За время, прошедшее после первого издания книги «Теория массового обслуживания» (1982), в этой области прикладной математики возникли новые направления исследований. Было получено большое число новых интересных и актуальных для практики результатов, отраженных в ряде специальных монографий и многочисленных публикациях. В какой-то степени все это нашло отражение в настоящем, втором издании книги. В главу II добавлен § 4 о чрезвычайно важных для современной практики системах с повторными вызовами. Расширен и по-новому изложен § 5 главы IV о системах с малой загрузкой. Книга дополнена достаточно обширным Дополнением, посвященным полумарковским процессам — весьма актуальной для современных приложений математической модели, во многих случаях являющейся более адекватной, нежели классические модели процессов восстановления и марковских процессов. Текст книги дополнен соот-ветствующими комментариями, расширен список литературы. Также в ряде мест обновлена (приведена в соответствие с современным языком) терминология, исправлены замеченные опечатки и внесены другие редакционные изменения. Мы надеемся, что обновленный вариант книги будет способствовать совершенствованию учебного процесса в технических вузах страны, поднимая преподавание этой дисциплины до современного уровня. Книга может быть полезной для всех, кто интересуется приложениями математических методов и, в частности, методов теории массового обслуживания; она также может быть использована для самообразования.

**Предисловие**

Потребности практики привели к необходимости увеличения числа выпускаемых высшей школой специалистов, владеющих основами теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов и некоторыми специальными разделами современной прикладной математики, в частности основами теории массового обслуживания. Предлагаемая книга предназначена для студентов технических вузов, специализирующихся по прикладной математике и автоматизированным системам управления. В основу данного учебного пособия положена типовая программа курса "Теория массового обслуживания" для высших учебных заведений по специальности 0647 "Прикладная математика". Авторы ставили перед собой задачу изложить в доступной для первоначального изучения форме элементы основных направлений современного развития теории массового обслуживания. Поэтому сокращен объем традиционного раздела, посвященного входящим потокам, и выделены такие разделы теории, как асимптотические методы, приоритетные системы, статистика систем массового обслуживания и моделирование систем массового обслуживания. В этом состоит особенность данной книги. При отборе материала авторы руководствовались стремлением сделать настоящее учебное пособие соответствующим современному состоянию развития рассматриваемой в данной книге теории и акцент делали на изложение именно методов исследования, а не на полное перечисление полученных в каждом направлении результатов. По теории массового обслуживания имеется несколько специальных монографий, отдельные разделы теории изложены в ряде монографий и учебников по теории вероятностей и теории случайных процессов, однако монографии сложны для первоначального изучения теории студентами технических вузов, а отдельные разделы не дают общего представления о теории в целом и не могут заменить соответствующего учебного пособия. Этот пробел и устраняет предлагаемая книга. Она будет полезна также аспирантам и специалистам, занимающимся приложением математических методов и, в частности, методов теории массового обслуживания. Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность П.В.Шнуркову за проделанную им большую работу, во многом способствовавшую улучшению изложения материала и оформления рукописи. Авторы \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Введение Теория массового обслуживания как раздел теории вероятностей возникла сравнительно недавно. Первые работы появились в начале ХХ столетия и были вызваны потребностями практики, в частности широким развитием телефонных сетей. Поэтому и сейчас в работах по теории массового обслуживания широко используется терминология, заимствованная из телефонии: требования, вызовы, заявки, каналы связи, длительность разговора и т.п. Несколько позже было обращено внимание, что общие математические модели, исследуемые как модели телефонии, могут описывать и другие жизненные явления. В настоящее время методы и результаты теории массового обслуживания с успехом используются при решении проблем теории надежности, анализе процессов функционирования сложных систем, разработке автоматизированных систем управления различных видов и во многих других технических, экономических и социальных областях (транспорт, системы связи, системы снабжения, медицинское обслуживание и т.д.). Математическую теорию массового обслуживания можно охарактеризовать двумя способами: указанием области практических задач, к решению которых она применяется, и указанием класса изучаемых ею случайных процессов. Практические задачи теории массового обслуживания связаны с исследованием любых операций, состоящих из многих однородных элементарных операций, на осуществление которых влияют случайные факторы. Приведем некоторые примеры. 1. В компьютер, управляющий технологическим процессом, время от времени поступают сигналы от датчиков, связанных с управляемым объектом. Каждый сигнал требует обработки в течение некоторого случайного времени (зависящего от содержания сигнала). Таким образом, работу компьютера можно рассматривать как операцию массового обслуживания, состоящую из элементарных операций -- обработки отдельных сигналов. Требуется решить задачу: способна ли машина с данным объемом памяти и быстродействием справиться с обработкой всех поступающих сигналов. 2. Автоматическая телефонная станция (АТС) обслуживает некоторое число абонентов, выходящих на связь по случайному закону. Абонент, пытающийся позвонить (послать вызов) в момент занятости всех линий, получает отказ ("частые гудки"). Здесь элементарная операция -- отдельный телефонный разговор; основной характеристикой операции массового обслуживания, состоящей в процессе функционирования АТС в течение длительного времени, является вероятность отказа при вызове. 3. В сборочный цех поступают для сборки детали различных видов. При нехватке хотя бы одного вида деталей производство останавливается; избыточные детали поступают в бункеры определенной вместимости. На процесс поступления деталей, как и на время сборки изделия, влияют случайные факторы. Требуется ответить на вопросы: какова вероятность простоя производственной линии? чему равна вероятность переполнения бункеров? Элементарной операцией в данном случае является сборка одного изделия из готового комплекта деталей. 4. В морской порт прибывают суда не строго по графику, а со случайными отклонениями. Имеется несколько погрузочно-разгрузочных площадок с соответствующим оборудованием. Спрашивается: чему равно среднее время от момента прибытия судна до окончания его разгрузки и погрузки? Элементарной операцией здесь можно считать процесс разгрузки и погрузки одного судна. Характеристика теории массового обслуживания с помощью определения изучаемых ею случайных процессов не может быть однозначной в связи с тем, что классы таких процессов время от времени расширяются исследователями -- математиками и кибернетиками. С другой стороны, любой из этих классов может применяться и к задачам, не связанным с операциями обслуживания. Важнейшие классы случайных процессов, на методы исследования которых опирается теория массового обслуживания, -- однородные марковские процессы с дискретным (т.е. конечным или счетным) множеством состояний, процессы восстановления, полумарковские процессы. С достаточно общей моделью процесса массового обслуживания можно познакомиться в процессе овладения материалом книги. Отметим лишь такое обстоятельство. В конечном счете исследователя интересуют свойства некоторого дискретного процесса nu(t), различные состояния которого соответствуют качественно различным состояниям данной системы (например, nu(t) определяется как число занятых в момент t линий АТС). Каковы же характерные особенности моделей, исследуемых в теории массового обслуживания? Что отличает их от множества других моделей? Остановимся на этом вопросе подробнее. В какой-то мере ответы на поставленные вопросы можно найти в названии рассматриваемой теории. В первую очередь нужно отметить, что речь идет о разработке и анализе математических, т.е. обладающих достаточной степенью абстракции, моделей, в которых описывается процесс обслуживания (проведения однородных элементарных операций) некоторых объектов. Поскольку рассматриваются абстрактные модели, то совершенно не важна природа обслуживаемых объектов, а также их физические свойства (будь то посетители магазина, или детали на автоматической линии, или космические частицы, зарегистрированные счетчиком Гейгера--Мюллера). Существенными являются лишь моменты появления указанных объектов, так как от этих моментов зависит эволюция рассматриваемой модели по времени. Итак, приходим к выводу, что первой характерной особенностью системы массового обслуживания является наличие некоторого потока (протяженного во времени) однородных (одинаковых по свойствам абстрактных) объектов (заявок, требований, событий). В названии теории указывается также на процесс обслуживания. Естественно, что в абстрактной модели нет необходимости рассматривать физическую сторону процесса обслуживания. Процесс обслуживания следует понимать в самом широком смысле этого термина: обслужить данный объект (заявку, требование) означает, что нужно затратить некоторое количество работы, произвести некоторое количество операций, затратить некоторое время на переработку, видоизменение, обслуживание данного объекта. Естественно, что, кроме этого, в описание процесса обслуживания должно входить и описание правил, порядка, в соответствии с которым происходит обслуживание, т.е. описание дисциплины обслуживания. Итак, второй характерной особенностью систем массового обслуживания является наличие правил, некоторого порядка, или дисциплины обслуживания. Отметим, что в правила обслуживания входит и определение числа требований, которые могут одновременно обслуживаться в системе, и числа требований, которые могут ожидать начала обслуживания, т.е. определенным образом описывается структура исследуемой системы. Сделаем из проведенных рассуждений заключительный вывод. Для того чтобы математически описать систему массового обслуживания, необходимо описать свойства входящего потока однородных событий, структуру исследуемой системы, дисциплину и характеристики обслуживания. Однако для постановки задачи исследования этого недостаточно. Нужно еще указать характеристики (критерии), которые необходимо определить. Для систем массового обслуживания, описывающих функционирование различных реальных объектов, характерно то, что они работают под воздействием случайных факторов. Моменты поступления требований являются случайными величинами, длительности обслуживания -- также случайные величины. Поэтому процесс функционирования системы массового обслуживания носит случайный характер. В связи с этим обстоятельством методы исследования систем массового обслуживания сводятся к построению некоторого случайного процесса, описывающего эволюцию системы, и исследованию этого процесса. В связи с этим исследуемые характеристики носят также вероятностный характер. Приведем примеры некоторых характеристик, исследуемых в задачах массового обслуживания. Для систем, в которых требования по каким-либо причинам могут покидать систему необслуженными (полностью или частично), определяются вероятность потери требования, вероятность обслужить все требования в некотором интервале времени, характеристики времени простоя системы в свободном (без требований) состоянии. Для системы с очередью исследуются распределение величины очереди, распределение времени пребывания в очереди, времени пребывания в системе, средние характеристики и т.д. Выбор критерия существенным образом зависит от назначения исследуемой системы. Как отмечалось выше, исследование системы массового обслуживания связано с построением и исследованием некоторого случайного процесса, поэтому курс теории массового обслуживания естественно рассматривать как продолжение курса теории случайных процессов. В заключение отметим, что для характеристики систем массового обслуживания используется символика, предложенная Д.Кендаллом и усовершенствованная рядом авторов. Символика использует пять разрядов: для характеризации входящего потока однородных событий (первый разряд), характеристики обслуживания (второй разряд), третий разряд определяет особенности структуры системы, в четвертом разряде фиксируются особенности очереди, пятый разряд вводится для описания приоритетных систем массового обслуживания. Символами М, D, Е, GI обозначаются соответственно экспоненциальное, регулярное, эрланговское и произвольное распределения. Стрелка над буквой указывает, что исследуется многомерный случай (входящий поток есть сумма некоторого числа потоков различных требований и распределения длительностей обслуживания требований разных потоков различны). Если в первом разряде стоит один из перечисленных выше символов, то это означает, что входящий поток есть рекуррентный поток с соответствующим распределением интервалов между моментами поступления требований. Каждый из введенных выше символов во втором разряде означает, что распределение длительности обслуживания имеет указанный вид. В третьем разряде указывается число обслуживающих приборов (в случае полнодоступного пучка), сложная система обслуживания обозначается символом S. В четвертом разряде указывается число мест для ожидания (максимальная длина очереди): r = оо -- случай неограниченной очереди; r = 0 -- система с потерями без ожидания, 0 < r < оо -- система с oграниченным числом мест для ожидания. В пятом разряде (для приоритетных систем) фиксируется символ fji; i = 0, 1, 2; j = 0, 1. Если i = 0, то осуществляется обслуживание без приоритета, при i = 1 в системе имеется относительный приоритет; i = 2 означает наличие абсолютного приоритета (т.е. нижний индекс указывает на характер приоритета); значение j = 0 указывает, что требование, заставшее все места занятыми, теряется; j = 1 -- вновь прибывшее требование вытесняет требование с низшим приоритетом. Описанная символика не позволяет учесть все мыслимые возможности, но для некоторого класса типичных и весьма распространенных моделей массового обслуживания позволяет сократить словесное описание. В предлагаемой книге использована указанная символика, но вместе с тем дается и словесное описание моделей, что позволит лучше понять модели и принятые обозначения. В пособии принято следующее правило нумерации: формулы, теоремы, леммы и следствия внутри каждого параграфа нумеруются двумя цифрами, первая из которых -- номер данного параграфа, а вторая -- порядковый номер формулы внутри параграфа; при ссылках на результаты других глав дополнительно указывается номер соответствующей главы. В конце книги приведен список основной литературы по теории массового обслуживания, в который включены не только те книги и статьи, на которые имеются непосредственные ссылки по тексту, но также ряд дополнительных изданий и публикаций, завоевавших широкое признание специалистов, в которых более полно и глубоко освещены различные аспекты теории и ее приложений. Авторы не ставили целью охватить как можно больше литературы, но надеются, что приводимый список окажет пользу тем, кто начинает знакомство с теорией массового обслуживания и захочет углубить свои знания в том или ином направлении.