = \left\|z(t_0)\right\| - \left\|z(T)\right\| = \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\left\|z(\tau)\right\|d\tau = \int_{t_0}^{T}\left\|Lz(\tau)\right\|d\tau \le \left\|Lz(t_0)\right\|(T - t_0).$$

Отсюда, учитывая, что $z(t_0) = x_0$, имеем (6.10).□

С л е д с т в и е и з т е о р е м ы 5.2. Подставляя (6.9) в (6.10) будем иметь

$$\left\| \overline{A}1(t) + A_2(|x_0|) + \left\{ \left[\overline{G}11 + G_{12}(|x_0|) \right] P^{-1} \left[\overline{G}11 + G_{12}(|x_0|) \right]^T - \underline{G}_{21} R^{-1} \underline{G}_{21}{}^T \right\} S\, x(t_0) \right\| \geq$$

$$\geq \frac{\|x(t_0)\| - d}{(T - t_0)},$$

откуда

$$\| S \| \geq$$

$$\geq \frac{\|x(t_0)\| - d}{T - t_0} \left\{ \left\| \overline{A}1 + A_2(|x_0|) + \left[\overline{G}11(t) + G_{12}(|x_0|) \right] P^{-1} \left[\overline{G}11 + G_{12}(|x_0|) \right]^T S - \underline{G}_{21} R^{-1} \underline{G}_{21}^T \right\| \|x_0\| \right\}^{-1}.$$

(6.11)

Условие (6.11) можно использовать при проверке соответствия параметров регулятора, выраженных через положительно определенную матрицу S, в задаче перевода системы из заданных начальных условий в заданную область на правом конце за заданный период управления.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим влияние возмущений на результат управления объектом (2.1). Пусть в качестве возмущений, действующих на входе объекта, будет белый шум $w(t)$ с характеристиками

$$M[w(t)w^T(\tau)] = W\delta(t - \tau), \; M[x(t_0)w^T(t)] = 0 .$$

Тогда уравнение для ковариационной матрицы $X(t) = M[x(t)x^T(t)]$ состояния объекта будет описываться следующим соотношением [18]

$$\frac{d}{dt} X(t) = \left\{ A_1(t) + A_2(x) - g_2^T(t,x) R^{-1} \left[sign\, g_2^T(t,x) \right] \underline{G}_{21}^T S \right\} X(t) +$$

$$+ X(t) \left\{ A_1(t) + A_2(x) - g_2(t,x) R^{-1} \left[sign\, g_2^T(t,x) \right] \underline{G}_{21}^T S \right\}^T +$$

$$+ \left\{ g_1(t,x) P^{-1} \left[sign\, g_1^T(t,x) \right] \left[\overline{G}11 + G_{12}(|x_0|) \right]^T S \right\} W \left\{ P^{-1} \left[sign\, g_1^T(t,x) \right] \left[\overline{G}11 + G_{12}(|x_0|) \right]^T S \right\}^T,$$

$$X(t_0) = M[x(t_0)x^T(t_0)].$$

Ковариационная матрица $Z = M[z(t)z^T(t)]$ состояния модели объекта (5.11), определяется решением алгебраического уравнения

$$\left\{A_1 + A_2(|x_0|) - \underline{G}_{21} R^{-1} \underline{G}_{21}^T S\right\} Z + Z \left\{A_1 + A_2(|x_0|) - \underline{G}_{21} R^{-1} \underline{G}_{21}^T S\right\}^T +$$
$$+ \left[\overline{G}_{11}(t) + G_{12}(|x_0|)\right] P^{-1} \left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^T SW \times$$
$$\times \left\{\left[\overline{G}_{11}(t) + G_{12}(|x_0|)\right] P^{-1} \left[\overline{G}_{11} + G_{12}(|x_0|)\right]^T S\right\}^T = 0.$$

Так как $|z(t)| \geq |x(t)|$ (теорема 5.2), то выполняется соотношение $|Z| \geq |X(t)|$.

8. ПРИМЕР.

Рассмотрим пример [11], в котором нелинейный объект описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt} x(t) = \begin{pmatrix} -5\sin(2x_1(t)) \\ x_1(t) - 2x_2(t) - 3x_1^3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \omega(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \ x(0) = x_0, \tag{8.1}$$

где $x^T = (x_1 \ x_2)$. В соответствии с принятыми обозначениями компоненты уравнения объекта имеют вид

$$f(x) = \begin{pmatrix} -5\sin(2x_1(t)) \\ x_1(t) - 2x_2(t) - 3x_1^3(t) \end{pmatrix}, \ g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Представление нелинейной системы в виде системы с линейной структурой, но с параметрами, зависящими от состояния, не является уникальным. Запишем две возможные формы представления исходного объекта (8.1):

$$I \begin{cases} \dfrac{d}{dt} x^{(I)}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-5\sin(2x_1^{(I)}(t))}{x_1(t)} & 0 \\ x_1^{(I)}(t) - 3\left(x_1^{(I)}\right)^2(t) & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(I)}(t) \\ x_2^{(I)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \omega(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_M^{(I)}(t), \\ x^{(I)}(0) = x_0, \end{cases} \tag{8.2}$$

$$II \begin{cases} \dfrac{d}{dt} x^{(II)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-5\sin(2x_1^{(II)}(t))}{x_2^{(II)}(t)} \\ -3x_1^{(II)}(t) & -2 + \dfrac{x_1^{(II)}(t)}{x_2^{(II)}(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(II)}(t) \\ x_2^{(II)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \omega(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_M^{(II)}(t), \\ x^{(II)}(0) = x_0, \end{cases} \tag{8.3}$$

где $\left(x^{(I)}\right)^T = (x_1^{(I)} \ x_2^{(I)})$, $\left(x^{(II)}\right)^T = (x_1^{(II)} \ x_2^{(II)})$.

Уравнения I и II будут использоваться для синтеза управлений $u_M^{(I)}$ и $u_M^{(II)}$.

В функционале качества (2.2) назначим $R = 0{,}01$, $P = 50$, $Q(x_0) = \begin{pmatrix} x_1^2(t_0) & 0 \\ 0 & x_2^2(t_0) \end{pmatrix}$.

В качестве возмущения примем: $\omega(t)=15\sin(30t)$. Структура управления для обеих форм объектов имеет вид

(8.4) $$u_M^{(I)}(t)=-R^{-1}B_2S^{(I)}x^{(I)}(t)=-K^{(I)}x^{(I)}(t),$$

(8.5) $$u_M^{(II)}(t)=-R^{-1}B_2S^{(II)}x^{(II)}(t)=-K^{(I)}x^{(II)}(t).$$

Матрицы S^i, которые являются решениями матричных уравнений Риккати

$$S^iA_2^i(x_0)+\left[A_2^i(x_0)\right]^TS^i+S^i\left[g_1P^{-1}g_1^T-g_2R^{-1}g_2^T\right]S^i+Q(x_0)=0,\ i=I,II,$$

при начальных условиях $x_1(0)=6,\ x_2(0)=-6$ имеют следующие значения

$$S^{(I)}=\begin{pmatrix}1.573 & -0.8097\\ -0.8097 & 1.1940\end{pmatrix},\quad S^{(II)}=\begin{pmatrix}0.8911 & -0.5278\\ -0.5278 & 1.0363\end{pmatrix}.$$

На рис. 1 представлены графики переходных процессов модели системы (I) с управлением (8.4) и исходной системы с управлением $u^{(I)}(t)=-R^{-1}B_2S^{(I)}x(t)$.

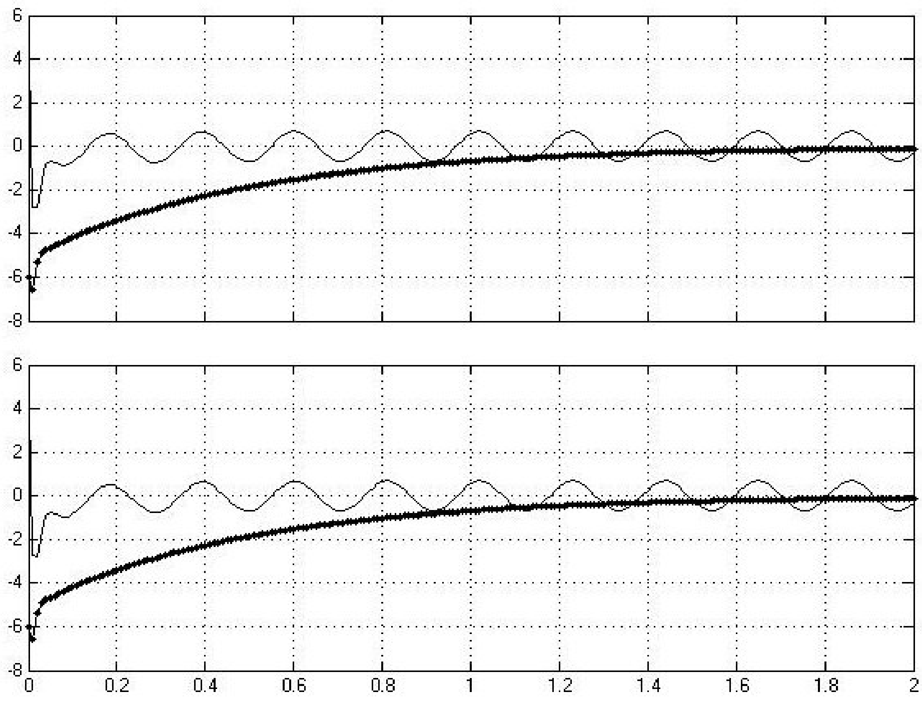

Рис. 1. Процессы в исходном объекте и модели полностью совпадают.

На рис. 2 представлены графики переходных процессов модели системы (II) с управлением (8.5) и исходной системы с управлением $u^{(II)}(t)=-R^{-1}B_2S^{(II)}x(t)$.

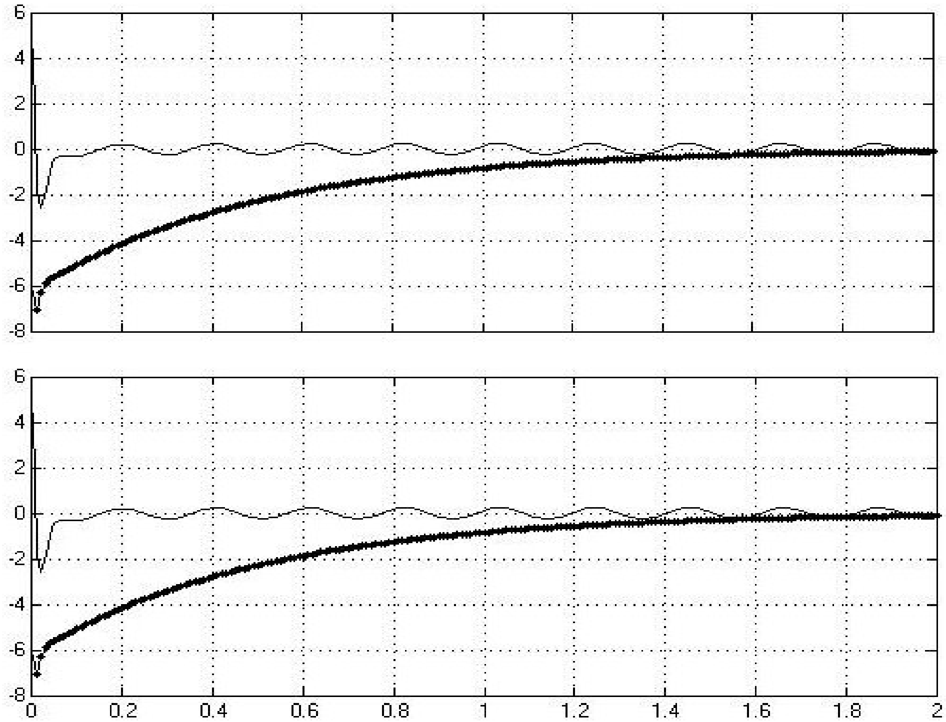

Рис. 2. Процессы в исходном объекте и модели полностью совпадают.

Так как параметры синтезированных управлений (8.4) и (8.5) различаются, то имеет место рассогласование между переходными процессами исходной системы, вызываемыми управлениями, синтезированными с использованием первой (8.2) или второй (8.3) моделями. Пусть

(8.5) $$\varepsilon(t) = x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t).$$

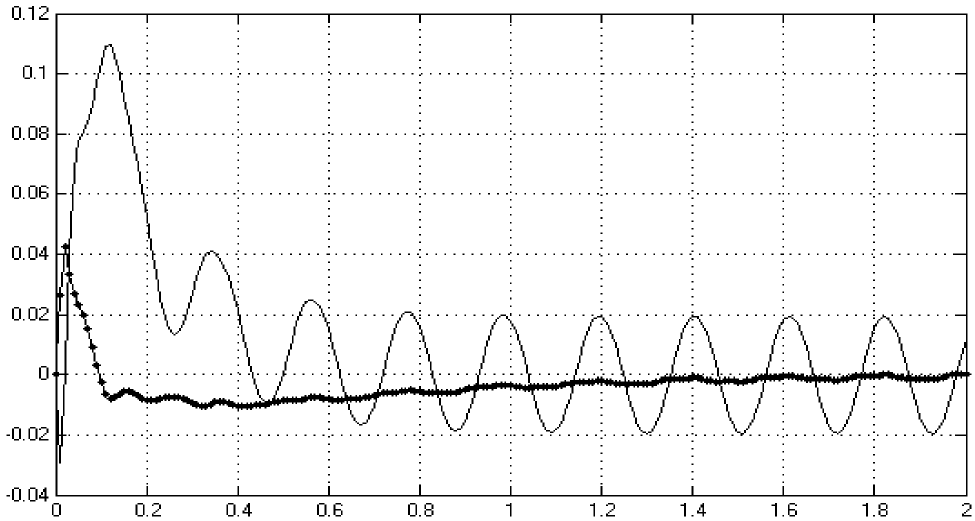

Рис. 3. Графики, иллюстрирующие сравнение переходных процессов исходной системы при воздействии управлений, синтезированных с использованием моделей (8.2) и (8.3).

Отличия, вызванные использованием различных представлений исходной нелинейной системы при синтезе управлений, в сравнении с назначенными начальными условиями системы и уровнем возмущающего сигнала не превышаю 2% и 0,13% соответственно. Это является свидетельством того, что в обоих случаях предложенный метод синтеза гарантированного управления обеспечивает заданное качество переходных процессов и желаемое значение терминальных отклонений.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод синтеза гарантированного управления для класса нелинейных неопределенных систем, представимых в эквивалентной форме в виде систем с параметрами, зависящими от состояния. Задача синтеза стабилизирующего управления сведена к построению линейной модели с постоянными параметрами нелинейного объекта, норма состояния которого является мажорантой для нормы состояния исходного объекта. Получены условия, которым должны удовлетворять параметры модели в задаче с заданным временем переходного процесса. Полученные решения иллюстрируются примером синтеза стабилизирующего управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Person J.D.* Approximation methods in optimal control // J. of Electronics and Control.. 12,. 453-469 P. 1962
2. *Mrasek C.P., Clouter J.R.* Control design for the nonlinear benchmark problem via sdre method // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. 8, 401-433 P. 1998.
3. *Menon P.K., Ohlmeyer.* Integrated Design of Angel Missile Guidance and Control Systems // Proc. 17^{th} Mediterranean Conf. on Control and Automation (MED99). Haifa, Israel, June 28-30. 1470-1494 P. 1999.
4. *Mrasek C.P.* SDRE autopilot for dual controlled missiles // Proc. 17^{th} IFAC Sympos. on Automatic Control in Aerospace. Toulouse, France, 2007.
5. *Friedland B.* Quasi Optimal Control and the SDRE method // Proc. 17^{th} IFAC Sympos. on Automatic Control in Aerospace. Toulouse, France, 2007.
6. *Salnci M.U., Gokbilen B.*SDRE missile autopilot design using sliding mode control with sliding surfaces // Proc. 17^{th} IFAC Sympos. on Automatic Control in Aerospace. Toulouse, France, 2007.
7. *Cimen T.D.* State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey // Proc. 17^{th} World Conf. IFAC, Seoul, Korea, July 6-11, 3771-3775 P. , 2008.
8. *Won Chang-Hee, Biswas Saroj.* Optimal Control Using Algebraic Method for Control-Affine Nonlinear Systems. Temple University, USA. cwon@temple.edu, sbiswas@temple.edu. April 20, 33 P. 2007.
9. *Erdem E.B., Alleyn A.G.* Design of a class of nonlinear controllers via state-dependent Riccati equations // IEEE Trans. on Control Systems Technology. 12. 2986-2991 P. 2004.
10. *Xin M., Balakrisnan S.N.* Missile longitudinal autopilot design using a new suboptimal nonlinear control method // IEE Proc. Control Theory Appl. 150 (6). 577-584 P. 2003.

11. *Sakayanagi Y., Nakayama D.* and all. Clarification of Free Parameters of State-Dependent Coefficient Form: Effect on Solving State-Dependent Riccati Inequality // Proc. 17th World Conf. IFAC, Seoul, Korea, July 6-11, 162-187 P. 2008.
12. *Shamma J.S., Cloutier J.R.* Existence of SDRE Stabilizing Control // IEEE Trans. on Automatic Control. 48 (3). 513-517 P. 2003.
13. *Суботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991.
14. *Афанасьев В.Н.* Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенным объектом // Изв. РАН. ТиСУ. №1. С.24-31. 2010.
15. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Изд-во Мир, 1974.
16. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. – М.: Изд-во Мир. 1974. 207 с.
17. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 3-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004.
18. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.

Афанасьев Валерий Николаевич – доктор технических наук, профессор,

зав. кафедрой кибернетики Московского государственного института электроники и математики (МИЭМ)

Тел. 8 919 968 7080, e-mail: afanval@mail.ru