Дискретная математика

том 24 выпуск 1 * 2012

УДК 519.21

Вычисление энтропии для некоторой скрытой цепи Маркова

© 2012 г. З. И. Бежаева, В. И. Оселедец

В статье изучается один из вариантов задачи Эрдеша о распределении случайной величины

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \rho^i,$$

причем

$$\mathbf{P}(\zeta_i = 0) = q < 1, \quad \mathbf{P}(\zeta_i = 1) = p, \quad \rho \in [0,1], \quad \rho + \rho^2 + \rho^3 = 1.$$

Определяются инвариантная мера Эрдеша на некотором компакте и соответствующая ей скрытая цепь Маркова, получена формула для вычисления энтропии инвариантной меры Эрдеша.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07–01–92215–НЦНИЛ.

1. Введение

В [1] Эрдеш поставил задачу изучения функции распределения случайной величины

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \rho^i.$$

Здесь $0 < \rho < 1$, и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные величины, принимающие значения 0, 1, причем

$$\mathbf{P}(\zeta_i = 0) = \mathbf{P}(\zeta_i = 1) = \frac{1}{2}.$$

Задаче Эрдеша посвящено много статей. В [2] авторы дали определение меры Эрдеша на единичном интервале $[0,1]$, на компакте Фибоначчи, и инвариантной меры Эрдеша на компакте Фибоначчи для случая $\rho = (\sqrt{5}-1)/2$.

В [2] было доказано, что мера Эрдеша эквивалентна инвариантной мере Эрдеша на компакте Фибоначчи. Кроме того, в этой же работе была поставлена и решена задача об эргодических свойствах инвариантной меры Эрдеша на компакте Фибоначчи.

В настоящей работе мы будем изучать распределение ζ, когда

$$\mathbf{P}(\zeta_i = 0) = q < 1, \qquad \mathbf{P}(\zeta_i = 1) = p,$$

и $\rho \in [0,1]$ удовлетворяет уравнению

$$\rho + \rho^2 + \rho^3 = 1.$$

Меру, задаваемую $F(x)$ — функцией распределения случайной величины ζ — будем называть мерой Эрдеша на прямой.

По аналогии с компактом Фибоначчи, определим марковский компакт X с алфавитом $\{0,1,2\}$ и набором допустимых слов 00, 01, 02, 21. Определим инвариантную меру Эрдеша на компакте X. Эта мера совпадает с распределением некоторой скрытой цепи Маркова. Будет получена формула для энтропии этой скрытой цепи Маркова. Таким образом, будет получена формула для вычисления энтропии инвариантной меры Эрдеша.

Отношение энтропии инвариантной меры Эрдеша и $\ln(\beta)$, $\beta = 1/\rho$, есть хаусдорфова размерность инвариантной меры Эрдеша на компакте X с метрикой

$$d(x,y) = \rho^{n(x,y)},$$

где $n(x,y)$ — длина наибольшего общего префикса слов x и y. Эта размерность равна также хаусдорфовой размерности меры Эрдеша на прямой (см. [3, 4]).

Для нашего случая при $q = 1/2$ полученная формула для хаусдорфовой размерности совпадает с формулой из [5] (см. также [6]).

Прямое вычисление энтропии по полученной нами формуле невозможно, так как ряды, входящие в формулу сходятся слишком медленно для эффективного вычисления. Поэтому в вычислениях использовалась процедура ускорения сходимости ряда. Для ускорения сходимости использовался метод, аналогичный методу из [7].

2. Инвариантная мера Эрдеша на марковском компакте X

Рассмотрим разбиение интервала $[0,1)$ на интервалы $\Delta_0 = [0,\rho)$, $\Delta_1 = [\rho, \rho+\rho^2)$, $\Delta_2 = [\rho+\rho^2, 1)$. Относительно отображения $V: x \mapsto \{\beta x\}$ это разбиение является марковским. Действительно, интервал Δ_0 под действием отображения V переходит в отрезок $[0,1)$, интервал Δ_1 переходит в Δ_0, а Δ_2 в Δ_1, то есть возможные переходы интервалов задаются матрицей инцидентности

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь каждой точке $x \in [0,1)$ сопоставим слово $x_1 x_2 \ldots$, где $x_n(x) = j$, если $V^{n-1}x \in \Delta_j$, $j = 0,1,2$.

Пусть X есть марковское множество бесконечных допустимых слов с алфавитом $\{0,1,2\}$. Мы называем слово допустимым, если все подслова длины 2 бесконечного допустимого слова задаются списком $\{00, 01, 02, 10, 21\}$. Множество X образует компакт с метрикой $d(x,y) = \rho^{n(x,y)}$, где $n(x,y)$ есть длина наибольшего общего префикса слов x и y.

Инвариантная мера Эрдеша на интервале $[0,1)$ (ее определение аналогично определению из [8]) переходит в инвариантную меру Эрдеша на X.

Аналогично [8] доказывается, что мера Эрдеша $dF(x)$ на прямой удовлетворяет уравнению

$$d\widetilde{F}(x) = M(x_1)\, d\widetilde{F}(Vx),$$

где

$$d\widetilde{F}(x) = (dF(x), dF(x+\rho), dF(x+\rho+\rho^2), dF(x+1))^{\top},$$

а матрицы $M(0) = M_0$, $M(j) = M_1$, $j = 1, 2$, где

$$M_0 = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & q \\ p & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем квадратную матрицу 12-го порядка

$$M = \begin{pmatrix} M(00) & M(01) & M(02) \\ M(10) & M(11) & M(12) \\ M(20) & M(21) & M(22) \end{pmatrix},$$

$$M(00) = M(10) = M_0, \qquad M(01) = M(02) = M(21) = M_1.$$

Все остальные блоки матрицы M нулевые. Спектральный радиус этой матрицы равен 1.

На пространстве бесконечных слов $x = x_1 x_2 \ldots \in X$ определим меру следующим образом:

$$\mu(\{x \in X : x_1 \ldots x_n = a_1 \ldots a_n) = L(a_1) M(a_1, a_2) \ldots M(a_{n-1}, a_n) R(a_n)/(LR), \quad n \geqslant 2,$$
$$\mu(x_1) = L(x_1) R(x_1)/(LR),$$

$L = (L(0), L(1), L(2))$ — левый собственный вектор, $R^{\top} = (R(0)^{\top}, R(1)^{\top}, R(2)^{\top})$ — правый собственный вектор матрицы M с собственным значением, равным 1.

Заметим, что мера μ инвариантна относительно сдвига T в пространстве бесконечных допустимых слов с алфавитом $\{0, 1, 2\}$. Эту меру мы будем называть инвариантной мерой Эрдеша. Эта мера (см. [8]) совпадает с распределением скрытой марковской цепи, порождаемой матрицей M и функцией склейки

$$g(i) = 0, \qquad i \in \{1, 2, 3, 4\},$$
$$g(i) = 1, \qquad i \in \{5, 6, 7, 8\},$$
$$g(i) = 2, \qquad i \in \{9, 10, 11, 12\}.$$

Вернемся к определенной выше мере μ. Вектор L имеет нулевые координаты с номерами 6, 7, 10, 11. У вектора R две последние координаты нулевые. Поэтому инвариантная мера Эрдеша может быть получена при вычеркивании из матрицы M и векторов L, R столбцов и строк, соответствующих состояниям 6, 7, 10, 11, 12. После вычеркивания из матрицы M столбцов и строк с номерами 6, 7 и 10, 11, 12 получим матрицу

$$N = (n(ij),\ i, j = 1, \ldots, 7) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & p & q & p \\ p & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим семь состояний, занумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Спектральный радиус матрицы N равен 1. Через $L = (L_i, i = 1, \ldots, 7)$, $R = (R_i, i = 1, \ldots, 7)$ будем, как и раньше, обозначать, соответственно, правый и левый собственный вектор матрицы N с собственным значением 1.

Определим функцию f от состояний $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, полагая

$$f(i) = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4;$$
$$f(i) = 1, \qquad i = 5, 6;$$
$$f(7) = 2.$$

Эта функция и матрица N определяют скрытую марковскую цепь (см. [8]).

Инвариантная мера Эрдеша μ — мера, порожденная этой скрытой марковской цепью на пространстве бесконечных допустимых слов X.

Матрицу N представим в блочном виде

$$N = \begin{pmatrix} N(00) & N(01) & N(02) \\ N(10) & N(11) & N(12) \\ N(20) & N(21) & N(22) \end{pmatrix},$$

где

$$N(00) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}, \qquad N(01) = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N(02) = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad N(10) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix},$$

$$N(21) = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}.$$

Все остальные матрицы $N(ij)$ нулевые.

Теперь мера μ можно задать с помощью блочной матрицы N и векторов

$$L = (L(0), L(1), L(2)),$$
$$L(0) = (L_1, L_2, L_3, L_4) = ((1, (1-q)^2, (1-q), (1-q)^2 q),$$
$$L(1) = (L_5, L_6) = ((2-q)(1-q), 1 - q + 2q^2 - q^3),$$
$$L(2) = L_7 = 1 - q,$$
$$R^{\top} = (R(0)^{\top}, R(1)^{\top}, R(2)),$$
$$R(0) = (R_1, R_2, R_3, R_4)^{\top} = ((2-q)q, (1-q), (1-q)^2, (1-q)^3)^{\top},$$
$$R(1) = (R_5, R_6)^{\top} = ((2-q)q^2, (1-q)^3)^{\top},$$
$$R(2) = R_7 = q(1-q).$$

Наша основная цель состоит в вычислении энтропии h инвариантной меры Эрдеша μ.

3. Вспомогательные обозначения и определения

Рассмотрим граф с тремя вершинами 0, 1, 2 и ребрами 00, 01, 02, 10, 21. Спектральный радиус матрицы инцидентности этого графа равен β.

Сопоставим ребру ij матрицу $qp(ij)$, где $0 < q < 1$, $\alpha = p/q$,

$$p(00) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad p(01) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p(02) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p(10) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$p(21) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Любой конечный путь графа есть конечное слово с буквами из алфавита $\{0, 1, 2\}$. Каждому пути в графе отвечает произведение матриц $qp(ij)$ вдоль этого пути. Для простых циклов с базовой вершиной 2 это произведение есть число, так как матрица $p(21)$ — это строка, а матрица $p(02)$ — столбец.

Каждое бесконечное слово, после первого попадания в 2, имеет вид $b_1 2 b_2 \ldots$ Все слова b_j устроены так: $1(0)^{k_1+1} \ldots 1(0)^{k_s+1}$, $k_j \geqslant 0$.

Рассмотрим простые циклы $1(0)^{k+1}1$. Произведение матриц $qp(ij)$ вдоль такого цикла равно $q^{k+2}p(10)p(00)^k p(01)$. Назовем простой цикл распадным, если определитель матрицы этого цикла равен 0 и нераспадным в противном случае.

Для нераспадного цикла $k = 3n+1$, $n = 0, 1, \ldots$, и произведение матриц $qp(ij)$ вдоль такого цикла равно $q^{k+2}A(n)$, где

$$A(n) = p(10)p(00)^k p(01) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha^4[n]_{\alpha^2} & \alpha^3[n+1]_{\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

В этом выражении

$$[n]_{\alpha^2} = \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1}.$$

Простейший распадный цикл получается при $k = 0$. Ему отвечает матрица $q^2(1,0)^\top(\alpha, 1)$. При $k = 3n+2$, $k = 3n+3$ матрица распадного цикла равна

$$q^{k+2}(1, \alpha^3[n+1]_{\alpha^2})^\top(\alpha, 1) = q^{k+2}A(n)(0,1)^\top(\alpha, 1).$$

Введем обозначения

$$p_1(n_1 n_2 \ldots n_s) = (\alpha, 1)A(n_1)\ldots A(n_s)(1,0)^\top,$$
$$p_2(n_1 n_2 \ldots n_s) = (\alpha, 1)A(n_1)\ldots A(n_s)(0,1)^\top.$$

Обозначим через b^ε путь из 1 в 1 с ровно одним распадным циклом на конце:

$$b^\varepsilon = 1(0)^{k_1+1}1(0)^{k_2+1}\ldots 1(0)^{k_{s-1}+1}1(0)^{k_s+1},$$

где $k_j = 3n_j + 1$, $j = 1, \ldots, s-1$, $k_s \neq 3n_s + 1$, $s \geqslant 1$.

Обозначим теперь через b^* путь из 1 в 2 без распадных циклов:

$$b^* = 1(0)^{k_1+1}1(0)^{k_2+1}\ldots 1(0)^{k_{s-1}+1}1(0)^{k_s+1}2.$$

Здесь также $k_j = 3n_j + 1$, $j = 1, \ldots, s-1$.

Все простые циклы из 2 можно представить в виде $b = b^+ b^*$. При этом b^+ либо пустое слово, либо $b^+ = b_1^\varepsilon \ldots b_t^\varepsilon$, $t \geqslant 1$.

Определим α-вес $p_\alpha(b^\varepsilon)$ пути b^ε как

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = (\alpha, 1)A(n_1)\ldots A(n_s)(0,1)^\top = p_2(n_1 \ldots n_s),$$

если для распадного цикла $k_s = 3n_s + 2$, $k = 3n_s + 3$, $n_s \geqslant 0$.

Если для последнего распадного цикла $k_s = 0$, то

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = (\alpha, 1)A(n_1)\ldots A(n_{s-1})(1,0)^\top = p_1(n_1 \ldots n_{s-1}), \qquad s > 1.$$

Если же $s = 1$, $k_1 = 0$, то

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = (\alpha, 1)(1,0)^\top = \alpha.$$

Для пути b^* также определим α-вес $p_\alpha(b^*)$. Тогда для $k_s = 3n_s + 1$, $k_s = 3n_s$

$$p_\alpha(b^*) = p_1(n_1 \ldots n_s) = (\alpha, 1)A(n_1)\ldots A(n_s)(1,0)^\top, \qquad n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 0.$$

При $k_s = 3n_s - 1$

$$p_\alpha(b^*) = p_1(n_1 \ldots n_s) = (\alpha, 1)A(n_1)\ldots A(n_s)(1,0)^\top, \qquad n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 1.$$

Пусть $\varphi(b)$ есть длина пути b, то есть число ребер пути b. Множитель $q^{\varphi(b)}$ назовем q-весом пути b. Этот вес мультипликативен относительно умножения путей.

Веса путей b^ε, b^* определим как

$$p(b^\varepsilon) = q^{\varphi(b^\varepsilon)} p_\alpha(b^\varepsilon),$$
$$p(b^*) = q^{\varphi(b^*)} p_\alpha(b^*).$$

Вес пустого пути полагаем равным 1.

Из всех определений вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. *Условная мера Эрдеша простого цикла из 2 в 2 при условии, что траектории начинаются в 2, равна*

$$p(b) = qp(b^+)p(b^*).$$

Введем обозначения

$$\Phi_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 0} (zq)^{3(n_1 + \ldots + n_s + s)} p_1(n_1 \ldots n_s),$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 0} (zq)^{3(n_1 + \ldots + n_s + s)} p_2(n_1 \ldots n_s).$$

Введем матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$A_0(n) = CA(n)C.$$

Тогда

$$A_0(n) = \begin{pmatrix} \alpha^3[n+1]_{\alpha^2} & \alpha^4[n]_{\alpha^2} \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Теперь введем матрицы $M(0)$, $M(1)$, полагая

$$M(0) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M(1) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство

$$A_0(n) = M(0)^n M(1).$$

Именно это представление приводит к представлению произведения $A_0(n_1)\dots A_0(n_s)$ как произведения матриц $M(0)$, $M(1)$ вдоль пути в бинарном дереве. Действительно,

$$\begin{aligned} p_1(n_1\dots n_s) &= (\alpha,1)CA_0(n_1)\dots A_0(n_s)C(1,0)^\top \\ &= \alpha(1,\alpha)M(0)^{n_1}M(1)\dots M(0)^{n_s}(0,1)^\top. \end{aligned}$$

Каждое слово $(0)^{n_1}1(0)^{n_2}1\dots(0)^{n_s} = d_{n-1} = (i_1\dots i_{n-1})$ есть двоичное слово длины $n_1+\dots+n_s+s-1 = n-1$. Поэтому можно считать, что $p_1(n_1\dots n_s) = p_1(d_{n-1})$. Если $n=1$, то $s=1$, $n_1=0$, и $p_1(0) = \alpha^2 = \alpha(1,\alpha)(0,1)^\top$.

Пусть $M = M(0)+M(1)$, D_{n-1} есть множество двоичных слов длины $n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n_1\geqslant 0,\dots,n_s\geqslant 0}(zq)^{3(n_1+\dots+n_s+s)}p_1(n_1\dots n_s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d\in D_{n-1}}(zq)^{3n}p_1(d) = \alpha(1,\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}(zq)^{3n}M^{n-1}(0,1)^\top \\ &= \alpha(1,\alpha)(zq)^3(Id-(zq)^3M)^{-1}(0,1)^\top. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} p_2(n_1\dots n_s) &= (\alpha,1)CA_0(n_1)\dots A_0(n_s)C(0,1)^\top \\ &= (1,\alpha)M(0)^{n_1}M(1)\dots M(0)^{n_s}(\alpha^3,1)^\top \\ &= p_2(n_1\dots n_s) = p_2(d_{n-1}), \qquad n>1. \end{aligned}$$

При $n=1$

$$p_2(0) = \alpha^3+\alpha = (1,\alpha)(\alpha^3,1)^\top.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_2(z) = (1,\alpha)(zq)^3(Id-(zq)^3M)^{-1}(\alpha^3,1)^\top.$$

4. Производящая функция $\varphi(b)$

Производящая функция длины пути $\varphi(b)$, $b = b^+b^*$, равна

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \sum_b z^{\varphi(b)}p(b) &= q\sum_{b^+,b^\varepsilon}(zq)^{\varphi(b^+b^*)}p_\alpha(b^+)p_\alpha(b^*) \\ &= q\sum_{b^+}(zq)^{\varphi(b^+)}p_\alpha(b^+)\sum_{b^*}(zq)^{\varphi(b^*)}p_\alpha(b^*). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) = \sum_{b^+}(zq)^{\varphi(b^+)}p_\alpha(b^+) &= \sum_{b^+}(zq)^{\varphi(b^+)}p_\alpha(b^+) \\ &= 1+\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{b_1^\varepsilon}\dots\sum_{b_t^\varepsilon}(zq)^{\varphi(b_1^\varepsilon)}p(b_1^\varepsilon)\dots(zq)^{\varphi(b_t^\varepsilon)}p(b_t^\varepsilon) \\ &= 1+\sum_{t=1}^{\infty}(\Phi^\varepsilon(z))^t = \frac{1}{1-\Phi^\varepsilon(z)}. \end{aligned}$$

В этой формуле

$$\Phi^\varepsilon(z) = \sum_{b_t^\varepsilon}(zq)^{\varphi(b^\varepsilon)}p(b^\varepsilon).$$

Для того, чтобы получить $\Phi^+(z)$, вычислим сначала $\Phi^\varepsilon(z)$. По определению,

$$b^\varepsilon = 1(0)^{k_1+1}1(0)^{k_2+1}\dots 1(0)^{k_{s-1}+1}1(0)^{k_s},$$

где $k_j = 3n_j+1$, $j=1,\dots,s-1$, $k_s \neq 3n_s+1$, $s\geqslant 1$.

При этом множество путей b^ε можно разбить на три группы:

(1) $k_s = 0$;

(2) $k_s = 3n_s+2$;

(3) $k_s = 3n_s+3$, $n_s\geqslant 0$.

Для двух последних случаев α-вес b^ε один и тот же и равен

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = p_2(n_1\dots n_s), \qquad n_1\geqslant 0,\dots,n_s\geqslant 0.$$

Если $k_s = 0$, то при $s>1$ α-вес соответствующего пути равен

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = p_1(n_1\dots n_{s-1}), \qquad n_1\geqslant 0,\dots,n_{s-1}\geqslant 0.$$

При $s=1$, $k_s=0$ мы получаем, что

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = \alpha.$$

Поэтому

$$\sum_{b^\varepsilon}z^{\varphi(b^\varepsilon)}p(b^\varepsilon) = S_0+S_2+S_3,$$

где S_0, S_2, S_3 соответствуют трем различным типам путей b^ε, где $k_s = 0$, $k_s = 3n_s + 2$, $k_s = 3n_s + 3$ соответственно.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} S_0(z) &= \alpha(zq)^2 + \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_{s-1} \geqslant 0} (zq)^{k_1 + \ldots + k_{s-1} + 2s} p_1(n_1 \ldots n_{s-1}) \\ &= \alpha(zq)^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 0} (zq)^{3(n_1 + \ldots + n_s + s) + 2} p_1(n_1 \ldots n_s) \\ &= \alpha(zq)^2 + (zq)^2 \Phi_1(z). \end{aligned}$$

Далее,

$$S_2(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 0} (zq)^{3(n_1 + \ldots + n_s + s) + 1} p_2(n_1, \ldots, n_s) = (zq)\Phi_2(z).$$

Наконец,

$$S_3(z) = (zq)^2 \Phi_2(z).$$

Проводя все вычисления, получаем, что

$$\begin{aligned} \Phi^\varepsilon(z) &= S_0(z) + S_2(z) + S_3(z) \\ &= \alpha(zq)^2 + (zq)^2 \Phi_1(z) + (zq)(1 + (zq))\Phi_2(z). \end{aligned}$$

Теперь вычислим

$$\Phi^*(z) = \sum_{b^*} z^{\varphi(b^*)} p(b^*) = V_1 + V_0 + V_{-1},$$

также соответствующую трем типам путей b^*, где $k_s = 3n_s + 1$, $k_s = 3n_s$, $n_s \geqslant 0$, и $k_s = 3n_s - 1$, $n_s \geqslant 1$. Тогда

$$V_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 0} (zq)^{k_1 + k_2 + \ldots + k_s + 2s} p_1(n_1, \ldots, n_s) = \Phi_1(z).$$

Далее,

$$V_0(z) = (zq)^{-1} \Phi_1(z).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} V_{-1}(z) &= (zq)^{-2} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_{s-1} \geqslant 0, n_s \geqslant 1} (zq)^{3(n_1 + \ldots + n_s + s)} p_1(n_1 \ldots n_s) \\ &= (zq)^{-2} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 0} (zq)^{3(n_1 + \ldots + n_s + s)} p_1(n_1 \ldots n_s) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_{s-1} \geqslant 0} (zq)^{3(n_1 + \ldots + n_s + s)} p_1(n_1 \ldots 0) \right). \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$p_1(n_1, \ldots, n_{s-1}, 0) = \alpha p_1(n_1 \ldots n_{s-1}), \qquad s \geqslant 2.$$

При $s = 1$

$$p_1(0) = \alpha^2.$$

Поэтому

$$V_{-1}(z) = [(zq)^{-2} - \alpha(zq)]\Phi_1(z) - \alpha^2(zq).$$

Отсюда получаем, что производящая функция для $\varphi(b^*)$ есть

$$\Phi^*(z) = [1 + (zq)^{-1} + (zq)^{-2} - \alpha(zq)]\Phi_1(z) - \alpha^2(zq).$$

Производящая функция $\Phi(z)$ равна

$$\Phi(z) = q\frac{\Phi^*(z)}{1 - \Phi^\varepsilon(z)} = \frac{qG_1(x)}{G_2(x)},$$

где

$$\begin{aligned} G_1(x) &= (1-q)^2 qz^2(1 + (1-q)^2 z^2 - (1-q)^2 z^3), \\ G_2(x) &= 1 - z^3 - q^3(2 - 3z)z^4 + q^4(1 - z)z^4 \\ &\quad + q^2 z^2(1 - z + z^2 - 3z^3) - q(z + z^2 - 2z^3 - z^5). \end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что

$$\Phi(1) = \sum_b p(b) = 1.$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что

$$\mathbf{E}\varphi(b) = \Phi'(1) = \frac{3 - 7q + 12q^2 - 11q^3 + 5q^4 - q^5}{(1-q)^2 q}.$$

Заметим, что $\mathbf{E}\varphi(b) + 1$ есть среднее время первого возвращения из состояния 2 в 2, и для инвариантной меры Эрдеша μ справедливо равенство

$$\mu(2) = \frac{L(2)R(2)}{LR} = \frac{(1-q)^2 q}{3 - 6q + 10q^2 - 10q^3 + 5q^4 - q^5} = \frac{1}{\mathbf{E}\varphi(b) + 1}.$$

Теперь вычисление энтропии инвариантной меры Эрдеша h сводится к вычислению энтропии H условного распределения на пространстве простых циклов с базовой вершиной 2, так как

$$h = \mu(2)H = \frac{H}{\mathbf{E}\varphi(b) + 1}.$$

5. Вычисление энтропии распределения на пространстве простых циклов с базовой вершиной 2

Наша ближайшая цель состоит в получении удобной формулы для энтропии H распределения на пространстве простых циклов с базовой вершиной 2.

По определению,

$$H = -\sum_b \log(qp(b))qp(b)$$
$$= -\log q \sum_b (1+\varphi(b))qp(b) - q\sum_b \log(p_\alpha(b))p(b)$$
$$= -(1+E\varphi(b))\log q - q\sum_b (\log(p_\alpha(b^+)) + \log(p_\alpha(b^*)))p_\alpha(b^+)q^{\varphi(b^+)}p_\alpha(b^*)q^{\varphi(b^*)}.$$

Вычислим отдельно последнюю сумму:

$$W = \sum_b (\log(p_\alpha(b^+)) + \log(p_\alpha(b^*)))p_\alpha(b^+)q^{\varphi(b^+)}p_\alpha(b^*)q^{\varphi(b^*)}$$
$$= W^+P^* + W^*P^+,$$

где

$$W^+ = \sum_b \log(p_\alpha(b^+))p_\alpha(b^+)q^{\varphi(b^+)}, \qquad P^+ = \sum_{b^+} p(b^+)q^{\varphi(b^+)} = \Phi^+(1),$$
$$W^* = \sum_b \log(p_\alpha(b^*))p_\alpha(b^*)q^{\varphi(b^*)}, \qquad P^* = \sum_{b^*} p(b^*)q^{\varphi(b^*)} = \Phi^*(1).$$

При этом

$$P^+P^* = \Phi^+(1)\Phi^*(1) = \frac{1}{q}\Phi(1) = \frac{1}{q}.$$

Теперь

$$W^+ = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{b_j^\varepsilon}\log(p_\alpha(b_j^\varepsilon))q^{\varphi(b_j^\varepsilon)}p_\alpha(b_j^\varepsilon)\right)(P^\varepsilon)^{t-1} = \frac{W^\varepsilon}{(1-P^\varepsilon)^2},$$

где

$$W^\varepsilon = \sum_{b^\varepsilon}\log(p_\alpha(b^\varepsilon))p_\alpha(b^\varepsilon)q^{\varphi(b^\varepsilon)}, \qquad P^\varepsilon = \sum_{b^\varepsilon} p_\alpha(b^\varepsilon)q^{\varphi(b^\varepsilon)}.$$

Кроме того, было показано, что

$$P^+ = \frac{1}{1-P^\varepsilon} = \Phi^+(1).$$

Поэтому

$$W^+ = W^\varepsilon(P^+)^2.$$

Отсюда

$$W = P^+(W^\varepsilon P^+P^* + W^*) = P^+\left(\frac{1}{q}W^\varepsilon + W^*\right).$$

Мы воспользовались здесь тем, что $P^+P^* = 1/q$. Поэтому

$$H = -(1+\mathbf{E}\varphi(b))\log q - qW = -(1+\mathbf{E}\varphi(b))\log q - P^+(W^\varepsilon + qW^*).$$

Положим

$$\sigma_1 = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n_1\geqslant 0,\dots,n_s\geqslant 0}\log(p_1(n_1,\dots,n_s))p_1(n_1,\dots,n_s)q^{3(n_1+\dots+n_s+s)},$$
$$\sigma_2 = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n_1\geqslant 0,\dots,n_s\geqslant 0}\log(p_2(n_1,\dots,n_s))p_2(n_1,\dots,n_s)q^{3(n_1+\dots+n_s+s)}.$$

По определению, α-вес пути b^ε равен

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = p_2(n_1,\dots,n_s), \quad k_s = 3n_s+2, \quad k_s = 3n_s+3, \quad n_s \geqslant 0,$$
$$p_\alpha(b^\varepsilon) = p_1(n_1,\dots,n_{s-1}), \quad k_s = 0, \quad s > 1.$$

Если же $s = 1$, $k_s = 0$, то

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = \alpha.$$

Поэтому, разбивая, как и раньше, выражение для W^ε на три слагаемых, получаем, что

$$W^\varepsilon = q^2\alpha\log(\alpha) + q^2\sigma_1 + (q+q^2)\sigma_2.$$

Теперь рассмотрим пути из 1 в 2 без распадных циклов. Такой путь имеет вид

$$b^* = 1(0)^{k_1+1}1(0)^{k_2+1}\dots 1(0)^{k_s+1}2,$$

и для таких путей α–вес, соответственно, равен

$$p_\alpha(b^*) = p_1(n_1,\dots,n_s), \quad n_1\geqslant 0,\dots,n_s\geqslant 0, \quad k_s = 3n_s+1, \quad k_s = 3n_s,$$
$$p_\alpha(b^*) = p_1(n_1,\dots,n_s), \quad n_1\geqslant 0,\dots,n_s\geqslant 1, \quad k_s = 3n_s-1.$$

Аналогично, формула для W^* переписывается в виде

$$W^* = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n_1\geqslant 0,\dots,n_s\geqslant 0}\log(p_1(n_1,\dots,n_s))p_1(n_1,\dots,n_s)q^{3(n_1+\dots+n_s+s)}$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n_1\geqslant 0,\dots,n_s\geqslant 0}\log(p_1(n_1,\dots,n_s))p_1(n_1,\dots,n_s)q^{3(n_1+\dots+n_s+s)-1}$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n_1\geqslant 0,\dots,n_s\geqslant 1}\log(p_1(n_1,\dots,n_s))p_1(n_1,\dots,n_s)q^{3(n_1+\dots+n_s+s)-2}.$$

Справедливо равенство

$$W^* = \sigma_1 + \frac{1}{q}\sigma_1 + \frac{1}{q^2}(\sigma_1 - \sigma_1^0),$$

где

$$\sigma_1^0 = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n_1\geqslant 0,\dots,n_{s-1}\geqslant 0}\log(p_1(n_1,\dots,n_{s-1}0))p_1(n_1,\dots,n_{s-1}0)q^{3(n_1+\dots+n_{s-1}+s)}.$$

Напомним, что

$$p_1(n_1,\dots,n_{s-1},0) = \alpha p_1(n_1,\dots,n_{s-1}), \qquad s\geqslant 2.$$

При $s = 1$

$$p_1(0) = (\alpha, 1)A(0)(1,0)^{\top} = \alpha^2.$$

Поэтому

$$\sigma_1^0 = 2\alpha^2 q^3 \log\alpha + q^3\alpha(\log\alpha)\Phi_1(1) + \alpha q^3 \sigma_1.$$

Отсюда получаем, что

$$H = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c,$$

где

$$c_1 = -\frac{2 + 3q - q^2 + 4q^3 + 3q^4 - 5q^5 + 4q^6 - 2q^7}{q - q^4},$$

$$c_2 = -\frac{q(2 + 3q - q^2 + q^4 - q^5)}{1 - q^3},$$

$$c = \frac{a\log(1-q) - b\log q}{(1-q)^2 q(1 + q + q^2)}.$$

При этом

$$a = 4q - 12q^2 + 8q^3 + 8q^4 - 16q^5 + 14q^6 - 8q^7 + 2q^8,$$

$$b = -3 - q + 5q^2 - 2q^3 - 13q^4 + 22q^5 - 18q^6 + 9q^7 - 2q^8.$$

При $q = 1/2$ эти константы равны

$$c = \frac{49}{4}, \quad c_1 = -\frac{35}{4}, \quad c_2 = -\frac{15}{8}.$$

6. Процедура ускорения сходимости рядов

Итак, для вычисления энтропии необходимо вычислять ряды

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 0} \log(p_1(n_1, \ldots, n_s))\, p_1(n_1, \ldots, n_s)\, q^{3(n_1 + \ldots + n_s + s)} \\
&= 2\alpha^2 \log\alpha + q^3 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{d_{n-1} \in D_{n-1}} \log(p_1(d_{n-1}))\, p_1(d_{n-1})\, q^{3n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)} q^{3(n+1)}, \\
\sigma_2 &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_s \geqslant 0} \log(p_2(n_1, \ldots, n_s))\, p_2(n_1, \ldots, n_s)\, q^{3(n_1 + \ldots + n_s + s)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(2)} q^{3(n+1)}.
\end{aligned}$$

Таблица 1.

q	h_d	q	h_d
0,5	0,9804093195347986, $n = 15$	0,25	0,8574481002105665, $n = 15$
	0,9804093195347315, $n = 20$		0,8574481002105663, $n = 20$
0,45	0,9771520623050443, $n = 15$	0,2	0,7800100418650452, $n = 15$
	0,9771520623047869, $n = 20$		0,7800100418650452, $n = 20$
0,4	0,9664343579215019, $n = 15$	0,15	0,6721849172201769, $n = 15$
	0,9664343579213361, $n = 20$		0,6721849172201769, $n = 20$
0,35	0,9456243417042867, $n = 15$	0,1	0,5254251828886658, $n = 15$
	0,9456243417042505, $n = 20$		0,5254251828886658, $n = 20$
0,3	0,9108593564128254, $n = 15$	0,05	0,32442148594240267, $n = 15$
	0,9108593564128222, $n = 20$		0,32442148594240294, $n = 20$

В этих формулах

$$k_n^{(i)} = \sum_{d \in D_n} \log(p_i(d))\, p_i(d), \qquad i = 1, 2,$$

$$k_0^{(1)} = 2\alpha^2 \log\alpha,$$

$$k_0^{(2)} = (\alpha^3 + \alpha)\log(\alpha^3 + \alpha).$$

Основная трудность при вычислении H состоит в том, что ряды $\sum_{i=1}^{\infty} k_n^{(i)} q^{3n}$ сходятся так медленно, что непригодны для численного счета. Следуя подходу Александера–Цагира (см. [7]), преобразуем этот ряд для ускорения сходимости.

Пусть имеется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n$. Рассмотрим $s(\alpha)$ — максимальное по модулю собственное значение матрицы $M = M(0) + M(1)$. Тогда

$$s(\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \sqrt{1 + 2\alpha - \alpha^2 - \alpha^4 + 2\alpha^5 + \alpha^6}\right).$$

Введем величину

$$\mu_n = k_n - s(\alpha) k_{n-1}.$$

Тогда

$$(1 - s(\alpha)x)\left(\sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x^n.$$

Рассмотрим

$$\lambda_n = 2\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} + \mu_n - s(\alpha)\mu_{n-1}.$$

Справедливы следующие соотношения между рядами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n = \frac{1}{1 - s(\alpha)x} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x^n,$$

$$(1 - x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x^n = (1 - s(\alpha)x) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n = \frac{(1 - x)^2}{(1 - s(\alpha)x)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x^n.$$

Вычисление рядов

$$k_n^{(i)} = \sum_{d \in D_n} \log(p_i(d)) p_i(d), \qquad i = 1, 2,$$

по этой схеме было сведено к вычислению рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x^n$, $i = 1, 2$. Последние ряды сходятся намного быстрее.

В табл. 1 приведены значения

$$h_d = \frac{h}{\log \beta} = \frac{H}{(\mathbf{E}\varphi(b) + 1) \log \beta}$$

хаусдорфовой размерности инвариантной меры Эрдеша.

Список литературы

1. Erdős P., On a family of symmetric Bernoulli convolutions. *Amer. J. Math.* (1939) **61**, 974–975.
2. Sidorov N., Vershik A., Ergodic properties of the Erdős measures, the entropy of the goldenshift, and related problems. *Monatsh. Math.* (1998) **126**, 215–261.
3. Lalley S. P., Random series in powers of algebraic integers: Hausdorff dimension of the limit distribution. *J. London Math. Soc.* (1998) **57**, 628–654.
4. Бежаева З. И., Оселедец В. И., Задача Эрдёша–Вершика для золотого сечения. *Функциональный анализ и его приложения* (2010) **44**, №1, 3–13.
5. Grabner P. J., Kirschenhofer P., Tichy R. F., Combinatorial and arithmetical properties of linear numeration systems. *Combinatorica* (2002) **22**, 245–267.
6. Feng De-Jun, The limited Rademacher function and Bernoulli convolutions associated with Pisot numbers. *Adv. Math.* (2005) **195**, 24–101.
7. Alexander I. C., Zagier D., The entropy of a certain infinitely convolved Bernoulli measure. *J. London Math. Soc.* (1991) **44**, 121–134.
8. Бежаева З. И., Оселедец В. И., Меры Эрдёша, софические меры и марковские цепи. *Записки научных семинаров ПОМИ* (2005) **326**, 28–47.

Статья поступила 21.01.2011.