

УДК 517.938

О топологии 3-многообразий, допускающих псевдоаносовские аттракторы и репеллеры¹

В. З. Гринес, О. В. Починка, А. А. Шиловская

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: vgrines@yandex.ru, olga-pochinka@yandex.ru, a.shilovskaia@gmail.com

Аннотация. В работе введен класс G гомеоморфизмов, заданных на трехмерных многообразиях, таких, что их неблуждающие множества состоят из объединения псевдоаносовских аттракторов и репеллеров. Доказано, что несущее многообразие M^3 такого гомеоморфизма диффеоморфно многообразию M_τ , полученному из $M^2 \times [0, 1]$ отождествлением точек $(z, 1)$ и $(\tau(z), 0)$, где τ является либо псевдоаносовским гомеоморфизмом, либо периодическим гомеоморфизмом, сохраняющим слоения некоторого псевдоаносовского гомеоморфизма

Ключевые слова: псевдоаносовский гомеоморфизм, топология многообразия

1. Введение и формулировка результатов

Начиная с 2012 г., в серии работ [1], [3], [4], [2] В.З. Гринеса, Ю.А. Левченко, В.С. Медведева, О.В. Починки рассматривались A -диффеоморфизмы трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых состоит в точности из двумерных базисных множеств. Было установлено, что в этом случае все базисные множества являются объединением ручно вложенных поверхностей, гомеоморфных двумерному тору, а несущее многообразие диффеоморфно многообразию $M_{\hat{J}}$, полученному из $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ отождествлением точек $(z, 1)$ и $(\hat{J}(z), 0)$, где \hat{J} — алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей J , которая либо является гиперболической, либо совпадает с единичной матрицей $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, либо совпадает с матрицей $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Напомним, что *алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм \hat{C} , задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из множества $GL(2, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1 . То есть $\hat{C}(x, y) = (ax + by, cx + dy) \pmod{1}$. Алгебраический автоморфизм \hat{C} называется *гиперболическим*, если собственные значения λ_1, λ_2 матрицы C удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. При этом матрица C также называется *гиперболической*.

В работе [6] Ф. Хертца, М. Хертц и Р. Уреса аналогичный вывод о структуре многообразия получен в предположении, что многообразие M^3 является неприводимым (то есть любая цилиндрически вложенная в M^3 двумерная сфера ограничивает в нем трехмерный шар) и допускает диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$ с инвариантным *аносовским*

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»), Российского фонда научных исследований (гранты N 13-01-12452 офи-м и 15-01-03689-а) и Российского Научного фонда (грант 14-41-00044).

тором (то есть диффеоморфизмы с гладким f -инвариантным подмногообразием, гомеоморфным тору, на фундаментальной группе которого f индуцирует гиперболическое действие). Заметим, что в работах [1], [3], [4], [2], в отличие от [6], не требовалось неприводимости многообразия M^3 , однако аносовский тор необходимо был либо аттрактором, либо репеллером — *аносовским аттрактором или репеллером*.

Настоящая работа является продолжением вышеописанных исследований. Именно, мы выделяем класс трехмерных гомеоморфизмов с так называемыми псевдоаносовскими аттракторами и репеллерами и даем классификацию несущих многообразий для таких отображений. Более детально.

Напомним, что гомеоморфизм $h : M^2 \rightarrow M^2$ называется *псевдоаносовским отображением* (*pA -гомеоморфизмом*), если на поверхности M^2 существует пара h -инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ (устойчивое и неустойчивое соответственно) с множеством седловых особенностей S и трансверсальными мерами μ^s, μ^u такая, что:

- 1) каждая седловая особенность из S имеет не менее трех сепаратрис;
- 2) существует число, называемое дилатацией, $\lambda > 1$ такое, что $\mu^s(h(\alpha)) = \lambda\mu^s(\alpha)$ ($\mu^u(h(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu^u(\alpha)$) для любой дуги α , трансверсальной слоениям \mathcal{F}^s (\mathcal{F}^u).

Коротко все описанные выше свойства записываются так:

$$h(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s) \text{ и } h(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u).$$

Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ гомеоморфизм, заданный на замкнутом трехмерном многообразии M^3 . f -инвариантное множество A называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества A такая, что $f(U) \subset \text{int } U$, $\bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = A$. Аттрактор

для гомеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* R гомеоморфизма f . Далее мы будем рассматривать диффеоморфизмы $f : M^3 \rightarrow M^3$, неблуждающее множество которых лежит на ручно вложенных ориентируемых поверхностях, каждая из которых является аттрактором или репеллером. Множество аттракторов (репеллеров) обозначим за \mathcal{A} (\mathcal{R}). Согласно работе [5], каждая компонента V множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ гомеоморфна прямому произведению поверхности M^2 на интервал и содержит в своем замыкании в точности один аттрактор $A \subset \mathcal{A}$ и один репеллер $R \subset \mathcal{R}$. Тогда несущее многообразие M^3 гомеоморфно фактор-пространству M_τ , полученному из $M^2 \times [0, 1]$ отождествлением точек $(z, 1)$ и $(\tau(z), 0)$, где $\tau : M^2 \rightarrow M^2$ некоторый гомеоморфизм. Таким образом, M_τ есть локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем M^2 .

Обозначим через G класс гомеоморфизмов $f : M^3 \rightarrow M^3$, неблуждающее множество $NW(f)$ которых является объединением *псевдоаносовских аттракторов и репеллеров*, то есть $NW(f)$ состоит из поверхностей S таких, что:

- 1) S есть ручное вложение в M^3 ориентируемой замкнутой поверхности M^2 рода $p > 1$;
- 2) S является либо аттрактором, либо репеллером;
- 3) для некоторого $k \geq 1$ ограничение f на S является псевдоаносовским гомеоморфизмом.

Обозначим через \mathcal{T} множество гомеоморфизмов поверхности M^2 , состоящее из всех псевдоаносовских гомеоморфизмов и всех периодических гомеоморфизмов (конечная степень такого гомеоморфизма является тождественным отображением), сохраняющих слоения некоторого псевдоаносовского гомеоморфизма.

Теорема 1. *Многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f из класса G тогда и только тогда, когда M^3 диффеоморфно многообразию M_τ , где $\tau \in \mathcal{T}$.*

2. Классификация многообразий, допускающих псевдоаносовские аттракторы и репеллеры

В настоящем разделе мы докажем теорему 1

Доказательство.

Необходимость. Пусть многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f из класса G . Не уменьшая общности, будем считать, что $f(A) = A$ для некоторого аттрактора A гомеоморфизма f (в противном случае можно рассмотреть подходящую степень гомеоморфизма f). В силу работы [5] существует непрерывное отображение $E_f : M^2 \times [0, 1] \rightarrow M^3$ такое, что отображения $E_f|_{M^2 \times (0,1)} : M^2 \times (0, 1) \rightarrow M^3 \setminus A$, $E_f|_{M^2 \times \{0\}} : M^2 \times \{0\} \rightarrow A$, $E_f|_{M^2 \times \{1\}} : M^2 \times \{1\} \rightarrow A$ являются гомеоморфизмами. Обозначим через $E_{f,0} : M^2 \rightarrow A$ ($E_{f,1} : M^2 \rightarrow A$) гомеоморфизм такой, что $E_f(z, 0) = E_{f,0}(z)$ ($E_f(z, 1) = E_{f,1}(z)$) для любого $z \in M^2$. Положим $J = E_{f,0}^{-1}E_{f,1} : M^2 \rightarrow M^2$. По построению многообразие M_J гомеоморфно многообразию M^3 посредством гомеоморфизма \check{E}_f , ставящего в соответствие классу эквивалентности $[(z, t)]$, $(z, t) \in M^2 \times [0, 1]$ точку $E_f(z, t)$. Следовательно, гомеоморфизм $g = \check{E}_f f \check{E}_f^{-1} : M_J \rightarrow M_J$ принадлежит классу G и допускает поднятие на $M^2 \times \mathbb{R}$ до гомеоморфизма \tilde{g} такого, что $\tilde{g}(M^2 \times \{0\}) = M^2 \times \{0\}$ и $\tilde{g}|_{M^2 \times \{0\}}$ – псевдоаносовский гомеоморфизм. Обозначим через $g_0 : M^2 \rightarrow M^2$ гомеоморфизм такой, что $\tilde{g}(z, 0) = (g_0(z), 0)$ для любого $z \in M^2$.

Поскольку $M_J = (M^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где Γ – циклическая группа гомеоморфизмов $M^2 \times \mathbb{R}$ образующей $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$ и гомеоморфизм \tilde{g} проектируется на M_J посредством естественной проекции $p_J : M^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$, то либо $\tilde{g}\gamma = \gamma\tilde{g}$, либо $\tilde{g}\gamma = \gamma^{-1}\tilde{g}$. Тогда соответствующие индуцированные в группе $\pi_1(M^2 \times \mathbb{R})$ гомоморфизмы связаны либо соотношением $\tilde{g}_*\gamma_* = \gamma_*\tilde{g}_*$, либо соотношением $\tilde{g}_*\gamma_* = \gamma_*^{-1}\tilde{g}_*$. Так как фундаментальные группы $\pi_1(M^2 \times \mathbb{R})$ и $\pi_1(M^2)$ изоморфны, а действие в группе $\pi_1(M^2)$ однозначно определяет изотопический класс (см., например, [8]), то отображение $g_0 J g_0^{-1}$ изотопно J^k , где $k \in \{-1, 1\}$. Согласно [7], существует гомеоморфизм τ изотопный J такой, что $g_0 \tau g_0 = \tau^k$, при этом τ либо псевдоаносовский гомеоморфизм, либо периодический гомеоморфизм, сохраняющий слоения гомеоморфизма g_0 . Осталось доказать, что многообразия M_J и M_τ гомеоморфны.

Действительно, поскольку τ изотопен J , то существует изотопия $\xi_t : M^2 \rightarrow M^2$, $t \in [0, 1]$, соединяющая отображение $\xi_0 = J\tau^{-1}$ с тождественным отображением ξ_1 . Определим гомеоморфизм $E_J : M^2 \times [0, 1] \rightarrow M^2 \times [0, 1]$ по формуле $E_J(z, t) = (\xi_t(z), t)$. Тогда гомеоморфизм $\check{E}_J : M_\tau \rightarrow M_J$, который ставит в соответствие классу эквивалентности $[(z, t)]$ класс эквивалентности $[E_J(z, t)]$, является искомым.

Достаточность. Для доказательства достаточности построим гомеоморфизм из класса G на многообразии M_τ для любого $\tau \in \mathcal{T}$. Из определения класса \mathcal{T} следует, что существует псевдоаносовским гомеоморфизмом h такой, что τ либо совпадает с h , либо является периодическим гомеоморфизмом, сохраняющим слоения гомеоморфизма h . Обозначим через $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – сдвиг на единицу времени потока, порожденного векторным полем $\dot{r} = \sin(2\pi r)$. Зададим гомеоморфизм $\tilde{f} : M^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}$ формулой $\tilde{f}(z, r) = (h(z), \psi(r))$. Пусть Γ – циклическая группа гомеоморфизмов $M^2 \times \mathbb{R}$ с образующей $\gamma(z, r) = (\tau(z), r - 1)$. Тогда $M_\tau = (M^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$. Обозначим через $p_\tau : M^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M_\tau$ естественную проекцию. Поскольку $h\tau = \tau h$, то гомеоморфизм \tilde{f} проектируется на M_τ гомеоморфизмом $f = p_\tau \tilde{f} p_\tau^{-1}$. \square

Список цитируемых источников

1. *Гринес В. З., Левченко Ю.А.* О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами // Доклады Академии Наук.– 2012.– Т.447, N2.– С.127-129.
Grines V., Levchenko Yu. On topological classification of 3-diffeomorphisms with two-dimensional surface attractors and repellers // Doklady Akademii Nauk.– 2012.– Vol.447, N2.– P.127-129.
2. *Grines, V., Levchenko, Y., Medvedev, V., Pochinka, O.* The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // Nonlinearity.– 2015.– Vol.28 (11).– P. 4081-4102.
3. *Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O.* On the Dynamical Coherence of Structurally Stable 3-diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics.– 2014.– Vol. 19, No.4.– P.506-512.
4. *Гринес В.З., Левченко Ю.А., Починка О.В.* О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами // Нелинейная динамика.– 2014.– Т. 10, N1.– С. 17-33.
Grines V., Levchenko Yu., Pochinka O. On topological classification of diffeomorphisms on 3-manifolds with two-dimensional surface attractors and repellers // Nelineynaya Dinamika.– 2014.– Vol.10, N1.–P. 17-33.
5. *Гринес В. З., Починка О. В., Шиловская А. А.* Топологически псевдокогерентные диффеоморфизмы 3-многообразий // Журнал Средневолжского математического общества.– 2015.– Т.17, N 2.– С. 27-34.
Grines V., Pochinka O., Shilovskaya A. Topologically pseudo-coherent diffeomorphisms on 3-manifolds // Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva.– 2015.– Vol.17, N 2.– P. 27-34.
6. *Hertz F., Hertz M., Ures R.* Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds // Journal of modern dynamics.– 2011.– V. 5, No. 1.– P.185-202.
7. *McCarthy J.* Normalizers and centralizers of pseudo-Anosov mapping classes.–1984.– preprint.
8. *Rolfsen D.* Knots and links. (Mathematics lecture series, vol. 7.) Houston, TX: Publish or Perish.– 1990.– 439 pp.

Получена 09.06.2015