Кузык Б.Н. Оборонно-промышленный комплекс России: прорыв в XXI век. – М, 1999. – С.12.
Паркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Т. 21. – М.: Политиздат, 1976. – С.164.

УДК 330.4

8. *Струмилин С.Г.* Избранные произведения. Т. 4. – М., 1964. – С. 83.

9. URL: http://www.vpk.ru/cgi-bin/cis/w3.cgi/ CMS/

Кудрин Николай Владимирович

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде nvkudrin@gmail.com

Максимов Андрей Геннадьевич

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде amaksimov@hse.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦЕНЫ НА РЫНКЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Поведение цен на рынках электроэнергии, не подвергающихся жесткому государственному регулированию, характеризуется наличием сезонности, высокой волатильности и существованием резких скачков. Это значительно осложняет моделирование цен стандартными средствами. В работе сделана попытка применения системы ФитцХью-Нагумо со спохастическим слагаемым для моделирования динамики ценовых изменений на рынках электроэнергии.

Ключевые слова: рынок электроэнергии, модель ФитцХью-Нагумо, динамика цен.

слабление государственного регулирования электроэнергетической индустрии в ряде стран Европы и Северной Америки привело к тому, что цены на электричество под воздействием рыночных сил демонстрируют существенные колебания, которые не соответствуют картинам, наблюдаемым на основательно изученных фондовых рынках. В поведении цен на упомянутый реальный актив наблюдаются очевидные качественные отличия [7; 8]. Разработанные на сегодня эконометрические методы оценки не позволяют в полной мере учесть эти особенности. Задача данной работы состоит в том, чтобы продемонстрировать схожесть динамики траекторий модели ФитцХью-Нагумо со стохастическим слагаемым с поведением цен на рынке электроэнергии Великобритании и определить возможность ее применения для моделирования цен на различные промежутки времени. В ходе работы были исследованы статистические свойства модели по отношению к соответствующим рыночным показателям, а также влияние на них отдельных параметров.

Особенности поведения цен. Основной особенностью ценовой динамики электроэнергии является наличие резких выбросов, называемых также «спайками» (от англ. spike – «шип, острый выступ»). Под ними подразумеваются кратковременные ценовые скачки большой амплитуды с последующим падением на начальный уровень. Объяснением такого необычного поведения служат как товарные свойства электроэнергии, так и специфика процесса ее производства и доставки до потребителя. Среди них необходимо выделить следующие:

невозможность (точнее, высокие издержки)
создания и хранения запаса;

 технические аспекты генерации обсуждаемого актива – электростанции способны менять уровень выработки энергии только с существенным временным лагом [13];

 неоднородность издержек при использовании различных производственных мощностей (и технологий производства), точнее – быстро растущие предельные издержки производства;

 неэластичность спроса со стороны потребителей;

 – ограничения, накладываемые инфраструктурой сетей доставки, и необходимость поддержания стабильности системы [6].

Сеть представляет собой систему высоковольтных линий электропередач, доставляющих энергию от вырабатывающих электростанций к региональным распределительным сетям. На схеме, приведенной, например, в [9, рис. 1] наглядно показана структура передаточных и распределительных сетей Великобритании. Работа системы происходит на частоте 50Гц, а передача осуществляется по линиям с напряжением 275 и 400 кВ [9]. Британская карта сети передачи электричества представлена в [1].

Устойчивость системы требует поддержания постоянного напряжения на каждом участке сети и зависит от возможности сохранять равновесие между спросом и предложением. Кроме того, необходимо поддерживать постоянную частоту в системе после нарушений, вызванных их дисбалансом. Серьезные колебания частоты могут привести к выходу сети из строя [9].

На рисунке 1 отражена динамика спроса и цены на электроэнергию (здесь и далее по горизонтали отложен номер получасового интервала наблюдения) на разных по длительности временных интервалах. Можно отметить присутствие сезонного фактора в динамике цен. Явно заметны дневная и недельная периодичность, что обуславливается естественной сменой уровня спроса на электричество в течение дня и падением уровня спроса в выходные дни.



Рис. 1. Динамика цены (£/МВтч) и спроса (МВтч) для рынка электроэнергии Великобритании (данные – [2; 12]) a), b) – 2008 год; c), d) – неделя; e), f) – месяц.

Наличие скачков в траектории цен можно наблюдать на большинстве рынков, свободных от жесткого государственного регулирования, среди них – Испания, Норвегия, Нидерланды, США, Канада и др. В данной работе рассматривается британский рынок – первый, подвергшийся реорганизации и наиболее конкурентный в Европе на сегодняшний день [5; 14].

Эконометрический анализ. Модели временных рядов находят применение в анализе и прогнозировании цен на электричество. Наиболее часто используются модели типа ARMA и ARIMA [3; 11].

В работе рассмотрен временной ряд цен на электроэнергию в Великобритании за 2008 год. Исходными данными являются получасовые значения цен спот на бирже APX-ENDEX [2] и соответствующие показатели спроса [12].

Для моделирования динамики цен была выбрана модель типа ARMAX следующего вида:

$$P_{t} = \alpha_{0} + \alpha_{1}P_{t-1} + \alpha_{2}P_{t-49} + \alpha_{3}P_{t-337} + \alpha_{4}X_{t-1} + \varepsilon_{t} + \sum_{i}^{5}\beta_{i}\varepsilon_{t-i},$$

где P_t – цена в момент времени t, P_{t-1} – значение цены полчаса назад, P_{t-49} – значение цены сутки назад, P_{t-337} – значение цены неделю назад, X_{t-1} – спрос полчаса назад.

Предполагается, что текущее значение цены зависит от предыдущего, от значения в аналогичный момент времени день назад. Параметр P_{t-337} присутствует в модели для того, чтобы учесть влияние изменений, связанных с падением спроса в выходные дни. Оценки коэффициентов и их значимость приведены в таблице 2.

Однако, несмотря на то что в целом модель неплохо описывает общие тенденции движения цены, возникает проблема сглаживания интересующих нас пиков при построении прогноза.

Таблица 1

U	писательные	статистики	ряда
---	-------------	------------	------

	Среднее	Медиана	Максимум	Минимум	Ст. отклонение
Цена, £/МВтч	68.91	59.31	438.16	24.55	32.81
Спрос, МВтч	37782	38044	57622	20993	7536

Таблица 2

Переменная	Коэффициент	Стандартное отклонение
Const	-4,86585**	0,56490
Pt-1	0,86562**	0,00535
Pt-49	0,01487*	0,00475
Pt-337	0,01242*	0,00429
Xt-1	0,00033**	0,00002
βi	**	
R2	0.914	
AIC(Akaike info criterion)	7.3783	
BIC (Schwarz criterion)	7.3815	
Количество наблюлений	17231	

Оценки коэффициентов эконометрической модели

* - значимость на уровне 1%, ** - значимость на уровне 0,1%.

Применение модели ФитцХью-Нагумо. Система уравнений (модель) ФитцХью-Нагумо (ФХН) [4; 10] первоначально была предложена как упрощенная версия модели Ходжкина-Хаксли, применяющейся для моделирования распространения возбуждения в гигантском аксоне кальмара. Будучи относительно простой по форме, но демонстрирующей разнообразное и сложное поведение, система ФХН стала одной из базовых моделей нелинейной динамики. Система ФХН используется при моделировании поведения объектов различной природы: физической, химической, экономической, социальной.

Используемая в данной работе стохастическая модель ФХН представляет собой нелинейную неавтономную систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\varepsilon \dot{x} = g(x) - y \qquad (1.a)$$

$$\dot{y} = yx + b - \beta y - f(t) + \sigma(d)\xi \qquad (1.b)$$

где $g(x)=kx-\lambda x^3$, k>0, $\lambda>0$. Здесь $\varepsilon>0$, $\gamma\geq0$, $b\geq0$, $\beta\geq0-$ константы, ξ – производная винеровского случайного процесса, например, гауссовый белый шум. Стандартное отклонение $\sigma(d)$, определяющее интенсивность шума, обычно выражается как $\sigma = \sqrt{2d}$ (d>0).

Система (1) может быть представлена в форме одного уравнения второго порядка:

$$\varepsilon \ddot{x} + (3\lambda x^2 - k - \varepsilon\beta)\dot{x} + (\gamma - \beta k + \beta\lambda x^2)x =$$

= -b + f(t) - \sigma(d)\xi,

описывающего динамику нелинейного осциллятора с нелинейным «затуханием», на который, кроме того, действуют внешние регулярная и случайная силы.

Вернемся к системе (1). Параметр γ связывает два уравнения. При $\gamma=0$ и f=0 уравнение (1.b) сводится к уравнению, описывающему известный процесс Орнштейна-Уленбека [15], который «возвра-



Рис. 2. «Потенциал» U(x) при различных значениях y: a) y=-0.5; b) y=-1.5; c) y=0.5; d) y=1.5



Рис. 3. Фазовое пространство системы (2) при ε =0, k=1, λ =1, b=2, γ =1, β =1, f=0, σ =0

щается» к своему «среднему» (b/β) экспоненциально с характерным временем $1/\beta$. Первое уравнение в данном случае может быть интерпретировано, как траектория движения частицы в потенциале $U(x) = -\int_{0}^{x} (k\theta - \lambda\theta^{3}) d\theta$ с двумя или одним минимумами (рис. 2).

Рассмотрим фазовое пространство (x,y) системы (1) в случае отсутствия «внешних сил» ($f=\sigma=0$), воспользовавшись разделением траекторий на быстрые и медленные движения (см., например, [16]). При ε =0 фазовый портрет системы (1) состоит из «склейки», составленной из кривой медленных (y=g(x) – S-образная кривая на рис. 3) и быстрых (y=const на рис. 3) движений.

Кривая медленных движений имеет три участка, разделенных точками (x, y^{-}) и (x^{+}, y^{+}) . Правая и левая части кривой являются устойчивыми по быстрым движениям, центральная часть – неустойчивой. Точка A – точка пересечения кривой медленных движений и прямой $y=\gamma x+b/\beta$ – состояние равновесия системы (1). Если оно единственно и точка A принадле-



Рис. 4. Механизм возникновения скачка при отсутствии шума: при ε =0.01, k=1, λ =1, b=2, γ =1, β =1, f=0, d=0; a) фазовое пространство; b) x(t); c) y(t).



Рис. 5. Стохастическая модель ФХН в мягком режиме. (Данное и последующие результаты моделирования получены при помощи численного интегрирования методом Рунге-Кутта 4-5 порядка в пакете MATLAB 10.) а) фазовый портрет; b) x(t); c)y(t); d)f(t)

жит левой или правой части кривой медленных движений, то состояние равновесия – устойчиво, если центральной – неустойчиво, и в этом случае в фазовом пространстве системы (1) имеется устойчивый предельный цикл. (В зависимости от соотношения параметров системы (1), состояний равновесия может быть и три, и два (а не только одно). Если их три и все 3 состояния равновесия принадлежат центральной части кривой медленных движений – в системе имеется предельный цикл, если хотя бы одно принадлежит правой или левой части кривой медленных движений – предельного цикла нет. Случай двух состояний равновесия в пространстве параметров имеет множество коразмерности один и с точки зрения моделирования динамики рынка электроэнергии при помощи «полной» системы (1) особого интереса не представляет.) В случае $0 \le \le <1$ поведение траекторий системы (1) подобны (вне малой окрестности кривой медленных движений) случаю «склеенной» системы. В частности, если есть «предельный цикл» на «склейке» (см. ссылку 2), от него отрождается (с ростом ε) предельный цикл.

Аналогично «выброс» (скачок) в модели ФХН можно понимать как «импульс» Б—А (см. рис. 4).

Система (1) при $\beta=1$ рассматривается как базовая модель динамики цен на рынке электричества. Часть b-f(t)+ σ (d) ξ уравнения (1.b) идентифицируется с динамикой агрегированного спроса с элементом случайной составляющей. В качестве внешней



Рис. 6. Модель поведения цен за период а) «2,5 года»; b) «Месяц» – расширенная модель. ε=0.15, k=1, λ=1, c=-1, b=0, γ=1, β=1, d=10.



Рис. 7. Среднее значение ширины скачка и интервала между скачками при разных значениях h для реального рынка – a), b) и расширенной модели – c), d) (ϵ =0.15, k=1, λ =1, b=0, γ =1, c=-1, β =1, d=10).

силы f используется периодическая функция $Asin(\omega,t)$ с амплитудой A>0 и частотой ω_{c} .

В зависимости от набора параметров система может функционировать в разных режимах. Режим, когда є принимает значения от 0.15 до 0.4, назовем *мягким*. Он дает более широкие возможности для моделирования цен, поскольку «замедляет» быструю переменную и способствует появлению выбросов разной амплитуды (рис. 5).

Базовая модель допускает некоторые расширения [7; 8]. Одно из них заключается в том, что слагаемое γx второго уравнения системы (1) заменяется на sinh($\gamma(x-c)$), где с – константа [7].

Введение гиперболического синуса модифицирует механизм предельного цикла ФХН, делая систему более «гибкой» – в окрестности нуля функция почти линейна $[\sinh(\gamma(x-c))\approx-\gamma c+\gamma x]$, но с определенного момента начинает демонстрировать экспоненциальный рост или снижение. Это позволяет переменной x достигать более высоких значений, чем было возможно в базовой модели.

«Расширенная» система была использована для моделирования динамики цен за два с половиной года на рынке электроэнергии. Для учета сезонной составляющей спроса внешняя сила была преобразована к следующему виду:

$$f(t) = u \left(v \sin\left(\frac{\omega_f}{365}t\right) + \sin\left(\omega_f t\right) \right), \tag{2}$$

где $\omega_f = 6$, u = 2, v = 0.06. При данных параметрах $2\pi/\omega_f = 1,047$, что примерно соответствует одному дню функционирования рынка в терминах систе-

мы. Результаты представлены на рисунке 6. Рисунок 6(b) позволяет более детально рассмотреть моделируемую траекторию на временном промежутке, эквивалентном одному месяцу.

Статистика выбросов. Использование модели ФитцХью-Нагумо привлекательно не только из-за того, что она способна воспроизводить форму траектории цен. Статистические свойства получаемых решений также довольно схожи с показателями реального рынка.

Продемонстрировать это можно с использованием таких показателей, как интервал между скачками цен и «ширина скачка» [7].

Пусть задан некоторый уровень цены h. Обозначим за $\phi_j(h)$ – момент начала скачка под номером j – то есть момент времени, когда траектория цены пересекает установленный уровень («снизу вверх»). Тогда $p_j(h)$ – конец этого скачка – то есть момент времени, когда траектория цены пересечет h в обратном направлении. Разность

$$t_{j}(h) = \phi_{j+1}(h) - \phi_{j}(h)$$
 (3)

будем называть интервалом между двумя выбросами.

Аналогично шириной выброса будет называться разность:

$$\delta_i(\mathbf{h}) = \mathbf{p}_i(\mathbf{h}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{h}). \tag{4}$$

Устанавливая уровень, классифицирующий наблюдаемое движение цены как выброс, можно проследить статистику скачков разной амплитуды и ширины. На рисунке 7 отражено поведение средней ширины скачка и среднего интервала между двумя соседними скачками в зависимости от фиксированного значения h (которые могут служить



Рис. 8. Интервал между выбросами – гистограммы: а) модель (h=-0.5), b) рынок (h'=150£); ширина выброса – гистограммы: c) модель (h=-0.7); d) рынок (h'=110£)

оценками математического ожидания соответственно ширины скачка и интервала между двумя соседними скачками).

Из рисунка 7 следует, что для модели (1), по мере увеличения h (при фиксированном наборе параметров модели), до определенного момента интервал и ширина возрастают, но затем средняя ширина начинает снижаться за счет того, что в расчет принимаются наиболее редкие и непродолжительные пики. Средний интервал между соседними выбросами продолжает расти. На реальном рынке интервал возрастает, а пики становятся более узкими при движении «отсечки» от 110 до 180 фунтов стерлингов. Распределение исследуемых величин представлено на следующих гистограммах (рис. 8).

На гистограммах (рис. 8 а),b)) можно заметить, что, как правило, скачок продолжается от 2 до 10 часов – вероятно, это промежутки дня, для которых характерен наиболее интенсивный спрос на электроэнергию (с 9–10 до 20–21 часа). Модель выдает чуть менее разнообразные выбросы «усредненной ширины» при меньшем удельном весе коротких и длинных скачков, однако, в общем, соответствует данной особенности.

Как видно из гистограмм (рис. 8 с),d)), наиболее часто – как на рынке, так и в модели – расстояние между соседними скачками составляет от 24



Рис. 9. Среднее значение ширины скачка (а) и интервала между скачками (b) и их стандартные отклонение (c, d) в зависимости от параметра ε при разных уровнях «отсечки» h (k=1, λ=1, b=2, γ=1, β=1, d=10, ω_f=6, u=2, v=0.06)



Рис. 10. Среднее значении: a) – ширины скачка, b) – интервала между скачками и их стандартные отклонения – c) и d) соответственно, в зависимости от значения параметра γ при разных уровнях «отсечки» h (ε=0.15, k=1, λ=1, b=2, β=1, d=10,ωf=6, u=2, v=0.06)

до 300 часов. Полученный результат укладывается в рамки тех свойств рынка, которые были отмечены выше – выбросы происходят с интервалом от одного дня до недели.

Для того чтобы модель давала картину, наиболее близкую к реальному рынку, необходимо соответствующим образом подобрать параметры. На рисунках 9–11 показано, как изменяются статистические характеристики скачков в моделируемой системе (1) при варьировании соответствующих параметров.

Из рисунка 9 следует, что с ростом параметра є скачки становятся менее «острыми» и средняя ширина увеличивается. Среднее время, отделяющее последующий выброс от предыдущего, также увеличивается. Несколько неожиданным, на пер-



Рис. 11. Среднее значении: a) – ширины скачка, b) – интервала между скачками и их стандартные отклонения – c) и d) соответственно, в зависимости от значения параметра β при разных уровнях «отсечки» h. (ε=0.15, k=1, λ=1, b=2, γ=1, d=10, ωf=6, u=2, v=0.06).

вый взгляд, выглядит увеличение среднего времени, отделяющего последующий выброс от предыдущего с ростом параметра ε . Это связано со снижением общего числа скачков, которые становятся менее плотно распределенными во времени. Стоит отметить, что среднее значение интервала для значений h, равных 0 и 0.7, почти не отличается, что связано с разными качествами принимаемых во внимание выбросов. В первом случае выбросы имеют большую продолжительность, и за счет этого растет ожидаемое время до следующего скачка, при h=0.7 в расчете участвуют более острые пики, которые встречаются реже – то есть среднее значение интервала между ними становится больше.

Рассмотрим влияние других параметров модели (γ и β) на поведение «выбросов» (рис. 10).

С ростом параметра γ статистические показатели «скачков» (среднее значение ширины «скачка» и среднее значение интервала между двумя соседними «скачками») уменьшаются (рис. 10). Причем этот эффект сохраняется для различных значений h.

При изменении параметра β динамика средней ширины «скачка» перестает быть монотонной (рис. 11). Рост параметра β сначала (в определенном интервале) вызывает увеличение средней ширины выброса, затем – уменьшение, а далее поведение определяется и другими характеристиками модели (возможен выход на более или менее постоянный уровень). Аналогичным образом ведет себя и среднеквадратическое отклонение средней ширины выброса. Интервал между выбросами монотонно уменьшается при увеличении параметра.

Отметим, что характер изменения статистических характеристик не меняется при изменении уровня «отсечки».

Полученные результаты позволяют говорить о возможном использовании рассмотренной системы ФитцХью-Нагумо в качестве «генератора» цен на рынке электроэнергии на разные временные горизонты. Хотя модель не может называться прогнозирующей, общая картина вполне соответствует происходящему на рынке. Целью дальнейшего исследования является нахождение набора параметров, позволяющего, насколько это возможно, воспроизвести основные характеристики и особенности траектории реальных цен, учитывая при этом структурные изменения, которые связаны с выходными днями, сменой сезонов, температурными колебаниями и факторами, влияющими на энергетический рынок.

Библиографический список

1. 2011 National Electricity Transmission System (NETS) Seven Year Statement [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nationalgrid.com/uk/ Electricity/SYS/current/; Appendix A – System Maps [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http:// www.nationalgrid.com/NR/rdonlyres/B9B5D93B-9BDE-4C8D-B5A5-0F34FCED0E99/47005/ NETSSYS2011AppendixA.pdf.

2. APX-ENDEX: энергетическая биржа Великобритании, Нидерландов и Бельгии – APX Power UK RPD historical data [Электронный ресурс]. – Режим доступа: ftp://ftp.apxgroup.com/свободный (дата обращения: 15.04.2012).

3. Contreras J., Espinola R., Nogales F.J. and Conejo A.J. ARIMA Models to Predict Next-Day Electricity Prices // IEEE Transaction on power systems. -2003. – Vol. 18. – No 3. – P. 1014–1020.

4. *FitzHugh R*. Mathematical models of excitation and propagation in nerve. Biological Engineering, Schwan H. P. (ed.). – New York: McGraw-Hill, 1969. – P. 1–85.

5. *Geman H*. Commodities and Commodity Derivatives. – Wiley and Sons, 2005. –396 p.

6. *Kaderják P.* Economics of electricity generation // NARUC Training on Tariff Development and Utility Regulation (Baku, Azerbaijan). – 2007. – 27 p.

7. *Lucheroni C*. Resonating models for the electric power market // Phys. Rev. E. – 2007. – 62, 9831. – 13 p.

8. *Lucheroni C*. Stochastic Models of Resonating Markets // Journal of Economic Interaction and Coordination. – 2010. – Vol. 5. – №1. – P. 77–88.

9. *McNair T.* Analysing the suitability of the UK power grid for renewable generation // Dept. Engineering Mathematics University of Bristol. – Bristol, 2011. – 41 p.

10. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An Active Pulse Transmission Line Simulating Axon // Proc. IRE. – 1962. – V. 50 – P. 2061–2070.

11. Nan F., Bordignon S., Bunn D.W. and Lisi F. Forecasting Electricity Spot Prices: Assessing the Performance of Linear and Nonlinear Specifications. // 45th Scientific Meeting of the Italian Statistical Society. – 2010. – P. 1–8.

12. National Grid UK: британская распределительная сеть электроэнергии [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nationalgrid.com/uk/ Electricity/Data/Demand+Data/ свободный (дата обращения: 15.04.2012).

13. Serati M., Manera M., Plotegher M. Modeling electricity prices: from the state of the art to a draft of a new proposal // Liuc Papers n. 210, Serie Economia e Impresa. -2007. $-N_{2}$ 56. -49 p.

14. *Simmonds G.* Regulation of the UK electricity industry – CRI Industry Brief / University of Bath (School of Management). – Bath, 2002. –136 p.

15. *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.* On the Theory of the Brownian Motion // Phys. Rev. – 1930. – V. 36, Issue 5. – P. 823–841.

16. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 914 с.