a version of the Pontryagin maximum principle providing a complete set of necessary optimality conditions. The dominating discount condition is not assumed.

Key words: optimal control; Infinite horizon; infinite horizon transversality condition; necessary conditions of optimality; Lyapunov stability; shadow prices.

Хлопин Дмитрий Валерьевич, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: khlopin@imm.uran.ru.

УДК 517.929

SOME PROBLEMS OF ON-TARGET CONTROL FOR A CLASS OF CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS

© A.L. Chadov, V.P. Maksimov

Key words: abstract functional differential equations; hybrid systems; control problems.

For a functional differential system with continuous and discrete times, the problem of control with respect to an on-target vector-functional is considered. Conditions for the solvability of the problem are obtained.

We consider here a system of functional differential equations (FDE, FDS) that, formally speaking, is a concrete realization of the so-called abstract functional differential equation (AFDE). Theory of AFDE is thoroughly treated in [1, 2]. On the other hand, the system under consideration is a typical one met with in mathematical modeling economic dynamic processes and covers many kinds of dynamic models with aftereffect (integro-differential, delayed differential, differential difference, difference) and impulsive perturbations resulting in system's state jumps at prescribed time moments. The equations of the system contain simultaneously terms depending on continuous time, $t \in [0,T]$, and discrete, $t \in \{0, t_1, ..., t_\mu, T\}$, this is why the term «hybrid» seems to be suitable. As this term is deeply embedded in the literature in different senses, we will follow the authors employing the more definite name «continuous-discrete systems» (CDS), see, for instance [3, 4], and references therein. Notice that in [3] a detailed motivation for studying CDS and examples of applications can be found together with results on stabilization, observability and controllabality for a class of linear CDS with continuous-time dynamics described by ordinary differential equations.

The abstract functional differential system [1]

$$\delta x = \Theta x + f \tag{1}$$

is considered, where $x = col(y,z)$, $y : [0,T] \to R^n$, $z : \{0, t_1, ..., t_N, T\} \to R^\nu$, $\delta x = col(\dot{y}, \Delta z)$, $(\Delta z)(t_i) = z(t_i) - z(0), \Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix}$; $\Theta_{11} : DS^n \to L^n$, $\Theta_{12} : M^\nu \to L^n$, $\Theta_{21} : DS^n \to M^\nu$, $\Theta_{22} : M^\nu \to M^\nu$ are linear operators. Given sets $I = \{0, t_1, ..., t_\mu, T\}, 0 < t_1 < ... < t_\mu < T$; $J = \{0, \tau_1, ..., \tau_m, T\}, 0 < \tau_1 < ... < \tau_m < T$, the spaces DS^n and M^ν are defined as follows. Let us denote the characteristic function of the set A by χ_A. DS^n (see [2]) is the space of functions $y : [0,T] \to R^n$ representable in the form $y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(s)\,ds + \sum_1^m \chi_{[\tau_i,T]}(t)[y(\tau_i) - y(\tau_i - 0)]$; M^ν is the space of functions

$z : I \to R^{\nu}$. All the spaces are equipped with natural norms and are Banach spaces. It is suggested that operator $\Theta : DS^n \times M^{\nu} \to L^n \times M^{\nu}$ is bounded and Volterra.

Consider the abstract control problem (CP)

$$\delta x = \Theta x + Fu + f, \quad x(0) = \operatorname{col}(\alpha, \beta), \quad \ell x = \gamma, \tag{2}$$

where $F : H \to L^n \times M^{\nu}$ is a linear bounded operator defined on a Hilbert space H of control actions, $\ell : DS^n \times M^{\nu} \to R^N$ is a given linear bounded vector-functional (the so-called on-target vector-functional with components $\ell_1, ..., \ell_N$).

We shall obtain conditions of the solvability to (2) on the base of the representation [5] which gives the description of all solutions to $\delta x = \Theta x + Fu + f$ under the initial conditions $y(0) = \alpha \in R^n$, $z(0) = \beta \in R^{\nu}$:

$$x = \mathcal{X} \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma \\ \beta \end{pmatrix} + \mathcal{C}f + \mathcal{C}Fu, \tag{3}$$

where $\mathcal{X}$ is the fundamental matrix and $\mathcal{C}$ is the Cauchy operator [5]. Here the vector $\sigma = \operatorname{col}(\Delta y(\tau_1), \ldots, \Delta y(\tau_m)) \in R^{mn}$ is arbitrary. Applying the vector-functional ℓ to both sides of (3) and taking into account the goal of controlling as reaching the given value $\gamma \in R^N$ for ℓx along the trajectories x of (2), we arrived at the equation

$$\ell\mathcal{X} \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma \\ \beta \end{pmatrix} + \ell\mathcal{C}f + \ell\mathcal{C}Fu = \gamma \tag{4}$$

with respect to $\sigma \in R^{mn}$ and $u \in H$.

We reduce (4) to a linear algebraic system. Note that $\lambda_j = \ell_j \mathcal{C}F$ is a linear bounded functional defined on the Hilbert space H, this is why there exists $v_j \in H$ such that $\lambda_j = \langle v_j, u \rangle$ ($v_j = (\mathcal{C}F)^* \ell_j$, $\cdot^*$ stands for adjoint operator notation).

Let us seek the control $\bar{u}$ in the form of the linear span $\bar{u} = \sum_{i=1}^{N} d_i v_i$ (recall that the space can be considered as the sum $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_N) \oplus [\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_N)]^{\perp}$).

Thus, we have $\ell\mathcal{C}F\bar{u} = Vd$, where $V = \{\langle v_i, v_j \rangle\}_{i,j=1,\ldots,N}$ is the Gram $N \times N$-matrix for the system $v_1, \ldots, v_N \in H$.

Let us write the matrix $\ell\mathcal{X}$ in the form $\ell\mathcal{X} = (\Xi_y|, \Xi_\Delta|, \Xi_z)$ where Ξ_y, Ξ_Δ, Ξ_z have dimensions $N \times n$, $N \times (mn)$, $N \times \nu$ respectively.

Now we arrive at the system

$$\Xi_\Delta \sigma + Vd = \gamma - \ell\mathcal{C}f - \Xi_y \alpha - \Xi_z \beta \tag{5}$$

and formulate the result as the following theorem.

T h e o r e m. *The control problem* (2) *for CDS* (1) *is solvable if and only if the linear algebraic system* (5) *is solvable in* $(mn + N)$*-vector* $col(\sigma, d)$. *Each solution* $col(\sigma_0, d_0)$, $\sigma_0 = col(\sigma_0^1, \ldots, \sigma_0^m)$, *of the system* (5) *defines the control solving CP* (2) *including the impulses* $\sigma_0^k = \Delta y(\tau_k)$, $k = 1, \ldots, m$ *and the control* $\bar{u} \in H$, $\bar{u} = \sum_{j=1}^{N} d_{0j} v_j$.

REFERENCES

1. *Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F.*, Theory of linear abstract functional differential equations and applications // Memoirs on Diff. Equations and Math. Phys. 1996. № 8. P. 1–102.

2. *N.V. Azbelev and L.F. Rakhmatullina*, Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. Hindawi Publishing Corporation, New York; Cairo: 2007.

3. *G.A. Agranovich*, Observability criteria of linear discrete-continuous system // Functional Differential Equations. 2009. V. 16, № 1. P. 35–51.

4. *V.M. Marchenko, O.N. Poddubnaya*, Representation of solutions and relative controllability linear differential-algebraic systems with many aftereffects // Differentsialnye uravneniya. 2006. V. 42. № 6. P. 741–755. (Russian)

5. *V.P. Maksimov, A.L. Chadov*, Hybrid models in economic dynamics problems // Perm University Reports. Economics. Perm. 2011. № 2. P. 52–74. (Russian).

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10–01–96054).

Максимов В.П., Чадов А.Л. Некоторые задачи целевого управления для одного класса непрерывно-дискретных систем. Рассматривается система функционально-дифференциальных уравнений с непрерывным и дискретным временем. Сформулирована общая задача целевого управления, получены условия разрешимости.

Ключевые слова: абстрактное функционально-дифференциальное уравнение; гибридные системы; задачи управления.

Maksimov V.P., Perm state university, Perm, Russian Federation, associated professor, Department of information system and mathematical methods in economy, e-mail: maksimov@econ.psu.ru.

Chadov A.L. Perm state university, Perm, Russian Federation, associated professor, PhD, Department of information system and mathematical methods in economy, e-mail: alchadov@yandex.ru.

УДК 519.6

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИТЯЖЕНИЯ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ О ДОСТИЖИМОСТИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

© **А.Г. Ченцов**

Ключевые слова: компакт; множество притяжения; полуалгебра; ультрафильтр.

Для абстрактной задачи о достижимости в топологическом пространстве (ТП) исследуются множества притяжения (МП), имеющие смысл асимптотических аналогов областей достижимости в задачах теории управления. Получены весьма общие представления МП в классе ультрафильтров (у/ф) пространства обычных решений. При этом используются у/ф широко понимаемых измеримых пространств. Это связано с тем, что в «обычном» случае, когда рассматриваются у/ф семейства всех подмножеств (п/м) упомянутого пространства, мы располагаем конструктивным способом построения только т. н. тривиальных у/ф, соответствующих обычным решениям, в то время как многие важные для теории и приложений асимптотические эффекты реализуются свободными у/ф (имеются в виду у/ф с пустым пересечением всех своих множеств), которые, грубо говоря, «не визуализируемы». Ситуация, однако, меняется в целом ряде случаев измеримых пространств с полуалгебрами и алгебрами множеств. Это делает актуальным исследование конструкций асимптотического (и, вообще говоря, несеквенциального) анализа с применением у/ф тех или иных семейств множеств. Наиболее известные построения у/ф такого типа соответствуют пространствам Стоуна, когда измеримая структура соответствует оснащению пространства обычных решений алгеброй множеств. Ниже приводится вариант, отвечающий оснащению полуалгеброй, а также некоторые «частичные» (с точки зрения описания МП) представления, использующие еще более общие измеримые структуры (т. н. π-системы).