В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, Энергетическая функция градиенто-подобных потоков и проблема топологической классификации, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 856–863

Математические заметки

Том 96 выпуск 6 декабрь 2014

УДК 517.938

Энергетическая функция градиенто-подобных потоков и проблема топологической классификации

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка

Для градиенто-подобных потоков без гетероклинических пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек, все седловые состояния равновесия которых имеют индекс Морса 1 или $n-1$, введено понятие согласованной эквивалентности энергетических функций и показано, что согласованная эквивалентность энергетических функций является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10561

1. Введение и формулировка результатов. Пусть M^n – гладкое замкнутое ориентируемое многообразие. Дважды дифференцируемая функция $\varphi\colon M^n\to\mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, т.е. для любой критической точки $p\in M^n$ определитель матрицы Гессе $(\partial^2\varphi/(\partial x_i\partial x_j))|_p$ в этой точке отличен от нуля. Согласно лемме Морса (см. [1; лемма 2.2]) в некоторой окрестности невырожденной критической точки p существуют локальные координаты $y_1,\dots,y_n$ называемые *координатами Морса*, в которых функция φ имеет вид

$$\varphi(y_1,\dots,y_n)=\varphi(p)-y_1^2-\dots-y_k^2+y_{k+1}^2+\dots+y_n^2.$$

Число $k\in\{0,\dots,n\}$ не зависит от выбора локальных координат и называется *индексом точки p*. Будем обозначать индекс критической точки через $\operatorname{ind}(p)$.

Гладкий поток, индуцированный векторным полем $X=-\operatorname{grad}\varphi$, называется *градиентным потоком*. Если φ – функция Морса, то градиентный поток не имеет замкнутых траекторий, все его состояния равновесия гиперболические и их множество совпадает с множеством критических точек функции φ, а размерность неустойчивого многообразия W^u_p любого состояния равновесия p (*индекс Морса*) равна $\operatorname{ind}(p)$.

В силу работы [2] Смейла (теорема A) градиентный поток может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1-топологии) потоком Морса–Смейла.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м) и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011.)

Напомним, что гладкий поток f^t называется *потоком Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий; а устойчивые и неустойчивые многообразия особых точек и периодических решений пересекаются трансверсально. Поток Морса–Смейла без замкнутых траекторий называется *градиенто-подобным потоком.*

Из работы [2] (теорема B) следует, что для любого градиенто-подобного потока f^t на M^n существует *самоиндексирующаяся энергетическая функция* – такая функция $\varphi\colon M^n \to [0,n]$, что

1) функция φ является функцией Морса;
2) множество критических точек функции φ совпадает с множеством $\Omega(f^t)$;
3) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$;
4) $\varphi(p) = \operatorname{ind}(p)$ для любого $p \in \Omega(f^t)$.

Более того, Смейл в [2] заметил, что существует такая метрика на M^n, в которой поток f^t является градиентным потоком для своей энергетической функции φ.

Мейер в работе [3] обобщил результат Смейла, построив для произвольных потоков Морса–Смейла на M^n энергетическую функцию Морса–Ботта, т.е. такую функцию Морса, гессиан которой в каждой критической точке невырожден в направлении, нормальном к критическому множеству уровня. Более того, из результатов работы Мейера следует, что самоиндексирующиеся энергетические функции можно использовать для топологической классификации градиенто-подобных потоков. Для точной формулировки этого результата напомним, что потоки f^t, f'^t на многообразии M^n называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях. Для разбиения множества потоков Морса–Смейла на классы относительно отношения топологической эквивалентности при помощи самоиндексирующейся энергетической функции мы будем использовать следующее определение топологической эквивалентности функций, принадлежащее Тому [4].

Определение 1. Две гладкие функции $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi'\colon M^n \to \mathbb{R}$ называются *топологически эквивалентными*, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H\colon M^n \to M^n$ и $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $\varphi' H = \chi\, \varphi$.

Мейер доказал, что топологическая эквивалентность самоиндексирующихся энергетических функций является необходимым условием топологической эквивалентности соответствующих потоков Морса–Смейла, а в случае градиенто-подобных потоков на многообразиях размерности $n = 2$ это условие также является достаточным[1].

Привлечение энергетической функции к решению задачи топологической классификации оказывается полезным при математическом моделировании, если энергетическая функция известна из физических сооображений – например, как функция энергии для диссипативных систем в механике, потенциал электростатического поля и т.д.

[1] В [3; предложение] утверждалось, что самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом для потоков Морса–Смейла, заданных на ориентируемых поверхностях. Ошемков и Шарко в работе [5] привели пример топологически неэквивалентных потоков Морса–Смейла (с замкнутыми траекториями) на торе, имеющих эквивалентные самоиндексирующеся энергетические функции, и отметили, что результат Мейера остается верным только для градиенто-подобных потоков

Цель статьи – получить необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности в терминах энергетических функций для систем из класса $G(M^n)$, $n>2$, состоящего из градиенто-подобных потоков без гетероклинических пересечений, все седловые состояния равновесия которых имеют индекс Морса 1 или $n-1$.

Для потока $f^t\in G(M^n)$ обозначим через Ω_i множество неподвижных точек индекса Морса $i\in\{0,1,n-1,n\}$ и через $|\Omega_i|$ – мощность множества Ω_i. Топология многообразия M^n и структура множества состояний равновесия потока f^t определяется следующим предложением.

Предложение 1. *Пусть* $f^t\in G(M^n)$. *Тогда*

$$g=\frac{|\Omega_1\cup\Omega_{n-1}|-|\Omega_0\cup\Omega_n|+2}{2}$$

является целым неотрицательным числом и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $g=0$, *то* M^n *является сферой* S^n;
2) *если* $g>0$, *то* M^n *гомеоморфно связной сумме*[2] g *копий* $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$.

Доказательство предложения 1 проводится по тому же алгоритму, что и доказательство аналогичных утверждений работ [1], теорема, [7], теорема 1.

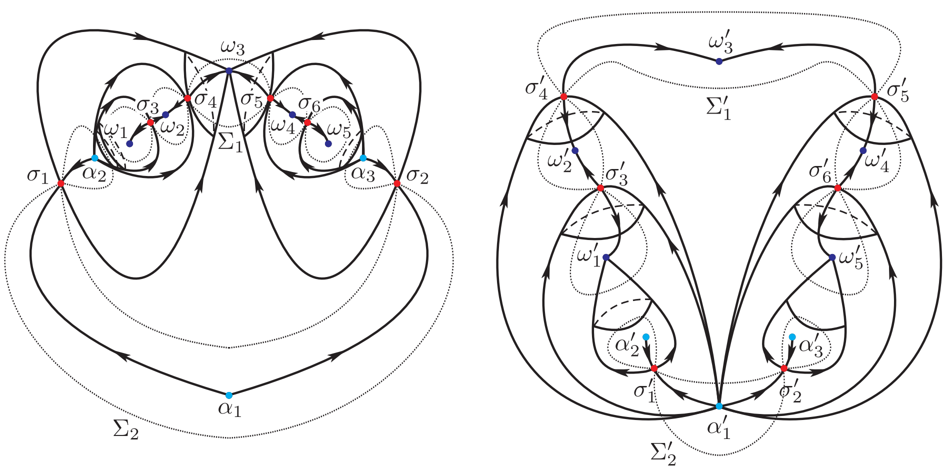

Рис. 1. Фазовые портреты топологически неэквивалентных потоков $f^t,f'^t\in G(S^3)$, самоиндексирующиеся энергетические функции которых эквивалентны

В отличие от двумерной ситуации, уже в классе $G(M^n)$ при $n\geqslant 3$ существуют топологически неэквивалентные потоки, самоиндексирующиеся энергетические функции которых эквивалентны. Примеры фазовых портретов таких потоков f^t, f'^t, принадлежащих классу $G(S^3)$, приведены на рис. 1. Множества критических

[2] *Связной суммой* $M_1^n\sharp M_2^n$ двух ориентируемых связных n-многообразий M_1^n, M_2^n называется многообразие $M_1^n\sharp M_2^n$, полученное удалением из M_1^n, M_2^n шаров $B_1^n\subset M_1^n$, $B_2^n\subset M_2^n$ и склеиванием оставшихся многообразий с краем при помощи гомеоморфизма $\phi\colon \partial B_1^n\to\partial B_2^n$, обращающего естественную ориентацию ∂B_1^n.

уровней самоиндексирующихся энергетических функций φ, φ' (точечным пунктиром на рисунке изображены множества уровня, соответствующие значениям 1 и 2) потоков f^t, f'^t объемлюще гомеоморфны, откуда следует топологическая эквивалентность функций φ, φ'. Потоки f^t, f'^t не являются топологически эквивалентными, поскольку стоковое состояние равновесия ω_3 потока f^t содержит в своем бассейне 4 неустойчивых сепаратрисы седловых состояний равновесия, а бассейн любого стока потока f'^t содержит не более двух сепаратрис.

Наличие таких примеров приводит к необходимости введения дополнительных инвариантов, которые бы позволяли различать топологически неэквивалентные потоки, имеющие эквивалентные энергетические функции. Для описания инварианта, предлагающегося в этой статье, представим многообразие M^n в виде объединения трех связных множеств: аттрактора $A = W^u_{\Omega_1\cup\Omega_0}$, репеллера $R = W^s_{\Omega_{n-1}\cup\Omega_n}$ и множества $V = M^n \setminus (A\cup R)$, состоящего из блуждающих траекторий потока f^t, идущих от A к R. Следуя [6], будем называть V *характеристическим многообразием*.

Пусть $\varphi\colon M^n \to [0,n]$ – самоиндексирующаяся энергетическая функция для f^t. Гиперповерхность Σ уровня $c \in (1, n-1)$ назовем *характеристической секущей* (она пересекает каждую траекторию характеристического пространства в точности в одной точке).

Определение 2. Самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' для потоков $f, f'^t \in G(M^n)$ назовем *согласованно эквивалентными*, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H\colon M^n \to M^n$ и $\chi\colon [0,n] \to [0,n]$ такие, что

1) $\varphi' H = \chi\,\varphi$;
2) $H(W^s_{\Omega_1}\cap\Sigma) = W^s_{\Omega'_1}\cap H(\Sigma)$, $H(W^u_{\Omega_{n-1}}\cap\Sigma) = W^u_{\Omega'_{n-1}}\cap H(\Sigma)$ для некоторой характеристической секущей Σ.

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Потоки $f^t, f'^t \in G(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их энергетические функции согласованно эквивалентны.*

В п. 3 выделяется класс $G_0(M^n) \subset G(M^n)$ потоков, для которых из эквивалентности самоиндексирующихся функций следует их согласованная эквивалентность, и, таким образом, самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом. Класс $G_0(M^n)$ состоит из потоков, индекс Морса всех седловых состояний равновесия которых равен 1. Из [7; теорема 1] следует справедливость следующего предложения.

Предложение 2. *Для любого потока $f^t \in G_0(M^n)$ неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ содержит ровно один источник, $k \geqslant 0$ седел и $k+1$ сток, а объемлющее многообразие M^n диффеоморфно n-сфере.*

Основным результатом п. 3 является следующая теорема.

Теорема 2. *Потоки $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их самоиндексирующиеся энергетические функции.*

Проблема топологической классификации потоков Морса-Смейла на многообразиях размерности три и выше решалась, в частности, в работах [8]–[11]. Флейтасом в [9] получена топологическая классификация полярных потоков[3] на многообразиях размерности 2 и 3 при помощи диаграмм Хегора. Уманским в [8] получена топологическая классификация потоков Морса–Смейла на трехмерных многообразиях с конечным числом гетероклинических орбит. В этой работе для классификации использовался комбинаторный инвариант, описывающий взаимное расположение особых траекторий потока, аналогичный схеме динамической системы, введенной Леонтович и Майером для классификации потоков с конечным числом состояний равновесия на сфере S^2. Пилюгиным в [10] замечено, что в случае $M^n = S^n$, $n \geqslant 3$, класс $G(S^n)$ совпадает с классом всех градиенто-подобных потоков без гетероклинических пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек и получена полная топологическая классификация таких потоков при помощи диаграммы Смейла. Пришляк в [11] получил полную топологическую классификацию потоков Морса–Смейла на трехмерных многообразиях. Инвариант, введенный в работе [11], так же, как и инвариант Флейтаса, включает информацию о следах двумерных сепаратрис на характеристической секущей.[4] Таким образом, теорема 1 фактически является обобщением упомянутых выше работ на случай потоков из класса $G(M^n)$.

2. Доказательство теоремы 1. Докажем вначале *необходимость*. Пусть φ и φ' – самоидексирующиеся энергетические функции топологически эквивалентных потоков Морса–Смейла f^t и f'^t из множества $G(M^n)$ и $h\colon M^n \to M^n$ – гомеоморфизм, преобразующий траектории потока f^t в траектории потока f'^t. Тогда из определения самоидексирующейся функции и свойств гомеоморфизма h следует, что для любого состояния равновесия p потока f^t имеет место равенство $\varphi(p) = \varphi'(h(p))$. Поэтому выберем в качестве гомеоморфизма χ тождественное отображение и сконструируем гомеоморфизм H, удовлетворяющий определению 2.

Пусть $x \in M^n$ – произвольная точка, отличная от состояния равновесия потока f^t. Обозначим через l_x траекторию потока f^t (f'^t), проходящую через точку x, и через $\alpha(l_x)$ (соответственно $\omega(l_x)$) – состояние равновесия, являющееся α-предельным (соответственно ω-предельным) множеством траектории l_x. Положим $x' = h(x)$. Тогда $l_{x'} = h(l_x)$. Из свойств гомеоморфизма h следует, что

$$\alpha(l_{x'}) = h(\alpha(l_x)), \qquad \omega(l_{x'}) = h(\omega(l_x)).$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'})), \qquad \varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'})).$$

Пусть

$$c \in (\varphi(\omega(l_x)), \varphi(\alpha(l_x))), \qquad \Sigma_c = \varphi^{-1}(c) \quad (\Sigma'_c = (\varphi')^{-1}(c)).$$

Отметим, что из определения энергетической функции следует, что пересечение $\Sigma_c \cap l_x$ ($\Sigma'_c \cap l_{x'}$) состоит из единственной точки. Тогда на множестве $M^n \setminus \Omega(f^t)$ корректно определено отображение $\widetilde{H}$, ставящее в соответствие точке $y = \Sigma_c \cap l_x$ точку $y' = \Sigma'_c \cap l_{x'}$. По построению отображение $\widetilde{H}$ является гомеоморфизмом между

[3] *Полярным потоком* называется градиенто-подобный поток, множество состояний равновесия которого содержит в точности один источник, один сток и произвольное конечное число седел.

[4] Термин “характеристическая секущая” Пришляком и Флейтасом не использовался, но секущая поверхность, которую они использовали для введения своих инвариантов, по существу являлась характеристической секущей в нашей терминологии.

множествами $M^n \setminus \Omega(f^t)$ и $M^n \setminus \Omega(f'^t)$, преобразующим траектории потока f^t и множество регулярных уровней функции φ в траектории потока f'^t и множество регулярных уровней функции φ'[5]. Так как

$$\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'}), \qquad \varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'})$$

для любой точки x, отличной от состояния равновесия, то построенный гомеоморфизм $\widetilde{H}$ однозначно продолжается до искомого гомеоморфизма H, удовлетворяющего условиям $\varphi(x) = \varphi'(H(x))$,

$$H(W^s_{\Omega_1} \cap \Sigma) = W^s_{\Omega'_1} \cap H(\Sigma), \qquad H(W^u_{\Omega_{n-1}} \cap \Sigma) = W^u_{\Omega'_{n-1}} \cap H(\Sigma)$$

для любой характеристической секущей Σ.

Докажем *достаточность* условий теоремы.

Пусть самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' согласованно эквивалентны, т.е. существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H\colon M^n \to M^n$ и $\chi\colon [0,n] \to [0,n]$ такие, что $\varphi' H = \chi\varphi$ и

$$H(W^s_{\Omega_1} \cap \Sigma) = W^s_{\Omega'_1} \cap H(\Sigma), \qquad H(W^u_{\Omega_{n-1}} \cap \Sigma) = W^u_{\Omega'_{n-1}} \cap H(\Sigma)$$

для некоторой характеристической секущей Σ. Для любой точки $x \in \Sigma$ положим $x' = H(x)$ и обозначим через l_x, $l_{x'}$ траектории потоков f^t, f'^t, проходящие через точки x, x'. Для $c \in [0,n]$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$. Определим гомеоморфизм $H_V : V \to V'$ формулой

$$H_V(y) = l_{x'} \cap H(\Sigma_c)$$

для любой точки $y = l_x \cap \Sigma_c$, $c \in (0,n)$.

Поскольку гомеоморфизм $H|_\Sigma$ переводит следы $(n-1)$-мерных инвариантных многообразий седловых точек потока f^t на Σ в следы аналогичных объектов потока f'^t на $H(\Sigma)$ и замыкание любой сепаратрисы размерности $n-1$ седловой неподвижной точки σ потока f^t состоит из двух точек: точки σ и источника либо стока потока f^t (в зависимости от индекса точки σ), то гомеоморфизм H_V однозначно продолжается на множества Ω_0, Ω_1, Ω_{n-1}, Ω_n. Сохраним обозначение H_V для полученного гомеоморфизма и продолжим его на одномерные сепаратрисы седловых неподвижных точек.

Для этого отметим, что для любого $c \in (0,1)$ справедливо

$$H_V(\Sigma_c \setminus W^u_{\Omega_1}) = H(\Sigma_c) \setminus W^u_{\Omega'_1}$$

и множества $W^u_{\Omega_1} \cap \Sigma_c$, $W^u_{\Omega'_1} \cap H(\Sigma_c)$ являются конечными объединениями одинакового количества точек. Отсюда следует, что гомеоморфизм H_V продолжается по непрерывности гомеоморфизмом $H_1\colon W^u_{\Omega_1} \to W^u_{\Omega'_1}$. Аналогично строится гомеоморфизм $H_{n-1}\colon W^s_{\Omega_{n-1}} \to W^s_{\Omega'_{n-1}}$. Искомый гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$ определим формулой

$$h(x) = \begin{cases} H_V(x), & \text{если } x \in M^n \setminus (W^u_{\Omega_1} \cup W^s_{\Omega_{n-1}}), \\ H_1(x), & \text{если } x \in W^u_{\Omega_1}, \\ H_{n-1}(x), & \text{если } x \in W^s_{\Omega_{n-1}}. \end{cases}$$

Теорема доказана.

[5] *Регулярным уровнем* функции Морса называется уровень, не содержащей критических точек.

3. Энергетическая функция как полный топологический инвариант потоков из класса $G_0(M^n)$. Этот пункт посвящен доказательству теоремы 2, которая является непосредственным следствием теоремы 1 и приведенной ниже леммы.

Лемма 1. *Пусть φ, φ' – самоиндексирующиеся энергетические функции потоков $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ соответственно. Функции φ, φ' согласованно эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для потоков $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ из эквивалентности соответствующих самоиндексирующихся функций φ, φ' следует согласованная эквивалентность этих функций. Для любого $c \in [0, n]$ положим

$$\Sigma_c = \varphi^{-1}(c), \qquad M_c = \varphi^{-1}([0, c]).$$

Поскольку функция Ляпунова убывает вдоль блуждающих траекторий потока, то $M_1 \cap W^s_{\Omega_1} = \Omega_1$. Откуда следует, что для каждой компоненты связности Q множества $M_1 \setminus \Omega_1$ существует единственный сток $\omega_Q \in \Omega_0$ такой, что $Q \subset W^s_{\omega_Q}$. Пусть $x \in Q$. Тогда траектория l_x потока f^t, проходящая через точку x, имеет ω-предельную точку ω_Q и α-предельную точку α (в силу предложения 2 множество Ω_n состоит из одного источника α). Кроме того, для любого $c \in (0, n)$ множество $\Sigma_c \cap l_x$ состоит из единственной точки.

Положим $x' = H(x)$ и снабдим штрихом обозначения объектов потока f'^t, аналогичных введенным выше объектам потока f^t. Для любой характеристической секущей Σ гомеоморфизм H индуцирует гомеоморфизм

$$h\colon \Sigma \setminus W^s_{\Omega_1} \to H(\Sigma) \setminus W^s_{\Omega'_1},$$

переводящий точку $y = l_x \cap \Sigma$ в точку $h(y) = l_{x'} \cap h(\Sigma)$.

Согласно теории Морса гиперповерхности уровня Σ, $\Sigma' = H(\Sigma)$ являются гладкими сферами размерности $n-1$. Поскольку φ (φ') является энергетической функцией потока f^t (f'^t), то множество $C = \Sigma \cap W^s_{\Omega_1}$ $(C' = \Sigma' \cap W^s_{\Omega'_1})$ состоит из k сфер размерности $n-2$, по одной на каждом устойчивом многообразии множества $W^s_{\Omega_1}$ $(W^s_{\Omega'_1})$. В силу теоремы о кольце[6] существует гомеоморфизм $\widetilde{h}\colon \Sigma \to \Sigma$ со следующими свойствами:

a) $\widetilde{h}(C) = C'$;

b) существует окрестность $V(C)$ множества C такая, что $\widetilde{h}|_{\Sigma \setminus V(C)} = h|_{\Sigma \setminus V(C)}$.

Гомеоморфизм $\widetilde{h}$ продолжается до гомеоморфизма $\widetilde{H}_V\colon V \to V'$, переводящего точку $y \in l_x \cap \Sigma_c$ в точку $\widetilde{H}_V(y) = l_{x'} \cap H(\Sigma_c)$, $c \in (0, n)$. Аналогично доказательству необходимости теоремы 1, гомеоморфизм $\widetilde{H}_V$ продолжается до искомого гомеомофизма $\widetilde{H}\colon M^n \to M^n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дж. Милнор, *Теория Морса*, Мир, М., 1965.

[6] Теорема о кольце звучит следующим образом: *если $h_i\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, 2\}$, $n \geqslant 2$, – топологические вложения и $K^n \subset \mathbb{R}^n$ – открытая область, ограниченная сферами $h_1(\mathbb{S}^{n-1})$, $h_1(\mathbb{S}^{n-1})$, то замыкание области K^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$.* Справедливость гипотезы кольца в случае $n = 2$ следует из теоремы Антуана (1921 г.), в случае $n = 3$ – из теоремы Сандерсона (1960 г.), для $n > 4$ доказана Р. Кирби в 1969 году, а для случая $n = 4$ – Ф. Квинном в 1984 г.

[2] S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Ann. of Math.* (2), **74**:1 (1961), 199–206.

[3] K. R. Meyer, “Energy Functions for Morse–Smale Systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

[4] R. Thom, “La stabilité topologique des applications polynomiales”, *Enseign. Math.* (2), **1**:2 (1962), 24–33.

[5] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140.

[6] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, ИКИ, Ижевск, 2011.

[7] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 61–86.

[8] Я. Л. Уманский, “Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий”, *Матем. сб.*, **181**:2 (1990), 212–239.

[9] G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows in dimension two and three”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **6**:2 (1975), 155–183.

[10] С. Ю. Пилюгин, “Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах”, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254.

[11] А. О. Пришляк, “Полный топологический инвариант потоков Морса–Смейла и разложений на ручки трёхмерных многообразий”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:4 (2005), 185–196.

В. З. Гринес
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило
22.01.2014

Е. Я. Гуревич
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: elena_gurevich@list.ru

О. В. Починка
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru