МАТЕМАТИКА

УДК 519.17

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССАХ ГРАФОВ

В.Е. Алексеев [1], ***В.А. Замараев*** [2,1], ***Д.В. Захарова*** [1], ***Д.С. Малышев*** [2,1], ***Д.Б. Мокеев*** [1]

[1] Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского
[2] Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики (Нижегородский филиал)

dsmalyshev@rambler.ru

Поступила в редакцию 22.08.2011

Рассматриваются вопросы структурного описания и асимптотического перечисления наследственных классов графов, исследуется сложность некоторых задач на таких классах.

Ключевые слова: наследственный класс графов, запрещенный подграф, упаковки 3-путей, покрытия 3-путей, независимое множество, факториальный класс, минимальный сложный класс, задача о реберном списковом ранжировании.

Введение

Целью настоящей статьи является подведение итогов работ в области теории графов, выполненных в течение года коллективом ее авторов. Работы велись в разных направлениях, и статья состоит из четырех частей, тематически слабо связанных между собой. Мы не приводим здесь доказательств, развернутое изложение будет дано в отдельных публикациях по каждой теме.

Объединяет части данной статьи то, что в них рассматриваются наследственные классы графов. Множество графов, замкнутое относительно переименования вершин, называется классом графов. Класс, замкнутый относительно удаления вершин, называется наследственным. Эквивалентно – это класс, который можно задать запрещенными подграфами. Если $\mathbf{X}$ – множество графов, то через $Free(\mathbf{X})$ обозначается класс всех графов, не содержащих порожденных подграфов, изоморфных графам из $\mathbf{X}$. Множество графов $\mathbf{Y}$ является наследственным классом тогда и только тогда, когда $\mathbf{Y} = Free(\mathbf{X})$ для некоторого $\mathbf{X}$.

В первой части настоящей статьи рассматриваются графы, у которых для каждого порожденного подграфа совпадают мощности наименьшего покрытия и наибольшей упаковки 3-путей. Они интересны тем, что для них отсутствует разрыв двойственности в соответствующих задачах целочисленного линейного программирования, которые поэтому решаются эффективно. Найдено множество запрещенных подграфов для этого класса графов, и мы предполагаем, что это все минимальные запрещенные подграфы.

Во второй части рассматривается задача о независимом множестве графа. Известно, что эта задача NP-полна для класса субкубических графов. Доказывается ее полиномиальная разрешимость для некоторых подмножеств этого класса.

Третья часть посвящена вопросам асимптотического перечисления графов в наследственных классах. Охарактеризованы все классы, определяемые запрещенными подграфами с не более чем четырьмя вершинами, в которых число графов растет с факториальной скоростью.

В четвертой части рассматривается задача о реберном списковом ранжировании. Найдены все минимальные классы, определяемые не более чем тремя запрещенными порожденными подграфами, для которых эта задача остается NP-полной.

Упаковки и покрытия 3-путей

Пусть $\mathbf{X}$ – множество графов. $\mathbf{X}$-*упаковкой* графа G называется множество его непересекающихся порожденных подграфов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь графу из $\mathbf{X}$. Наибольшее число подграфов в $\mathbf{X}$-упаковке графа G будем обозначать через $pack(\mathbf{X};G)$. $\mathbf{X}$-*покрытием графа* G называется множество вершин, после удаления которых получается граф, не содержащий порожденных подграфов, принадлежащих **X**. Наименьшее число вершин в **X**-покрытии графа G будем обозначать через $cover(\mathbf{X};G)$. В случае, когда **X** состоит из единственного графа H, будем говорить просто об H-покрытии и H-упаковке. В частности, K_2-упаковки – это паросочетания, а K_2-покрытия известны как вершинные покрытия.

Очевидно, всегда выполняется неравенство $pack(\mathbf{X};G) \leq cover(\mathbf{X};G)$. Теорема Кенига утверждает, что для двудольных графов имеет место равенство $pack(P_2;G) = cover(P_2;G)$. Верно и в известном смысле обратное утверждение: если это равенство выполняется для графа G и любого его порожденного подграфа, то этот граф – двудольный.

Граф G будем называть *кениговым* графом относительно множества **X**, если для любого его порожденного подграфа H выполняется равенство $pack(\mathbf{X};H) = cover(\mathbf{X};H)$. Класс всех кениговых графов относительно **X** обозначим через $\mathbf{K}(\mathbf{X})$.

Класс $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ при любом **X** является наследственным и, следовательно, может быть описан множеством минимальных запрещенных (порожденных) подграфов. Для P_2 такую характеризацию дает теорема Кенига вместе с известным критерием двудольности. Кроме этой классической теоремы нам известен еще только один результат такого рода для обыкновенных графов – в работе [14] описаны все запрещенные подграфы для класса $\mathbf{K}(\mathbf{C})$, где **C** – множество всех простых циклов.

Цель настоящей работы – охарактеризовать класс $\mathbf{K}(P_3)$. Мы применяем два подхода к описанию этого класса. Один из них – «конструктивный»: мы показываем, как можно построить любой граф из этого класса с помощью операций подразбиения ребер и замены вершин кликами. При другом подходе ищется стандартное описание наследственного класса запрещенными подграфами. Найденное множество запрещенных подграфов состоит из четырех бесконечных семейств и трех отдельных графов. Неизвестно, является ли оно полным множеством минимальных запрещенных подграфов для $\mathbf{K}(P_3)$, но мы предполагаем, что это так. Далее под кениговым графом подразумеваем кенигов граф относительно P_3.

Операция замены вершины x t-кликой состоит в том, что эта вершина удаляется из графа, к нему добавляются t новых вершин, все они попарно соединяются между собой, и каждая из них соединяется ребром с каждой вершиной, с которой была смежна x. Граф, получаемый из графа G заменой некоторых его вершин степени 1 и 2 кликами (возможно, разного размера), назовем *расширением* графа G.

Лемма 1. *Любое расширение любого дерева является кениговым графом.*

Для описания некоторых графов будем использовать операции сложения + и соединения *. Первая есть просто объединение графов с непересекающимися множествами вершин, во второй к этой сумме добавляются все ребра, соединяющие вершины из разных слагаемых. Обозначим через **A** множество, состоящее из трех графов: $K_1{*}P_4$, $K_1{*}(K_1{+}P_3)$, $K_2{*}O_3$. Введем также обозначения для некоторых бесконечных множеств графов:

B – множество всех циклов, длина которых не кратна 3;

C – множество всех графов, которые можно получить добавлением к циклу, длина которого кратна 3, двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, причем расстояние между этими вершинами цикла должно быть не кратно 3;

D – множество всех графов, которые можно получить добавлением к циклу, длина которого кратна 3, двух вершин, не смежных между собой, одна из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, а другая – с тремя подряд идущими вершинами цикла, причем расстояние между добавленными вершинами должно быть сравнимо с 1 по модулю 3;

E – множество всех графов, которые можно получить из циклов длины, кратной 3, путем замены 2-кликами трех вершин цикла, разбивающих цикл на отрезки, длина каждого из которых не меньше 4 и сравнима с 1 по модулю 3.

Связные графы из класса $\mathbf{K}(P_3)$ удобно разделить на две категории: расширенные циклы и все остальные графы, последние будем называть ординарными. Пусть H – мультиграф без петель. Каждое цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу) этого мультиграфа подразобьем двумя вершинами. Эти вершины будем называть новыми. Заменим каждую новую вершину и каждую вершину степени 1 или 2, не принадлежащую циклу, какой-нибудь кликой. Полученный таким образом граф будем называть 2-расширением исходного мультиграфа.

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны для связного графа G:*

1) *G – ординарный кенигов граф;*

2) *G не содержит порожденных подграфов из множества* $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D} \cup \mathbf{E}$;

3) *G является 2-расширением некоторого мультиграфа, отличного от простого цикла.*

Теорема 2. *Каждое расширения циклов C_6 и C_9 является кениговым графом.*

Независимые множества в графах без вписанных поддеревьев с большим числом листьев

Независимым множеством графа называется любое множество попарно несмежных вершин. *Задача о независимом множестве* состоит в том, чтобы найти в заданном графе независимое множество наибольшей мощности. Эта задача NP-трудна, немало работ посвящено поиску областей эффективности, т.е. классов графов, для которых она может быть решена за полиномиальное время. Такие классы называются НМ-простыми. Часто НМ-простые классы описываются запрещенными подграфами, т.е. подграфами, которых не должно быть в графах из рассматриваемого класса. В настоящей работе представлены бесконечные семейства НМ-простых классов, определяемых запрещенными поддеревьями с ограниченным числом листьев. Направление поиска подсказано высказанной в [12] гипотезой о том, что задача целочисленного линейного программирования с матрицей, все миноры которой ограничены по абсолютной величине некоторой константой, решается за полиномиальное время. Однако найденные нами НМ-простые классы на самом деле не являются подмножествами классов графов с ограниченными минорами матриц инцидентности, поэтому полученные результаты сохраняют свое значение независимо от того, верна или нет упомянутая гипотеза.

Обозначим через $\mathbf{FT}_k$ класс всех графов, у которых отсутствуют поддеревья с k листьями. Используя результаты работы [5], можно доказать следующее утверждение:

Теорема 3. *При любом k класс $\mathbf{FT}_k$ является НМ-простым.*

Мы предполагаем, что этот результат можно усилить. Поддерево некоторого графа назовем *вписанным*, если никакие три его вершины не порождают треугольника в графе. Обозначим через $\mathbf{FT}_k^*$ класс всех графов, не имеющих вписанных поддеревьев с k листьями.

Предположение. *При любом k класс $\mathbf{FT}_k^*$ является НМ-простым.*

В настоящее время нами установлена НМ-простота некоторых подмножеств классов $\mathbf{FT}_k^*$, являющихся пересечениями этих классов с известными классами, для которых задача о независимом множестве остается NP-трудной. Один из них – класс $\mathbf{FC}_3$ всех графов, не содержащих циклов длины 3. Из теоремы 3 следует

Теорема 4. *При любом k класс $\mathbf{FT}_k^* \cap \mathbf{FC}_3$ является НМ-простым.*

Другой известный класс с NP-трудной задачей о независимом множестве – класс субкубических графов (графов, у которых степени вершин не превосходят 3), обозначим его **SC**.

Теорема 5. *При любом k класс $\mathbf{FT}_k^* \cap \mathbf{SC}$ является НМ-простым.*

Оценка числа графов в наследственных классах с запрещенными графами маленького порядка

Рассматриваются помеченные графы с множеством вершин $\{1,2,...,n\}$. В.Е. Алексеев доказал [2], что для любого бесконечного наследственного класса графов $\mathbf{X}$, отличного от класса всех графов, справедливо соотношение

$$\log(\mathbf{X}_n) = (1\text{-}1/c(\mathbf{X}))\frac{n^2}{2} + o(n^2), \qquad (1)$$

где $c(\mathbf{X})$ – натуральное число, называемое *индексом* класса $\mathbf{X}$, а $\mathbf{X}_n$ – множество всех n-вершинных графов из класса $\mathbf{X}$ (логарифм здесь и далее берется по основанию 2). Множество классов, соответствующих определенному значению индекса, называется *слоем*. Так, множество классов с индексом, равным 1, образует *унитарный слой*. Для классов из унитарного слоя соотношение (1) не дает асимптотической оценки величины $\log(\mathbf{X}_n)$, знание которой важно, например, при экономном кодировании графов из класса $\mathbf{X}$ [1]. Для исследования поведения величины $\log(\mathbf{X}_n)$ для классов $\mathbf{X}$ из унитарного слоя используется понятие равновеликости. Два класса графов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ называются *равновеликими*, если существуют положительные числа c', c'' и n_0, такие, что $|\mathbf{Y}_n|^{c'} \le |\mathbf{X}_n| \le |\mathbf{Y}_n|^{c''}$ для любого $n > n_0$. Очевидно, что равновеликость является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности на множестве наследственных классов графов называются *ярусами*. Унитарный слой состоит из бесконечного числа ярусов.

В [3] были выделены первые четыре яруса унитарного слоя, для которых $\log(\mathbf{X}_n)$ по порядку совпадает с 1, $\log n$, n, и $n\log n$. Эти ярусы называются *константным*, *полиномиальным*, *экспоненциальным* и *факториальным* соответственно. В каждом из четырех этих ярусов найдены все минимальные элементы [15]. Кроме того, для первых трёх ярусов в [3] дана полная структурная характеризация. Факториальный ярус является наименьшим, для которого такой характеризации не известно. В то же время этому ярусу принадлежат многие известные классы: реберные графы, интервальные графы, леса, планарные графы, кографы и др.

В [4, 6] исследование факториального яруса начато с изучения конечно определенных классов, то есть таких, у которых множество запрещенных подграфов конечно. До сих пор класс $Free(K_{1,3},C_4)$ был единственным классом, определяемым двумя запрещенными подграфами с четырьмя вершинами, для которого вопрос о принадлежности факториальному ярусу был открыт. В данной работе дается ответ на этот вопрос.

Теорема 6. *Класс* $Free(K_{1,3},C_4)$ *является факториальным.*

Этот результат в совокупности с результатами работ [4, 6] позволяет выделить все факториальные классы, у которых множество запрещенных подграфов состоит из графов с не более чем четырьмя вершинами. Обозначим через **B**, $co(\mathbf{B})$, **P** класс двудольных, кодвудольных и расщепляемых графов соответственно.

Теорема 7. *Пусть* **M** *– множество графов с числом вершин не более четырех и* $Free(\mathbf{M})$ *– не менее чем факториальный класс. Класс* $Free(\mathbf{M})$ *является факториальным тогда и только тогда, когда ни одно из следующих множеств не пусто:* $\mathbf{M}\cap\mathbf{B}$, $\mathbf{M}\cap co(\mathbf{B})$, $\mathbf{M}\cap\mathbf{P}$, $\mathbf{M}\cap Free(K_{1,3},C_4)$, $\mathbf{M}\cap Free(\overline{C_4},\overline{K_3})$.

Конечно определенные минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании

В этом разделе исследуются элементы границы между «простыми» и «сложными» классами графов для некоторой задачи в семействе наследственных классов графов. Формализуем понятия «простого» и «сложного» класса графов. Пусть П – какая-либо NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов назовем П-*простым*, если задача П для графов из этого класса полиномиально разрешима, и П-*сложным* в противном случае. Далее везде предполагаем справедливость неравенства $P\neq NP$ и не включаем его явно в формулировки полученных результатов.

Естественной идеей решения задачи демаркации является поиск *максимальных* П-*простых* и *минимальных* П-*сложных классов*, т.е. тупиковых классов графов соответствующей сложности из рассматриваемой решетки. К сожалению, использование понятия максимального простого класса графов оказывается безрезультатным. Так, В.Е. Алексеев в работе [13] установил, что ни один П-простой класс не является максимальным простым (правда, в [13] это утверждается только про задачу о независимом множестве, но все рассуждения из данной работы легко переносятся на общий случай). Вместе с тем, до недавнего времени про минимальные сложные классы ничего не было известно.

Первый результат о минимальных сложных классах был получен в работе [7]. Там рассматривалась задача распознавания принадлежности наследственному классу графов **X** (задача РП[**X**]) и было доказано, что для любого наследственного класса **X** минимальных РП[**X**]-сложных классов не существует. С другой стороны, в работах [7–10] было показано, что определенные классы графов являются минимальными сложными для некоторых обобщений задач о раскраске – задач о списковом ранжировании (реберного и вершинного вариантов). Здесь рассматривается только задача о реберном списковом ранжировании.

Задача о реберном списковом ранжировании (далее задача РСР) заключается в следующем. Пусть заданы граф G с множеством ребер E и множество $L=\{L(e)\colon e\in E\}$, где каждое $L(e)$ – конечное множество натуральных чисел (цветов, в которые разрешается покрасить ребро e). *L-ранжированием ребер графа G* называется такая раскраска c его вершин, что:

1. $c(e)\in L(e)$ для каждого ребра e;
2. Если $c(e_1)=c(e_2)$, $e_1\neq e_2$, то каждый путь, соединяющий e_1 и e_2, содержит такое ребро e_3, что $c(e_3)>c(e_1)$.

Задача РСР состоит в том, чтобы по данным G и L определить, существует ли L-ранжирование ребер графа G. Уточним, что под РСР-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача РСР решается для графов из этого класса за полиномиальное время при любом множестве L.

К настоящему времени полное описание множества минимальных РСР-сложных классов не известно. Начать движение к получению такого описания можно, рассматривая классы, определяемые небольшим числом запрещенных подграфов. Первый результат такого рода был получен в работе [11].

Теорема 8. *Класс полных графов является единственным минимальным* РСР-*сложным класссом, определяемым одним запрещенным подграфом.*

Обозначим через **BC** множество двудольных графов, содержащих не более чем две вершины в одной из долей. Справедлива следующая

Теорема 9. *Не существует минимальных* РСР-*сложных классов, определяемых двумя запрещенными порожденными подграфами. Класс* **BC** *является единственным минимальным* РСР-*сложным классом, определенным тремя запрещенными порожденными подграфами.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 10-01-00357-а и № 11-01-00107-а, и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.», номер ГК 16.740.11.0310.

Список литературы

1. Алексеев В.Е. Наследственные классы и кодирование графов // В сб.: Проблемы кибернетики. Вып. 39. / Под ред. С.В. Яблонского. М.: Наука, 1982. С.151–164.

2. Алексеев В.Е. Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная математика. 1992. Т. 4. № 2. С. 148–157.

3. Алексеев В.Е. О нижних ярусах решетки наследственных классов графов // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 1997. Т. 4. С. 3–12.

4. Алексеев В.Е., Замараев В.А., Лозин В.В., Мэйхил К. // Тез. докл. XV Нижегородской сессии молодых ученых (математические науки). Красный плес, 25–28 мая 2010 г. С. 16–17.

5. Алексеев В.Е., Захарова Д.В. Независимые множества в графах с ограниченными минорами расширенной матрицы инцидентности // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17. № 1. С. 3–10.

6. Замараев В.А. Оценка числа графов в некоторых наследственных классах // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения». Москва, 1–6 февраля 2010 г. С. 301–303.

7. Малышев Д.С. О минимальных сложных классах графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. № 6. С. 43–51.

8. Малышев Д.С. О минимальных сложных элементах решетки наследственных классов графов // Материалы VII Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям. Москва, 2009. С. 12–16.

9. Малышев Д.С. О тупиковых по вычислительной сложности наследственных классах графов // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». Москва, 1–6 февраля 2010. С. 314–316.

10. Малышев Д.С. Последовательные минимумы решетки наследственных классов графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 4. С. 70–76.

11. Малышев Д.С. Минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Дискетный анализ и исследование операций. 2011. Т. 17. № 1. С. 133–136.

12. Шевченко В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Наука, 1995. 192 с.

13. Alekseev V.E. On easy and hard classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. 2004. V. 132. № 3. P. 17–26.

14. Ding G., Xu Z., Zang W. Packing cycles in graphs, II // Journal of Combinatorial Theory, Ser. B. 2003. V. 87. P. 244–253.

15. Scheinerman E.R., Zito J. On the size of hereditary classes of graphs // Journal Combinatorial Theory, Ser. B. 1994. V. 61. P. 16–39.

SOME RESULTS ON HEREDITARY CLASSES OF GRAPHS

V.E. Alekseev, V.A. Zamaraev, D.V. Zakharova, D.S. Malyshev, D.B. Mokeev

Structural description and asymptotic enumeration of hereditary classes of graphs are considered. The complexity of some problems in such classes is investigated.

Keywords: hereditary class of graphs, forbidden subgraph, P_3-packing, P_3-covering, independent set, factorial class, minimal hard class, edge list-ranking problem.