

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 17, № 2



2015

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н. П. ОГАРЁВА

Журнал Средневолжского математического общества

ТОМ 17, № 2

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

Главный редактор

В. Ф. Тишкин

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Заместитель главного редактора

Н. Д. Кузьмичев

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Ответственный секретарь

П. А. Шаманаев

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Редакционная коллегия

А. С. Андреев

Ш. А. Алимов

А. М. Ахтямов

Ш. А. Аюпов

И. В. Бойков

П. А. Вельмисов

В. К. Горбунов

В. З. Гринес

Ю. Н. Дерюгин

А. П. Жабко

В. И. Жегалов

Т. Ш. Кальменов

А. М. Камачкин

Е. Б. Кузнецов

В. Н. Кризский

Б. В. Логинов

Anca Veronica Ion

С. И. Мартынов

П. П. Матус

О. В. Починка

В. П. Радченко

И. П. Рязанцева

М. С. Салахитдинов

С. И. Спивак

М. Т. Терехин

Редакционный совет

Н. Д. Морозкин

Башкирский государственный
университет

П. В. Сенин

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарева

Л. А. Сухарев

Средне-Волжское
математическое общество

Н. Г. Ярушкина

Ульяновский государственный
технический университет

САРАНСК

2015

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 17, № 2

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевикская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 23-32-05

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
-----------------------------	---

В. В. Афонин, С. М. Мурюмин, А. В. Мускатиньев

Моделирование управлением нелинейным объектом 3-го порядка с оптимальной стабилизацией конечного состояния	7
--	---

1. Постановка задачи	7
2. Моделирование управления нелинейными объектами 3-го порядка	9
3. Заключение	12

Е. Я. Гуревич, Е. Д. Куренков

Энергетическая функция и топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях	15
--	----

1. Введение	15
2. Окрестность замкнутой траектории	17
3. Доказательство теоремы 1.1.....	21

В. З. Гринес, О. В. Починка, А. А. Шиловская

Топологически псевдокогерентные диффеоморфизмы 3-многообразий	27
---	----

1. Введение	27
2. Формулировка результатов	29

В. К. Захаров, О. А. Кузенков

Оптимальное управление в математической модели государства .	34
--	----

1. Общая агрегированная модель государства	34
2. Математическая модель государства и оптимальное управление в ней	36
3. Решение оптимизационной задачи для модели государства	37

Р. Д. Икрамов, С. А. Мустафина

Алгоритм уточнения констант скоростей колебательных реакций на примере модели Орегонатора	39
---	----

1. Введение	39
2. Постановка прямой задачи химической кинетики	39
3. Постановка обратной задачи химической кинетики	40
4. Результаты и их анализ	41

С. Н. Коледин, К. Ф. Коледина

Планирование экономически оптимального химического эксперимента на основе кинетической модели каталитической реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом	43
---	----

1. Введение	43
2. Постановка задачи	43

3.	Организация вычислительного процесса	44
4.	Кинетическая модель реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом	45
5.	Вычислительный эксперимент. Результаты	47

М. Л. Коломиец, А. Н. Сахаров

	Топология магнитных полей и динамические системы	51
1.	Введение	51
2.	Модели магнитных полей	53

Ю. А. Кузнецов, Е. В. Круглов, Д. А. Бурлакова

	Математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала с дискретным временем	58
1.	Введение	58
2.	Постановка задачи	59
3.	Существование сбалансированных траекторий	61
4.	Заключение	64

М. И. Малкин

	Аппроксимация максимальных мер для счетных топологических марковских цепей с мероморфной дзета-функцией	66
1.	Введение	66
2.	Предварительные сведения и результаты	68
3.	Аппроксимация максимальных мер	71

Е. В. Никишин, Е. Е. Пескова

	Искажения высокочастотных оптических сигналов фотоприемни- ками, изготовленными на основе кремния легированного золотом	76
--	--	----

А. Ю. Павлов

	Управляемость за бесконечное время и асимптотическое равно- весие	81
--	--	----

Т. К. Юлдашев, С. М. Овсяников

	Приближенное решение системы нелинейных интегральных урав- нений с запаздывающим аргументом и приближенное вычисление функционала качества	85
1.	Постановка задачи	86
2.	Дискретный аналог задачи 1	86
3.	Однозначная разрешимость системы суммарных уравнений (2.1)	87
4.	Вычисление функционала качества	89
5.	Заключение	91
6.	Приложение	91

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. В. Зубов, С. В. Зубов

Вещественный радиус устойчивости матрицы системы 96

Правила оформления рукописей в журнал
«Журнал Средневожского математического общества» 100

Правила верстки рукописей в системе LaTeX 102

Алфавитный указатель 104

ОТ РЕДАКЦИИ

Во втором номере 17-го тома публикуются работы ведущих учёных и молодых исследователей, являющихся участниками XII научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых (г. Саранск, 28 – 30 августа 2015 года). Конференция проводится национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом при поддержке РФФИ (грант № 15-01-20610). Все статьи имеют положительные рецензии, а сам журнал доступен в сети Internet на сайте [Elibrary.ru](http://elibrary.ru).

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 517.9

Моделирование управлением нелинейным объектом 3-го порядка с оптимальной стабилизацией конечного состояния

© В. В. Афонин¹, С. М. Мурюмин², А. В. Мускатиньев³

Аннотация. Рассматривается задача оптимальной стабилизации для нелинейных объектов управления 3-го порядка, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Оптимальная стабилизация понимается в смысле минимизации квадратичного функционала для линеаризованного объекта управления. Линеаризация осуществляется на каждом шаге численного интегрирования нелинейной системы дифференциальных уравнений и рассчитывается матрица оптимального регулятора. Управление в виде обратной связи по состоянию прикладывается к нелинейному объекту на каждом шаге численного интегрирования. Приводятся результаты моделирования с построением переходных процессов систем, замкнутых на оптимальный регулятор.

Ключевые слова: оптимальная стабилизация, аффинные системы управления, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, матрица оптимального регулятора, линейно-квадратичная задача оптимального управления, обратная связь, переходный процесс, система Лоренца

1. Постановка задачи

Задача стабилизации динамических объектов достаточно актуальна. Известны как теоретические результаты по этому вопросу [5], [7], [10], [11], так и чисто прикладные [9]. Рассмотрение линейно-квадратичной задачи оптимального управления отражено в учебных пособиях для вузов, например, в [4], [7], [12]. Численное моделирование задач управления обычно проводится в системе MATLAB [1], [2], [3], [4], [6]. Результаты моделирования для данной статьи получены также с помощью MATLAB (версии R14b).

Задача стабилизации рассматривается для так называемых аффинных систем управления, у которых управление входит в описание объекта линейно [10]. Математическая модель аффинной стационарной системы со скалярным управлением представляется в виде

Рассмотрим множество всех систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(X(t)) + B(X(t))u(t),$$

где
 $A(X(t)) = [a_1(X(t)), a_2(X(t)), \dots, a_n(X(t))]^T$, – векторная функция с элементами a_i ,
 $B(X(t)) = [b_1(X(t)), b_2(X(t)), \dots, b_n(X(t))]^T$, – векторная функция с элементами b_i ,
 $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$, – вектор состояния.

¹ Доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; afoninvv@fet.mrsu.ru

² Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru

³ Доцент кафедры электроники и нанoeлектроники, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; muskatav@mail.ru

В общем случае стационарную аффинную систему можно записать в следующем виде [10]:

$$\frac{dx}{dt} = A(x) + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

где векторная функция

$$A(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))^T,$$

$B(x) = \|b_{ij}(x)\|$ – функциональная матрица типа $n \times m$ с элементами $b_{ij}(x)$.

Задача стабилизации определяется как перевод системы управления из заданного начального состояния в нулевое состояние. При этом управление выражается в виде обратной связи по состоянию системы. При решении задачи оптимальной стабилизации управление должно быть выбрано так, чтобы при произвольном начальном условии $X(0)$ минимизировать квадратичный функционал вида

$$I = \int_0^\infty (X(t)^T Q X(t) + U(t)^T R U(t)) dt \rightarrow \min,$$

где Q – положительно-определенная симметрическая матрица действительных чисел размера $n \times n$, R – положительно-определенная симметрическая матрица действительных чисел размера $m \times m$, T – символ транспонирования. На управление ограничений не наложено.

Решение задачи оптимальной стабилизации имеет вид

$$U(t) = -R^{-1} B^T P X(t),$$

где P – $(n \times n)$ симметрическая матрица, положительно-определенное решение нелинейного матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0.$$

Предполагается, что все переменные состояния доступны для измерения.

Авторами предлагается решать задачу оптимальной стабилизации для нелинейных объектов в несколько этапов. Сначала проверяется управляемость данной нелинейной системы [3], где имеется программный код. Затем осуществляется линеаризация нелинейной аффинной системы [4], проверяется возможность управления по первому приближению. В рассматриваемых ниже примерах часть полюсов или все полюса линеаризованной системы лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости корней. Приведем этапы предлагаемого подхода.

1. Проверка на управляемость нелинейной системы [3].
2. Линеаризация нелинейной системы и проверка возможности управления по первому приближению [4].
3. Задание весовых матриц квадратичного функционала.
4. Интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих объект управления [4].
5. В темпе интегрирования (на каждом шаге) осуществлять линеаризацию системы управления и решать задачу оптимальной стабилизации для линеаризованной системы – рассчитывать линейный оптимальный регулятор.

6. Замыкание нелинейной системы на линейный оптимальный регулятор, определяемый на каждом шаге интегрирования.
7. Построение переходных процессов в нелинейной системе. Численно оценивать вектор конечного состояния.

2. Моделирование управления нелинейными объектами 3-го порядка

Рассмотрим несколько объектов управления, которые взяты из [8], [10], [11], и применим к ним указанный выше подход для решения задачи стабилизации. В [10], [11] рассматриваются алгоритмы синтеза управлений, обеспечивающих стабилизацию аффинных систем. Алгоритмы достаточно сложны, управления нелинейным образом зависят от переменных состояния системы. В [8] решаются задачи быстрогодействия для нелинейных объектов. Для каждого примера приводятся весовые матрицы квадратичного функционала и начальные и конечные вектора состояний.

Пример 1. Система Рёсслера с управлением [10]. Описание объекта управления имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 &= c + x_3(x_1 - b) + u,\end{aligned}$$

где a , b , c – положительные постоянные параметры.

Значения начального вектора состояния:

$$x_1(0) = 6; \quad x_2(0) = 7; \quad x_3(0) = 8.$$

Значения конечного вектора состояния:

$$x_1(8) = -0.13913; \quad x_2(8) = 0.034098; \quad x_3(8) = -0.175265.$$

Матрица Q квадратичного функционала:

$$\begin{matrix} 234 & 0 & 0 \\ 0 & 468 & 0 \\ 0 & 0 & 702 \end{matrix}$$

Матрица R квадратичного функционала: 0.0130.

Переходные процессы в замкнутой системе показаны на рис. 1.

Пример 2. Тепловой объект [8]. Объект состоит из аппарата, объем которого необходимо нагреть до определенной температуры. Описание объекта управления:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u - x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= (x_2 - x_2^2) - x_3,\end{aligned}$$

После достижения необходимой температуры нередко требуется ее стабилизировать.

Значения начального вектора состояния:

$$x_1(0) = 2; \quad x_2(0) = -3; \quad x_3(0) = 4.$$

В результате стабилизации значения конечного вектора состояния:

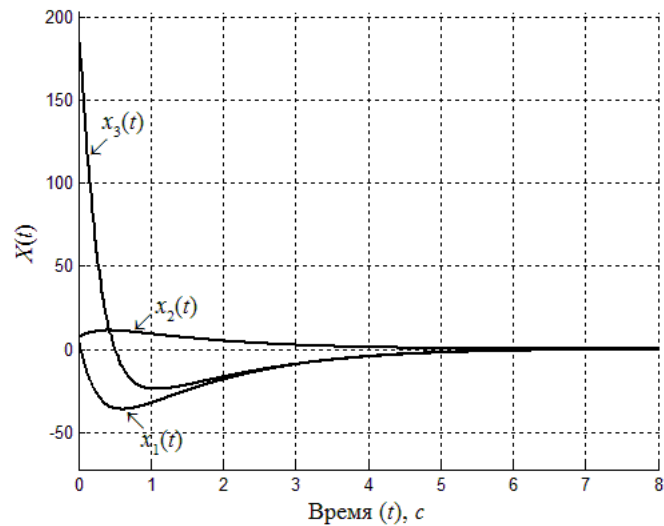


Рис. 1: Переходной процесс в системе Рёсслера с управлением

$$x_1(10) = 8.3772e - 05; \quad x_2(10) = -5.75051e - 05; \quad x_3(10) = 9.6394e - 06.$$

Матрица Q квадратичного функционала:

$$\begin{array}{ccc} 1.3000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9000 \end{array}$$

Матрица R квадратичного функционала: 0.3000 .

Переходные процессы в замкнутой системе показаны на рис. 2.

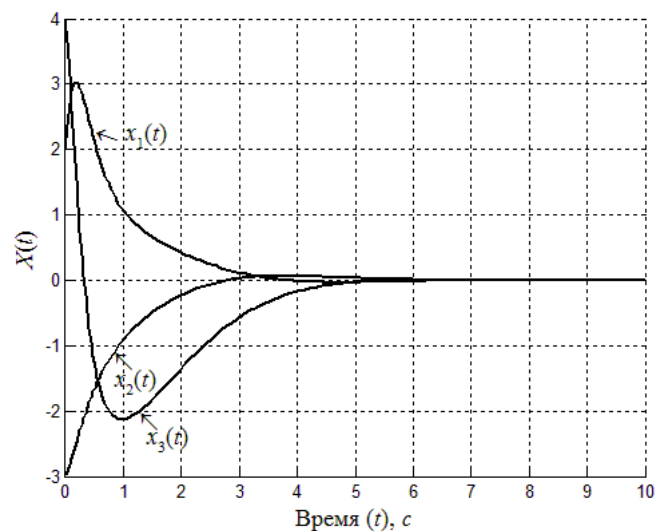


Рис. 2: Переходной процесс в системе Рёсслера с управлением

Пример 3. Система Лоренца с одним управлением [10], [11]. Описание объекта управ-

ления имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma x_2 + \sigma x_3, \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= x_1 * x_2 - bx_3,\end{aligned}$$

где σ , b , r – положительные постоянные параметры.

Как и в [10], [11] примем следующие значения параметров:

$$\sigma = 10; \quad b = \frac{8}{3}; \quad r = 28.$$

Значения начального вектора состояния:

$$x_1(0) = -10; \quad x_2(0) = 5; \quad x_3(0) = 8.$$

В результате стабилизации значения конечного вектора состояния:

$$x_1(2) = -0.0003252; \quad x_2(2) = -0.000238088; \quad x_3(2) = 0.0436865.$$

Матрица Q квадратичного функционала:

$$\begin{array}{ccc} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0.6667 & 1.0000 \end{array}$$

Матрица R квадратичного функционала: 0.2300.

Переходные процессы в замкнутой системе показаны на рис. 3.

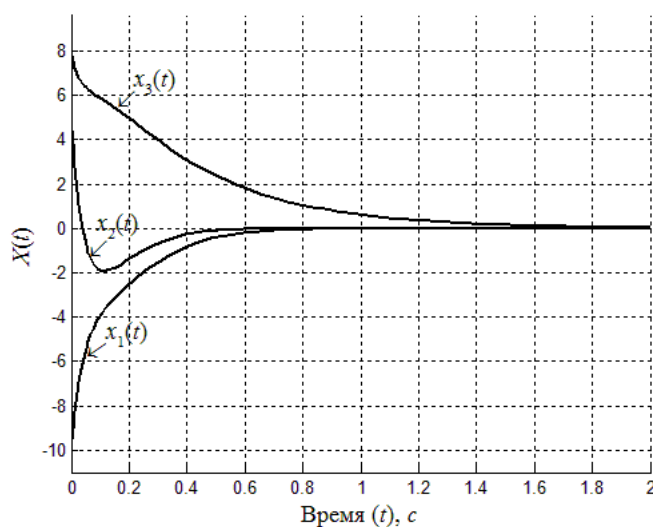


Рис. 3: Переходной процесс в системе Рёсслера с управлением

Пример 4. Система Лоренца с двумя управлениями [10]. Описание объекта управления имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -10(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 - x_2 + u_1x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - u_2x_3,\end{aligned}$$

В [10] приведено решение со следующими начальными условиями:

$$x_1(0) = 3; \quad x_2(0) = -4; \quad x_3(0) = -1.$$

Для решения данного примера использовался прием полной линеаризации на каждом шаге интегрирования системы дифференциальных уравнений. В результате переходные процессы получены практически, как и в [10].

Матрица Q квадратичного функционала:

$$\begin{array}{ccc} 1.3000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9000 \end{array}$$

Матрица R квадратичного функционала:

$$\begin{array}{cc} 15 & 0 \\ 0 & 30 \end{array}$$

Значения конечного вектора состояния:

$$x_1(5) = 5.74015e - 07;$$

$$x_2(5) = 7.43603e - 08;$$

$$x_3(5) = 0.413952.$$

Переходные процессы в замкнутой системе показаны на рис. 4.

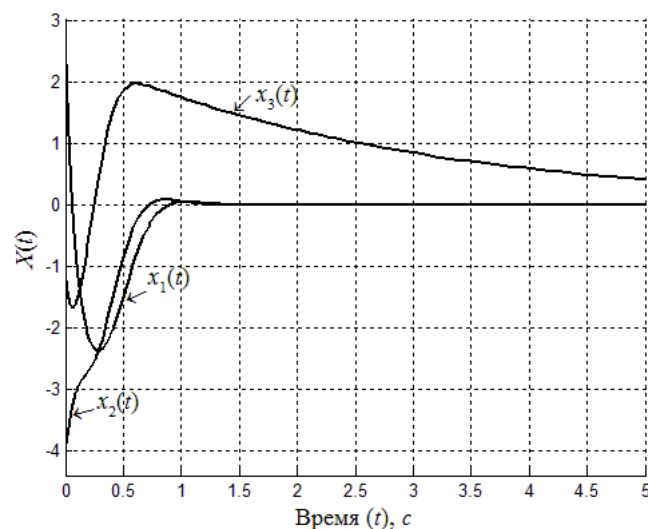


Рис. 4: Переходный процесс в системе Рёсслера с управлением

3. Заключение

Предложенный подход оптимальной стабилизации нелинейных систем носит эвристический характер. Но с его помощью значительно проще выполнить численное моделирование, получение переходных процессов в замкнутой системе. При этом упрощается возможная техническая реализация оптимальных регуляторов, поскольку стабилизирующее управление является линейным относительно переменных состояния нелинейного объекта управления. Процессы стабилизации можно регулировать весовыми матрицами квадратичного функционала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афонин В.В., Мурюмин С.М., “Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16:2** (2014), 118–120.
2. Афонин В.В., “Вывод нелинейного объекта третьего порядка на заданное движение”, *Вестник Мордовского университета, серия «Физико-математические науки»*, 2014, № 4, 52–54.
3. Афонин В.В., “Анализ управляемости нелинейных аффинных систем управления в системе MATLAB”, *Вестник Мордовского университета, серия «Физико-математические науки»*, 2012, № 2, 177–181.
4. Афонин В.В., Федосин С.А., Иконников С.Е., “Основы теории управления : лабораторный практикум”, 2008, 244.
5. Зубер И.Е., *Добавление, в книге Балонин Н. А. Новый курс теории управления движением*, Изд-во СПбГУ, СПб., 2000.
6. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л., *Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB*, Наука, Саранск, 2000.
7. *Синтез регуляторов систем автоматического управления*, **3**, 2-е изд, перераб. и доп., ред. Пупков К.А., Егупова Н.Д., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, М., 2004.
8. Олейников В.А., *Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности*, Недра, Л., 1982.
9. Мускатыньев А.А., Мускатыньев А.В., “Патент на полезную модель 49281 RU, МПК G01 R 31/26. Устройство для измерения токов утечки силовых полупроводниковых приборов”, 2005, 2.
10. Краснощёченко В.И., Крищенко А.П., *Нелинейные системы : геометрические методы анализа и синтеза*, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2005.
11. *Современная прикладная теория управления : Синергетический подход в теории управления*, ред. Колесников А.А., Изд-во ТРТУ, Таганрог, 2000.
12. Душин С.Е., Зотов Н.С., Имаев Д.Х., *Теория автоматического управления: учеб. для вузов*, 2, ред. Яковлев В.Б., Высш. шк., М., 2005.

Modeling of nonlinear control object 3-th order with optimal stabilization of the final state

© V. V. Afonin⁴, S. M. Murjumin⁵, A. V. Muskatinjev⁶

Abstract. We consider the problem of optimal stabilization of nonlinear control objects 3-th order, described by ordinary differential equations with constant coefficients. Optimal stabilization is understood in the sense of minimization of a quadratic functional for the linearized control object. The linearization is performed at each step of numerical integration of nonlinear system of differential equations and calculated the matrix of the optimal regulator. Management in the form of state feedback is applied to non-linear object at each step of numerical integration. The results of simulation with plotting transient systems and the closed-loop optimal controller.

Key Words: optimal stabilization, affine control systems, a system of ordinary differential equations, matrix optimal controller, linear-quadratic optimal control problem, feedback, the transition process, Lorenz system

⁴ Associate Professor in the Department of automated systems of information processing and management, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru

⁵ Associate Professor in the Department of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru

⁶ Associate Professor in the Department of electronics and nanoelectronics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; muskatav@mail.ru

УДК 517.9

Энергетическая функция и топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях

© Е. Я. Гуревич¹, Е. Д. Куренков²

Аннотация. В работе вводится понятие согласованной эквивалентности энергетических функций Морса-Ботта для потоков Морса-Смейла на поверхностях и доказывается, что согласованная эквивалентность энергетических функций является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности таких потоков. Предлагаемый результат устраняет неточность в доказательстве аналогичного факта К. Мейером, замеченную А.А. Ошемковым и В.В. Шарко.

Ключевые слова: структурно-устойчивые потоки на поверхностях, потоки Морса-Смейла, топологическая классификация, функция Ляпунова.

1. Введение

Работа является продолжением работы [3], где сформулирован результат и приведена история вопроса. В настоящей работе уточняются формулировки и приводится детальное доказательство анонсированного результата.

Напомним, что непрерывная функция $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* потока f^t на M^n , если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой блуждающей точки $x \in M^n$ и любого $t > 0$.
2. $\varphi(f^t(x)) = \varphi(x)$ для любой неблуждающей точки $x \in M^n$.

Из работы Ч. Конли [2] следует, что непрерывная функция Ляпунова существует для любого гладкого потока. Из работы В. Вильсона и Дж. Йорке [7] следует, что любой структурно-устойчивый поток обладает *энергетической функцией*, то есть гладкой функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством системы³.

Напомним, что точка $p \in M^n$ называется *критической точкой* C^2 -гладкой функции $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, если $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_p = 0$ для любого $i \in 1, \dots, n$ в локальных координатах $x_1, \dots, x_n$ в окрестности точки p . Число отрицательных (нулевых) собственных значений матрицы Гессе в критической точке p будем называть *индексом (степенью вырождения)* этой точки и обозначать i_p (k_p).

Обозначим через Δ множество всех критических точек функции $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ и через $\Delta_k \subset \Delta$ — множество критических точек функции φ , для которых степень невырожденности равна k . Функция $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если $\Delta = \Delta_0$ (то есть все ее критические точки невырождены). Функция φ называется *функцией Морса-Ботта*, если множество Δ есть объединение конечного числа гладких подмногообразий

¹ Доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики; elena_gurevich@list.ru.

² Студент факультета экономики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики; eugene2402@mail.ru.

³ В работе [7] доказано, что для любого гладкого потока f^t существует гладкая функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством этого потока. Для структурно-устойчивого потока цепно-рекуррентное множество совпадает с неблуждающим множеством.

$C_1, \dots, C_l$ многообразия M^n и гессиан в каждой критической точке $p \in C_i$ невырожден в направлении, нормальном к подмногообразию C_i , $i \in \{1, \dots, l\}$.

Для функции Морса-Ботта справедливо следующее утверждение, называемое леммой Морса-Ботта (см., например, [1]).

Предложение 1.1. Пусть $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса-Ботта, C — ее критическое подмногообразие размерности d и $p \in C$ — произвольная точка. Тогда существует окрестность $U_p \in M^n$ точки p и диффеоморфизм $g : U_p \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ такие, что:

1. $g(p) = 0$;
2. $g(U_p \cap C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid y = 0\}$;
3. $\varphi(g^{-1}(x, y)) = \varphi(C) - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_{i_p}^2 + y_{i_p+1}^2 + \dots + y_{n-d}^2$,

причем значение $\varphi(C)$ одно и то же для всех точек $p \in C$.

Напомним, что гладкий поток f^t на многообразии M^n называется *поток Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и периодических решений пересекаются трансверсально. Поток Морса-Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным потоком*.

Из работы [6] С. Смейла (Th B) следует, что для любого градиентно-подобного потока f^t на M^n существует энергетическая функция $\varphi : M^n \rightarrow [0, n]$ со следующими свойствами:

1. Функция φ является функцией Морса.
2. $\varphi(p) = \dim W_p^u$ для любого состояния равновесия $p \in \Omega(f^t)$.

К. Мейер в работе [4] доказал, что для произвольного потока Морса-Смейла f^t на M^n существует C^∞ -гладкая энергетическая функция $\varphi : M^n \rightarrow [0, n]$ следующими свойствами:

1. Функция φ является функцией Морса-Ботта.
2. Множество Δ_0 совпадает с множеством всех неподвижных точек потока f^t , множество Δ_1 совпадает с множеством предельных циклов.
3. $\varphi(p) = \dim W_p^u$ для любого состояния равновесия $p \in \Omega(f^t)$.
4. $\varphi(x) = 0(2)$ для любой точки x , принадлежащей устойчивому (неустойчивому) предельному циклу.

Будем называть функцию, построенную Мейером, *энергетической функцией Морса-Ботта* потока Морса-Смейла.

Пусть γ — предельный цикл потока f^t периода τ_γ , $x_0 \in \gamma$ — произвольная точка, $x_1 = f^{t_1}(x_0)$, $x_2 = f^{t_2}(x_0)$, $0 < t_1 < t_2 < \tau_\gamma$. Точки x_0, x_1, x_2 задают ориентацию предельного цикла γ , которую будем называть *ориентацией, индуцированной потоком f^t* . Пусть γ' — предельный цикл потока f'^t , на котором определена ориентация, индуцированная потоком f'^t . Будем говорить, что гомеоморфизм $h : \gamma \rightarrow \gamma'$ является сохраняющим ориентацию, если ориентация на предельном цикле γ' , определенная точками $h(x_0), h(x_1), h(x_2)$, совпадает с ориентацией, индуцированной потоком f'^t .

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть f^t, f'^t — потоки Морса-Смейла, φ, φ' — энергетические функции Морса-Ботта потоков f^t и f'^t соответственно. Функции φ, φ' называются согласованно эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $H: M^n \rightarrow M^n$ и $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что:

1. гомеоморфизм χ является сохраняющим ориентацию;
2. $f'H = \chi f$;
3. для любого предельного цикла $\gamma \in \Delta_1$ ограничение $H|_\gamma$ гомеоморфизма H на γ является сохраняющим ориентацию.

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.1. Для того, чтобы два потока Морса-Смейла f^t и f'^t , заданные на ориентируемом многообразии M^2 , были топологически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их энергетические функции Морса-Ботта φ и φ' были согласованно эквивалентными.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения») при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-01-12452 офи-м2, 15-01-03687 А). Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку за внимание к работе и полезные обсуждения.

2. Окрестность замкнутой траектории

Пусть f^t — поток Морса-Смейла на многообразии M^2 и γ — его устойчивый предельный цикл. Из существования энергетической функции Морса-Ботта φ и утверждения 1.1. следует, что существует замкнутая окрестность $N_\gamma(\varepsilon)$ предельного цикла γ , имеющая структуру локально-тривиального расслоения над окружностью со слоем отрезок (диффеоморфная либо кольцу $\mathbb{S}^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, либо листу Мебиуса) и оснащенная парой гладких трансверсальных слоений $\{S_r\}_{r \in [0, \varepsilon]}$, $\{R_s\}_{s \in \gamma}$ со следующими свойствами:

1. $S_r \subset \varphi^{-1}(r)$ для любого $r \in [0, \varepsilon]$; $S_0 = \gamma$. Если $r > 0$, и N_γ ориентируема, то S_r — пара непересекающихся окружностей. Если $r > 0$ и $N_\gamma(\varepsilon)$ не ориентируема, то S_r — одна окружность.
2. R_s является объединением пары траекторий градиентного потока $-\text{grad}\varphi$ функции φ , и точки $s \in \gamma$, принадлежащей замыканию этих траекторий.
3. для любой пары s, r ($r \neq 0$) пересечение $S_r \cap R_s$ трансверсально и состоит в точности из двух точек, причем в ориентируемом случае каждая компонента связности S_r пересекается с R_s ровно в одной точке.

Л е м м а 2.1. Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $s \in \gamma$ слой R_s является дугой без контакта для потока $f^t|_{N_\gamma(\varepsilon)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $N_\gamma(\tilde{\varepsilon})$ — окрестность, определенная выше. Из теоремы о трубке тока (см., например, теорему 1.1 в книге [5]) следует, что для любой точки $s \in \gamma$ существует такая окрестность $U_s \subset N_\gamma(\tilde{\varepsilon})$, что дуга $R_s \cap U_s$ является дугой без контакта для ограничения потока f^t на U_s . В силу компактности дуги γ существует конечное

число точек $s_1, \dots, s_k \subset \gamma$ таких, что множество $\{U_{s_i} \cap \gamma\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ образует покрытие дуги γ . Тогда существует ε такое, что окрестность $N_\gamma(\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{s_i}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Далее всюду будем предполагать, что окрестность $N_\gamma(\varepsilon)$ предельного цикла удовлетворяет заключению леммы 2.1. и будем опускать ε в обозначении этой окрестности: $N_\gamma = N_\gamma(\varepsilon)$.

Положим $\tilde{N}_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq \varepsilon\}$, $\Pi = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, |y| \leq \varepsilon\}$.

Пусть N_γ ориентируема. Тогда она гомеоморфна кольцу $\mathbb{S}^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ и существует накрытие $p_+ : \tilde{N}_\gamma \rightarrow N_\gamma$, обладающее следующими свойствами:

1. ограничение $p_+|_\Pi : \Pi \rightarrow N_\gamma$ отображения p_+ на множество Π является взаимно-однозначным;
2. $p_+(x + k, y) = p_+(x, y)$ для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{Z}$;
3. для любого отрезка $I_x \subset \Pi$, параллельного оси Oy и проходящего через точку $x \in OX$ выполняется $p_+(I_x) = R_{p_+(x, 0)}$;
4. для любой прямой $L_y \subset \Pi$, параллельной оси Ox и проходящей через точку $y \in Oy$, выполняется $p_+(L_y \cup L_{-y}) = S_y$.

Пусть N_γ неориентируема. Тогда она диффеоморфна листу Мебиуса и существует накрытие $p_- : \tilde{N}_\gamma \rightarrow N_\gamma$, обладающее следующими свойствами:

1. ограничение $p_-|_\Pi : \Pi \rightarrow \gamma$ отображения p_- на множество Π является взаимно-однозначным;
2. $p_-(x + k, y) = p_-(x, (-1)^k y)$ для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{Z}$;
3. для любого отрезка $I_x \subset \Pi$, параллельного оси Oy и проходящего через точку $x \in OX$ выполняется $p_-(I_x) = R_{p_-(x, 0)}$;
4. для любой прямой $L_y \subset \Pi$, параллельной оси Ox и проходящей через точку $y \in Oy$ выполняется $p_-(L_y \cup L_{-y}) = S_y$.

Обозначим через $\tilde{f}_\delta^t$ поток в $\tilde{N}_\gamma$, накрывающий поток $f^t|_{N_\gamma}$, $\delta \in \{+, -\}$.

Для определенности предположим, что при обходе замкнутой траектории γ в направлении возрастания времени соответствующее значение x в накрывающем пространстве $\tilde{N}_\gamma$ растет. Тогда каждая траектория потока $\tilde{f}_\delta^t$, лежащая выше оси Ox , является графиком убывающей функции, а каждая траектория потока $\tilde{f}_\delta^t$ лежащая ниже оси Ox , является графиком возрастающей функции.

Л е м м а 2.2. Пусть N_γ — окрестность замкнутой траектории, определенная в лемме 2.1.. И пусть $\eta, \theta \in \partial N_\gamma$ — две произвольные различные точки на границе этой окрестности, причем в случае ориентируемой N_γ точки η и θ принадлежат разным компонентам связности границы ∂N_γ . Тогда существует дуга без контакта $s \in N_\gamma$, соединяющая точки η и θ .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим ориентируемый случай. Обозначим через $\tilde{\eta}, \tilde{\theta}$ такие точки в Π , что $p_\delta(\tilde{\eta}) = \eta$, $p_\delta(\tilde{\theta}) = \theta$. Для определенности будем считать, что $\tilde{\eta} = (x_\eta, \varepsilon)$, $\tilde{\theta} = (x_\theta, -\varepsilon)$ и $\tilde{\eta}$ лежит левее $\tilde{\theta}$ (см. рис. 1, а)). Рассуждения в случае, когда точка $\tilde{\eta}$ лежит правее точки $\tilde{\theta}$, будут аналогичными.

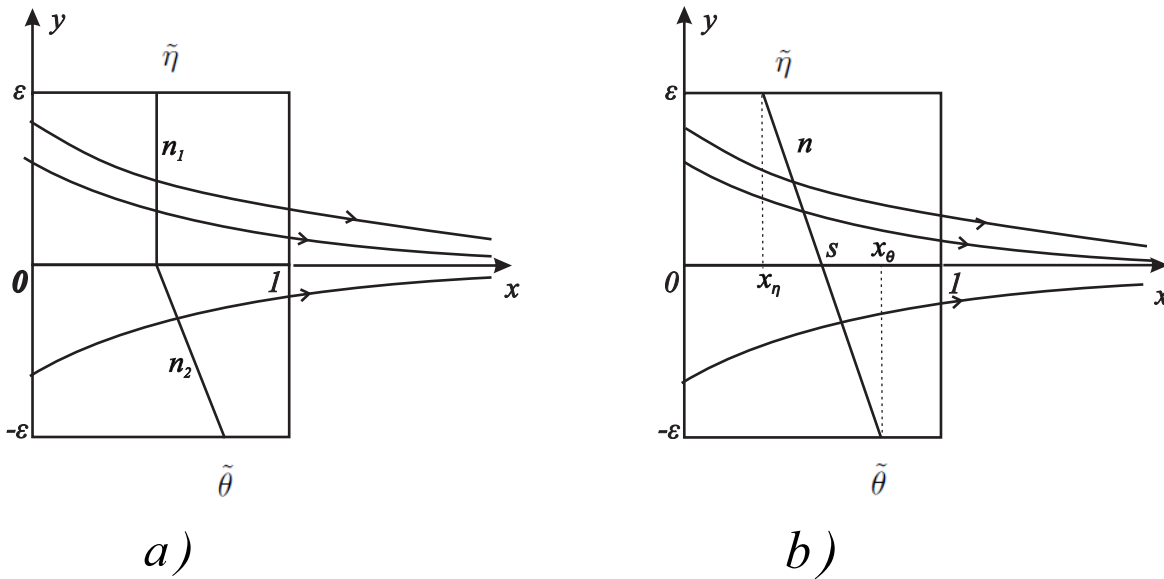


Рис. 1: а) построение дуги без контакта в лемме 2.2.; б) построение слоения в лемме 2.3.

Построим дугу $n \subset \Pi'$, соединяющую точки $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\theta}$, и являющуюся дугой без контакта для потока $\tilde{f}_\delta^t$. Тогда дуга $p_\delta(n)$ будет искомой дугой s . Дугу n получим как объединение двух отрезков прямых n_1, n_2 . Отрезок n_1 соединяет точки $\tilde{\eta}$ и $(x_\eta, 0)$, отрезок n_2 соединяет точки $(x_\eta, 0)$ и $\tilde{\theta}$. Отрезок n_1 является дугой без контакта для потока $\tilde{f}_\delta^t$ в силу того, что он принадлежит прообразу некоторого слоя R_s слоения $\{R_s\}$, определенного в лемме 2.1.. Отрезок n_2 будет являться дугой без контакта в силу того, что является графиком монотонно убывающей функции, в то время как все траектории потока $\tilde{f}_\delta^t$, лежащие ниже оси Ox , являются графиками возрастающих функций.

В случае неориентируемой окрестности N_γ достаточно заметить, что всегда можно выбрать такую область $\Pi' = \{(x, y) \mid k \leq x < k+1, |y| \leq \varepsilon\}$, $0 \leq k < 1$, что точки $\tilde{\eta}, \tilde{\theta} \in \Pi'$ такие, что $p_\delta(\tilde{\eta}) = \eta$, $p_\delta(\tilde{\theta}) = \theta$, принадлежат разным прямым $y = \pm\varepsilon$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям для первого случая.

Доказательство закончено.

Представим ориентируемую окрестность N_γ в виде объединения двух замкнутых колец N_1 и N_2 , каждое из которых ограничено замкнутой траекторией γ и одной из компонент связности границы ∂N_γ . Обозначим через $D_1 \subset N_1$, $D_2 \subset N_2$ компоненты связности границы ∂N_γ . Зафиксируем на окружностях D_1, D_2 ориентацию, согласованную с ориентацией предельного цикла, индуцированной потоком f^t . А именно, если при обходе предельного цикла γ в направлении, задаваемой его ориентацией, окрестность N_i остается справа (слева), то при обходе окружности D_i в направлении, заданном её ориентацией, окрестность N_i остается слева (справа).

Лемма 2.3. Пусть N_γ — ориентируемая окрестность, удовлетворяющая заключению леммы 2.1.. Тогда для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $\Gamma: D_1 \rightarrow D_2$ существует непрерывное слоение $\{T_s\}_{s \in \gamma}$ такое, что

- каждый слой T_s пересекает окружность D_i в единственной точке, причем $T_s \cap D_2 = \Gamma(T_s \cap D_1)$;
- для каждого $i \in \{1, 2\}$ и каждого $c \in [0, \varepsilon]$ пересечение $T_s \cap N_i \cap \varphi^{-1}(c)$ состоит ровно из одной точки.

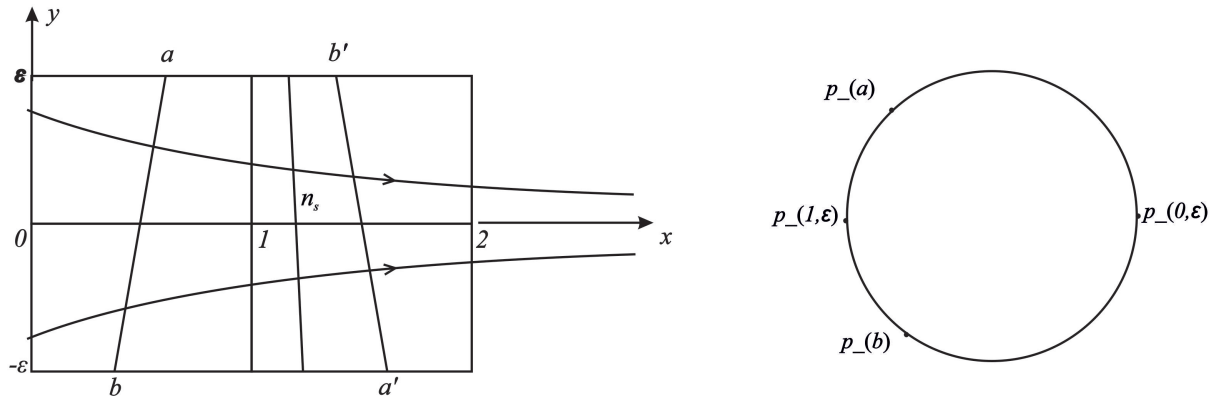


Рис. 2: Построение слоения в лемме 2.4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим точку $(0, \varepsilon)$ за a . На полуинтервале $[(0, -\varepsilon); (1, -\varepsilon))$ необходимо найдется единственная точка b с координатами $(x_b, -\varepsilon)$ такая, что $p_+(a) = \Gamma(p_+(b))$. Пусть точка a' имеет координаты $(1, \varepsilon)$, а точка b' — координаты $(x_b + 1, -\varepsilon)$. Обозначим за T параллелограмм с вершинами a, a', b', b . В накрывающем пространстве отображение Γ индуцирует гомеоморфизм $\tilde{\Gamma}: [a, a'] \rightarrow [b, b']$.

Обозначим через n отрезок, принадлежащий трапеции T , соединяющий точки $d \in [a, a']$ и $\tilde{\Gamma}(d) \in [b, b']$, положим $\tilde{s} = n \cap Ox$, $s = p_-(\tilde{s})$, $T_s = p_-(n)$. Дуга T_s удовлетворяет условию 1) по построению. Условие 2) следует из определения накрытия p_+ и того факта, что отрезок n пересекается с каждой прямой L_y , параллельной оси Ox , ровно в одной точке. Никакие две дуги $T_s, T_{s'}$, определенные таким образом, не пересекаются в силу того, что $\tilde{\Gamma}$ переводит отрезок $[a, a']$ в отрезок $[b, b']$ с сохранением ориентации. **Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

Л е м м а 2.4. Пусть N_γ — неориентируемая окрестность, удовлетворяющая заключению леммы 2.1.. Пусть гомеоморфизм $\Gamma: \partial N_\gamma \rightarrow \partial N_\gamma$ не имеет неподвижных точек и является инволюцией. Тогда существует слоение $\{T_s\}_{s \in \gamma}$ такое, что:

1. каждый слой T_s пересекает ∂N_γ ровно в двух точках η_s и $\theta_s = \Gamma(\eta_s)$;
2. для каждого $c \in (0, \varepsilon]$ и каждого $s \in \gamma$ пересечение $T_s \cap \varphi^{-1}(c)$ состоит ровно из двух точек, а пересечение $T_s \cap \varphi^{-1}(0)$ — ровно из одной точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим за $l_1^+ \subset \tilde{N}_\gamma$ отрезок, соединяющий точки $(0, \varepsilon)$ и $(1, \varepsilon)$, а за l_1^- — отрезок, соединяющий точки $(0, -\varepsilon)$ и $(1, -\varepsilon)$ (см. рис. 2.). Покажем, что на отрезке l_1^+ имеется такая точка a , что на отрезке l_1^- имеется точка b , удовлетворяющая соотношению $p_-(b) = \Gamma(p_-(a))$. Предположим, что таких точек нет. Тогда дуга $p_-(0, \varepsilon)p_-(a)p_-(1, \varepsilon)$ окружности ∂N_γ гомеоморфизмом Γ отображается в себя. По теореме Брауэра отображение Γ будет иметь неподвижную точку, что противоречит условию леммы.

Пусть точка a имеет координаты (x_a, ε) , а точка b — $(x_b, -\varepsilon)$. Обозначим через a' точку с координатами $(x_a + 1, -\varepsilon)$, а через b' — точку с координатами $(x_b + 1, \varepsilon)$ и через T трапецию с вершинами a, b', a', b . Отметим, что $p_-(a) = p_-(a')$, $p_-(b) = p_-(b')$ и $p_-|_{T \setminus a'b'}: T \setminus a'b' \rightarrow N_\gamma$ является взаимно однозначным отображением.

Покажем, что гомеоморфизм Γ сюръективно переводит дугу $p_-(a)p_-(0, \varepsilon)p_-(b)$ в дугу $p_-(a)p_-(1, \varepsilon)p_-(b)$. Заметим, что, поскольку гомеоморфизм Γ не имеет неподвижных

точек, то он необходимо сохраняет ориентацию окружности ∂N_γ , так как любой меняющий ориентацию гомеоморфизм окружности имеет ровно две неподвижные точки. Это означает, что при движении по дуге $p_-(a)p_-(0, \varepsilon)p_-(b)$ произвольной точки от $p_-(a)$ к $p_-(b)$ ее образ при гомеоморфизме g опишет дугу $p_-(a)p_-(1, \varepsilon)p_-(b)$ в направлении от $p_-(b)$ к $p_-(a)$. Таким образом, в накрывающем пространстве отображение Γ индуцирует гомеоморфизм $\tilde{\Gamma}: ab' \rightarrow ba'$ отрезка $[a, b]'$ на отрезок $[b, a']$.

Обозначим через n отрезок, принадлежащий трапеции T , и соединяющий точки $d \in [a, b']$ и $\tilde{\Gamma}(d) \in [b, a']$, положим $\tilde{s} = n \cap Ox$, $s = p_-(\tilde{s})$, $T_s = p_-(n)$. Дуга T_s удовлетворяет условию 1) по построению. Условие 2) следует из определения накрытия p_- и того факта, что отрезок n пересекается с каждой прямой L_y , параллельной оси Ox , ровно в одной точке. Никакие две дуги $T_s, T_{s'}$, определенные таким образом, не пересекаются в силу того, что $\tilde{\Gamma}$ переводит отрезок $[a, b']$ в отрезок $[b, a']$ с сохранением ориентации.

Доказательство закончено.

3. Доказательство теоремы 1.1..

Необходимость.

Пусть потоки f^t и f'^t топологически эквивалентны, то есть существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях. Построим гомеоморфизмы $H: M \rightarrow M$ и $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, сопрягающие энергетические ξ -функции φ и φ' данных потоков.

Так как у функций φ и φ' значения в любой критической точке x совпадают с размерностью неустойчивого многообразия $\dim W_x^u$, то гомеоморфизм χ можно положить равным тождественному.

Положим $M_1 = M^2 \setminus \Delta_1$, и $M'_1 = M'^2 \setminus \Delta'_1$ и определим вспомогательный гомеоморфизм $g_1: M_1 \rightarrow M'_1$ следующим образом. Пусть $x \in M_1$ — произвольная точка, отличная от состояния равновесия, l_x — траектория потока f^t , проходящая через точку x , $x' = h(x)$ и $l'_{x'} = h(l_x)$. Произвольной точке $y \in l_x$ поставим в соответствие точку $y' \in l'_{x'}$ такую, что $\varphi(y) = \varphi'(y')$ и положим $g_1(y) = y'$. Построенное отображение продолжим по непрерывности на множество состояний равновесия потока f^t .

Пусть $\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_2$) — совокупность попарно непересекающихся окрестностей устойчивых (неустойчивых) замкнутых траекторий потока f^t , удовлетворяющих заключению леммы 2.1.. Так как гомеоморфизм g_1 переводит линии уровня функции φ в линии уровня функции φ' , то не уменьшая общности можно считать, что граница ∂N_γ любой окрестности $N_\gamma \subset \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_2$ переводится отображением g_1 в границу $\partial N'_{\gamma'}$ окрестности $N'_{\gamma'}$ замкнутой траектории γ' потока f'^t , также удовлетворяющей заключению леммы 2.1.. Определим гомеоморфизм g_0 на множестве $\mathbb{N}_0$ следующим образом. Пусть γ — устойчивый предельный цикл потока f^t , а $N_\gamma \subset \mathbb{N}_0$ — его окрестность. На границе ∂N_γ положим $g_0|_{\partial N_\gamma} = g_1$. Определим гомеоморфизм g_0 на внутренности окрестности N_γ . Возможны 2 случая.

1) N_γ и $N'_{\gamma'}$ ориентируемы. Слоение $\{R_s\}_{s \in \gamma}$, определенное в лемме 2.1., устанавливает гомеоморфизм $\Gamma: D_1 \rightarrow D_2$ между компонентами связности границы ∂N_γ . Тогда гомеоморфизм $g_1 \circ \Gamma \circ g_1^{-1}|_{D'_1}: D'_1 \rightarrow D'_2$ устанавливает соответствие между компонентами связности границы окрестности $N'_{\gamma'}$ замкнутой траектории γ' . В силу леммы 2.3. существует слоение $\{T'_s\}_{s \in \gamma'}$, такое, что для любой точки $x \in D_1$ найдется слой $T'_{s'}$, соединяющий пару точек $x' = g_1(x)$ и $y' = g_1(\Gamma(x))$. Это в свою очередь означает, что отображение $g_1|_{\partial N_\gamma}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие g_* между слоениями $\{R_s\}$ и $\{T'_s\}$ и гомеоморфизм из γ в γ' . Для произвольной точки $s \in \gamma$ положим

$g_0(s) = g_*(R_s) \cap \gamma'$. Теперь определим отображение g_0 внутри окрестностей N_1, N_2 . Каждой точке $p \in R_s \cap \text{int } N_i$ поставим в соответствие точку $q \in T'_{g_0(s)} \cap \text{int } N_i$ такую, что $\varphi(p) = \varphi'(q)$ и положим $g_0(p) = q$.

2) N_γ и $N'_{\gamma'}$ неориентируемы. Слоение $\{R_s\}_{s \in \gamma}$, определенное в лемме 2.1., задает гомеоморфизм $\Gamma: \partial N_\gamma \rightarrow N_\gamma$ такой, что $\Gamma \circ \Gamma = id$, и, кроме того, Γ не имеет неподвижных точек. Тогда гомеоморфизм $g_1 \circ \Gamma \circ g_1^{-1}|_{\partial N'_{\gamma'}}$ удовлетворяет условиям леммы 2.4.. Действительно, $(g_1 \circ \Gamma \circ g_1^{-1}) \circ (g_1 \circ \Gamma \circ g_1^{-1}) = id$, и $g_1 \circ \Gamma \circ g_1^{-1}$ не имеет неподвижных точек, так как в противном случае неподвижные точки имелись бы у отображения Γ . По лемме 2.4. существует слоение $\{T'_s\}_{s \in \gamma'}$ окрестности $N'_{\gamma'}$, такое, что для любой точки $x \in \partial N_\gamma$ найдется слой $T'_{s'}$, соединяющий пару точек $x' = g_1(x)$ и $y' = g_1(\Gamma(x))$. Это, в свою очередь означает, что отображение $g_1|_{\partial N_\gamma}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие g_* между слоями R_s и T'_s . Для произвольной точки $s \in \gamma$ положим $g_0(s) = g_*(R_s) \cap \gamma'$. Точка $s \in \gamma$ ($s' = g_0(s)$) делит слой R_s ($T'_{s'}$) на две компоненты связности $R_{s,1}, R_{s,2}$ ($T'_{s,1}, T'_{s,2}$). Пусть нумерация выбрана так, что $T'_{s,i} \cap \partial N'_{\gamma'} = g_1(R_{s,i} \cap \partial N_\gamma)$, $i \in \{1, 2\}$. Каждой точке $p \in R_{s,i}$ поставим в соответствие точку $q \in T'_{g_0(s),i}$ такую, что $\varphi(p) = \varphi'(q)$, $i \in \{1, 2\}$, и положим $g_0(p) = q$.

Аналогичным образом определим гомеоморфизм g_2 на совокупности $\mathbb{N}_2$ окрестностей неустойчивых замкнутых траекторий. Искомый гомеоморфизм H определим следующей формулой

$$H(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{если } x \in M^2 \setminus (\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_2); \\ g_i(x), & \text{если } x \in \mathbb{N}_i, i \in \{0, 2\}. \end{cases}$$

Покажем, что построенный гомеоморфизм $g_0: N_\gamma \rightarrow N'_{\gamma'}$ сохраняет ориентацию предельных циклов γ, γ' , индуцированную потоками f^t, f'^t соответственно. Слоение $\{R_s\}_{s \in \gamma}$ ($\{T'_s\}_{s \in \gamma'}$) позволяет задать ориентацию границы ∂N_γ ($\partial N'_{\gamma'}$), индуцированную ориентацией предельного цикла γ (γ') как в ориентируемом, так и в неориентируемом случае. Если при обходе γ (γ') в направлении траектории потока мы пересекаем точки $s_1, s_2, s_3 \in \gamma$ ($s'_1, s'_2, s'_3 \in \gamma'$) в порядке s_1, s_2, s_3 (s'_1, s'_2, s'_3), то на границе введем такую ориентацию, при которой слои $R_{s_1}, R_{s_2}, R_{s_3}$ ($T'_{s'_1}, T'_{s'_2}, T'_{s'_3}$) пересекаются в соответствующем порядке при движении вдоль границы ∂N_γ ($\partial N'_{\gamma'}$). Отметим, что в ориентируемом случае данный подход эквивалентен определению, данному ранее (стр. 19).

Отображение h переводит окрестность N_γ предельного цикла γ в окрестность предельного цикла γ' с границей $h(\partial N_\gamma)$ таким образом, что γ переходит в γ' с сохранением ориентации. На границе ∂N_γ рассмотрим ориентацию, индуцированную ориентацией предельного цикла γ . Отображение $h|_{\partial N_\gamma}$ индуцирует ориентацию границы $h(\partial N_\gamma)$, согласованную с ориентацией предельного цикла γ' . Рассмотрим отображение $\tilde{H}: h(\partial N_\gamma) \rightarrow \partial N'_{\gamma'}$, переводящее точку пересечения траектории l потока f^t с кривой $h(\partial N_\gamma)$ в точку пересечения траектории l с кривой $\partial N'_{\gamma'}$. Отображение $\tilde{H}$ индуцирует ориентацию границы $\partial N'_{\gamma'}$, согласованную с ориентацией предельного цикла γ' . Заметим, что $H|_{\partial N_\gamma} = \tilde{H} \circ h|_{\partial N_\gamma}$. Следовательно, отображение $H|_{\partial N_\gamma}$ индуцирует ориентацию границы $\partial N'_{\gamma'}$, согласованную с ориентацией γ' . Таким образом, H переводит замкнутую траекторию γ в замкнутую траекторию γ' с сохранением ориентации.

Достаточность.

Пусть существуют гомеоморфизмы $H: M^2 \rightarrow M^2$ и $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ из определения согласованной эквивалентности энергетических ξ -функций. Построим гомеоморфизм $h: M^2 \rightarrow M^2$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях.

Положим $M_1 = M^2 \setminus \Delta_1$, и $M'_1 = M^2 \setminus \Delta'_1$ и определим вспомогательный гомеоморфизм $g_1: M_1 \rightarrow M'_1$ следующим образом. Положим $g_1|_{\varphi^{-1}(1)} \equiv H$. Пусть $x \in \varphi^{-1}(1)$ —

произвольная точка, отличная от состояния равновесия, l_x — траектория потока f^t , проходящая через точку x , $x' = H(x)$ и $l'_{x'}$ — траектория потока f'^t , проходящая через точку x' . Поставим в соответствие произвольной точке $y \in l_x$ точку $y' \in l'_{x'}$ так, чтобы выполнялось соотношение $\varphi(y) = \varphi'(y')$ и положим $g_1(x) = y$. Определим отображение g_1 на сепаратрисах седловых состояний равновесия. Для произвольного седлового состояния равновесия $\sigma \in \varphi^{-1}(1)$ — положим $\sigma' = H(\sigma) = g_1(\sigma)$. Пусть U_σ — окрестность точки σ , не содержащая предельных циклов и состояний равновесий потока f^t , отличных от σ . Выберем такое $\varepsilon > 0$, что пересечение $U_\sigma \cap \varphi^{-1}(1 + \varepsilon)$ не пусто и состоит в точности из двух компонент связности. Тогда каждая из этих компонент связности пересекается ровно с одной неустойчивой сепаратрисой седла σ , причем в единственной точке. Аналогично определим окрестность $U'_{\sigma'}$ точки σ' и проходящую через нее линию уровня $\varphi'^{-1}(1 + \varepsilon)$.

Так как каждая из точек $U_\sigma \cap \varphi^{-1}(1 + \varepsilon)$ является предельной лишь для одной компоненты связности линии уровня, то отображение g_1 единственным образом доопределяется в этой точке до непрерывного отображения, устанавливающего, кроме того, взаимно однозначное соответствие между множеством всех неустойчивых сепаратрис седловых точек потока f^t и множеством всех неустойчивых сепаратрис седловых точек потока f'^t . Это позволяет доопределить построенное отображение на множество всех неустойчивых сепаратрис. Аналогично определим искомое отображение g_0 на множестве всех устойчивых сепаратрис и продолжим по непрерывности построенное отображение на множество всех состояний равновесия потока f^t .

Пусть $\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_2$) — совокупность попарно непересекающихся окрестностей устойчивых (неустойчивых) замкнутых траекторий потока f^t , удовлетворяющих заключению леммы 2.1.. Так как гомеоморфизм g_1 переводит линии уровня функции φ в линии уровня функции φ' , то не уменьшая общности можно считать, что граница ∂N_γ любой окрестности $N_\gamma \subset \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_2$ переводится отображением g_1 в границу $\partial N'_{\gamma'}$ окрестности $N'_{\gamma'}$ замкнутой траектории γ' потока f'^t , удовлетворяющей заключению леммы 2.1..

Теперь для построения искомого гомеоморфизма h достаточно определить гомеоморфизмы $g_0 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}'_0$, $g_2 : \mathbb{N}_2 \rightarrow \mathbb{N}'_2$, совпадающие на границах $\partial \mathbb{N}_0, \partial \mathbb{N}_2$ с гомеоморфизмом g_1 . Тогда h будет определяться следующей формулой

$$h(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{если } x \in M^2 \setminus (\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_2); \\ g_i(x), & \text{если } x \in \mathbb{N}_i, i \in \{0, 2\}. \end{cases}$$

Опишем построение гомеоморфизма g_0 (построение гомеоморфизма g_2 аналогично).

Пусть γ — устойчивый предельный цикл потока f^t , а $N_\gamma \subset \mathbb{N}_0$ — его окрестность. Положим $g_0|_{\partial N_\gamma} \equiv g_1$. Выберем в окрестности N_γ произвольный слой R_s , определенный в лемме 2.1., являющийся для потока f^t дугой без контакта. Обозначим через $\eta \in \partial N_\gamma$ и $\theta \in \partial N_\gamma$ точки пересечения $R_s \cap \partial N_\gamma$. Если N_γ ориентируема, то будем читать, что $\eta \in D_1$, $\theta \in D_2$, и обозначим через D'_1, D'_2 компоненты связности края $\partial N'_{\gamma'}$ такие, что $g_1(\eta) \in D'_1, g_1(\theta) \in D'_2$. В силу леммы 2.2. существует дуга без контакта C' для потока f'^t , соединяющая точки $g_1(\theta)$ и $g_1(\eta)$. Далее рассмотрим случаи ориентируемой и неориентируемой окрестности N_γ по отдельности.

1) N_γ , $N'_{\gamma'}$ ориентируемы. Опишем построение гомеоморфизма g_0 в кольце N_1 (построения в кольце N_2 аналогичны).

Положим $c = R_s \cap N_1$, $x_0 = \eta$, $x_\infty = c \cap \gamma$. Обозначим через l_{x_0} траекторию потока f^t , проходящую через точку x_0 и через $x_0, x_1, x_2 \dots$ точки пересечения $l_{x_0} \cap c$, пронумерованные в порядке убывания значения функции φ в этих точках. Положим $c' = C' \cap N'_1$, $x'_0 = g_1(x_0)$, $x'_\infty = c' \cap \gamma'$, обозначим через $l'_{x'_0}$ траекторию потока f'^t , проходящую через точку x'_0 , и через $x'_1, x'_2 \dots$ точки пересечения $l'_{x'_0} \cap c'$, пронумерованные в порядке убывания значения функции φ' в этих точках. Наконец, положим $g_0(x_i) = x'_i$, где

$i \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $g_0(x_\infty) = x'_\infty$.

Зададим теперь гомеоморфизм g_0 на участке c_1 дуги c , ограниченном точками x_0 и x_1 . Любая траектория потока f^t , проходящая через произвольную точку $y \in c_1$ пересекает границу ∂N_γ ровно в одной точке z . Положим $z' = g_0(z) = g_1(z)$. Через точку z' проходит траектория потока f'^t , пересекающая участок c'_1 дуги c' , ограниченный точками x'_0 и x'_1 , ровно в одной точке y' . Положим $g_0(y) = y'$.

Отображение $g_0|_{c_1}$ является непрерывным в точках x_0 и x_1 . Действительно, гомеоморфизм g_1 (а следовательно, и гомеоморфизм g_0) переводит D_1 в D'_1 с сохранением ориентации, согласованной с ориентациями предельных циклов γ, γ' , индуцированных потоками f^t, f'^t соответственно. Поэтому $g_0|_{\text{int } c_1}$ переводит точку с меньшим значением в ней функции φ в точку с меньшим значением в ней функции φ' .

Определим теперь гомеоморфизм g_0 на всей дуге c . Для этого введем на дугах c и c' отображения последования $\tau: c \rightarrow c$ и $\tau': c' \rightarrow c'$ по следующему правилу. Для любой точки $x \in c$ положим $\tau(x) = f_x^\lambda(x) \in c$, где $\lambda > 0$ — такое число, что для любого $\tilde{\lambda}$, удовлетворяющего неравенству $0 < \tilde{\lambda} < \lambda$, верно, что $f_x^{\tilde{\lambda}}(x) \notin c$. Отображение τ' определим аналогично. Заметим, что любая точка $y \in c$ представляется в виде $y = \tau_y^k(y_1)$, где $y_1 \in c_1 \setminus x_1$. Аналогично представляется любая точка дуги c' . Тогда поставим произвольной точке $y \in c$ в соответствие точку $y' \in c'$ такую, что выполняется условие $y' = g_0(y) = g_0(\tau_y^k(y_1)) = \tau'^k_y(h(y_1))$, где $y_1 \in c_1 \setminus x_1$.

Теперь определим гомеоморфизм g_0 внутри N_1 . В N_1 любая траектория, отличная от замкнутой траектории γ , разбивается точками пересечения с дугой c на счетное число участков. Таким образом, произвольная пара точек $x \in c$ и $\tau(x) \in c$ ограничивают участок некоторой траектории l_x потока f^t . Обозначим этот участок траектории за $l_x(x, \tau(x))$ (см. рис. 3). Точно также пара точек $x' = (h(x)) \in c'$ и $\tau(x') = h(\tau(x)) \in c'$ ограничивают участок $l'_{x'}(x', \tau'(x'))$ траектории $l'_{x'}$ потока f'^t . Обозначим через T_x ($T'_{x'}$) время движения от точки x до $\tau(x)$ (от точки x' до точки $\tau'(x')$) по траектории l_x ($l'_{x'}$) и через $t_{x,y}$ ($t'_{x',y'}$) — время движения от точки $x, (x')$ до точки $y \in l_x(x, \tau(x))$ ($y' \in l'_{x'}(x', \tau'(x'))$). Произвольной точке $y \in l_x(x, \tau(x))$ поставим в соответствие точку $y' \in l'_{x'}(x', \tau'(x'))$ такую, что $t_{x,y}/T_x = t'_{x',y'}/T'_{x'}$ и положим $g_0(y) = y'$. Аналогично определим отображение g_0 на предельном цикле γ . Так как функции $T_x, t_{x,y}$ являются непрерывными, то построенное отображение g_0 является непрерывным.

Определим гомеоморфизм g_0 на участках траекторий, которые пересекают границу D_1 . Пусть $z \in D_1$ — произвольная точка границы области N_1 , l_z — траектория потока f^t , проходящая через точку z , и $y = l_z \cap c_1$. Участок траектории l_z между точками z, y обозначим через $l_z(z, y)$. Положим $z' = g_0(z)$, $y' = g_0(y)$ и обозначим через $l'_{z'}(z', y')$ участок траектории $l'_{z'}$ потока f'^t , заключенный между точками z' и y' (см. рис. 3). Теперь определим отображение $g_0: l_z(z, y) \rightarrow l'_{z'}(z', y')$ аналогично тому, как было определено отображение g_0 для дуг $l_x(x, \tau(x))$, $l'_{x'}(x', \tau'(x'))$.

Заметим что при движении точки z к точке x_0 вдоль границы D_1 в направлении, задаваемом ориентацией, длина дуги $l_z(z, y)$ стремится к нулю. Аналогичное утверждение верно для соответствующих объектов потока f'^t . Так как гомеоморфизм $g_0|_{D_1}: D_1 \rightarrow D'_1$ является сохраняющим ориентацию, то продолжение этого отображения внутрь кольца N_1 , определенное выше, является гомеоморфизмом.

2) N_γ и $N_{\gamma'}$ неориентируемы.

Положим $c = R_s$, $x_\infty = c \cap \gamma$, $x_0 = \eta$ и $y_0 = \theta$. Обозначим через l_{x_0} и l_{y_0} траектории потока f^t , проходящие через точки x_0 и y_0 соответственно, и через $x_0, x_1, x_2 \dots$ ($y_0, y_1, y_2 \dots$) точки пересечения $l_{x_0} \cap c$ ($l_{y_0} \cap c$), пронумерованные в порядке убывания значений функции φ в этих точках. Положим $x'_0 = g_1(x_0)$, $y'_0 = g_1(y_0)$, $c' = C'$, $x'_\infty = c' \cap \gamma'$. Обозначим через $l'_{x'_0}$, $l'_{y'_0}$ траектории потока f'^t , проходящие через точки x'_0 , y'_0 соответ-

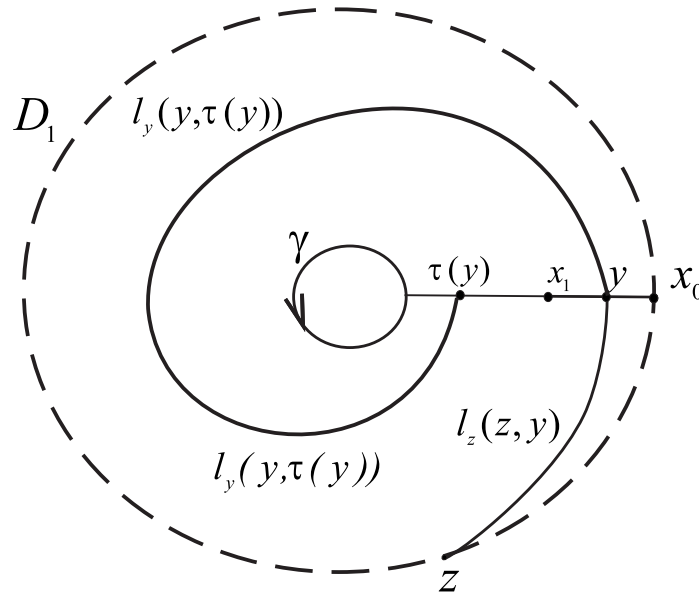


Рис. 3: К построению отображения $g_0 : N_\gamma \rightarrow N_\gamma$ в ориентируемом случае

ственно, и через $x'_0, x'_1, x'_2 \dots$ ($y'_0, y'_1, y'_2 \dots$) точки пересечения $l'_{x'_0} \cap c'$ ($l'_{y'_0} \cap c'$), пронумерованные в порядке убывания значений функции φ' в этих точках. Положим $g_0(x_i) = x'_i$, $g_0(y_i) = y'_i$, где $i \in \mathbb{Z}_+$.

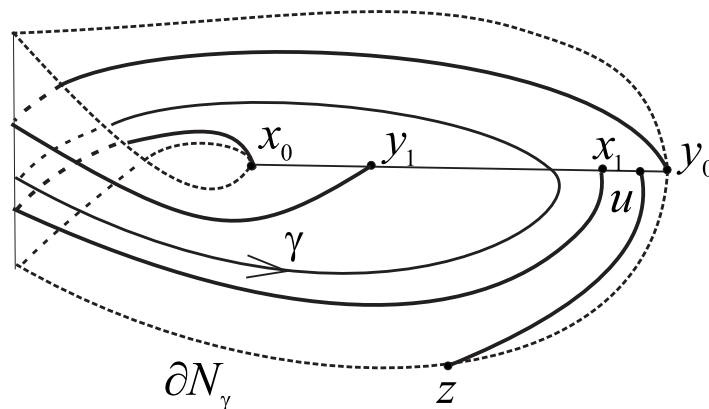


Рис. 4: К построению отображения $g_0 : N_\gamma \rightarrow N_\gamma$ в неориентируемом случае

Зададим теперь g_0 на участках дуги c_x и c_y , первый из которых ограничен точками x_0, y_1 , а второй — точками y_0, x_1 (см. рис. 3.). Аналогичные участки дуги c' обозначим через c'_x и c'_y . Траектория потока f^t , проходящая через произвольную точку $u \in c_x \cup c_y$ пересекает границу ∂N_γ листа Мебиуса N_γ ровно в одной точке z . Положим $z' = g_0(z) = g_1(z)$. Через точку z' проходит траектория потока f'^t , пересекающая один из участков c'_x, c'_y дуги c' ровно в одной точке u' . Положим $g_0|_{c_x \cup c_y}(u) = u'$.

Отображение $g_0|_{c_x \cup c_y}$ является непрерывным, так как по построению переводит точку с меньшим значением в ней функции φ в точку с меньшим значением в ней функции φ' , причем c_x перейдет в c'_x , а c_y в c'_y .

Дальнейшее определение гомеоморфизма $g_0 : N_\gamma \rightarrow N_\gamma$ аналогично случаю 1).

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Banyaga, D. E. Hurtubise, “A proof of the Morse–Bott lemma”, *Exp. Math.*, **22** (2004), 365–373.
2. C. Conley, “Isolated Invariant Sets and Morse Index”, *CBMS Regional Conference Series in Math.*, **38** (1978).
3. Е.Я. Гуревич, Е.Д. Куренков, “О топологической классификации потоков Морса–Смейла на поверхностях при помощи функции Ляпунова”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:3 (2014), 36–40.
4. Meyer K.R., “Energy Functions for Morse-Smale Systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
5. Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, «Мир», 1986.
6. Smale S., “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.
7. Wilson W., Yorke J., “Lyapunov functions and isolating blocks”, *JDE*, **13** (1973), 106–123..

Energy function and topological classification of Morse-Smale flows on surfaces

© Е. Ya. Gurevich⁴, E.D. Kurenkov⁵.

Abstract. We introduce the definition of consistent equivalence of energy Morse-Bott functions for Morse-Smale flows on surfaces and state that consistent equivalence of that functions is necessary and sufficient condition for such flows.

Key Words: structurally stable flows on surfaces, Morse-Smale flows, Lyapunov function, topological equivalence, topological classification.

⁴ Associate Professor of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, elena_gurevich@list.ru.

⁵ Student, National Research University Higher School of Economics, eugene2402@mail.ru.

УДК 517.9

Топологически псевдокогерентные диффеоморфизмы 3-многообразий

© В. З. Гринес¹, О. В. Починка², А. А. Шиловская³

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс топологически псевдокогерентных гомеоморфизмов 3-многообразий. Такие отображения являются топологически когерентными всюду кроме конечного числа окружностей. Доказывается, что каждый гомеоморфизм рассматриваемого класса топологически сопряжен полупрямому произведению псевдоаносовского гомеоморфизма и грубого преобразования окружности

Ключевые слова: Топологическая псевдокогерентность, псевдоаносовский гомеоморфизм, топологическая сопряженность

1. Введение

В настоящей работе изучается динамика гомеоморфизмов f из класса G , заданных на гладком замкнутом 3-многообразии M^3 , таких что:

- неблуждающее множество $NW(f)$ является объединением двумерных ручно вложенных ориентированных поверхностей рода $p > 1$ и таких, что для некоторого $k \geq 1$ каждая поверхность является инвариантным аттрактором или репеллером⁴ для f^k ;
- ограничение f на $NW(f)$ является экспансивным отображением⁵.

Изучение гомеоморфизмов данного типа представляет интерес в связи с тем, что они хотя и не обладают свойством структурной устойчивости, тем не менее они объемлюще Ω -сопряжены с модельными гомеоморфизмами из класса Φ (определение и соответствующий результат см. ниже), в сколь угодно малой окрестности каждого из которых существует структурно устойчивый гомеоморфизм с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа одномерных базисных множеств и конечного числа периодических точек. Последнее объясняется тем, что в силу работ [18] и [16] ограничение некоторой степени исходного гомеоморфизма на каждую из поверхностей топологически сопряжено с псевдоаносовским гомеоморфизмом, из которого согласно [14] с помощью хирургической операции может быть построен структурно устойчивый диффеоморфизм двумерной поверхности с одномерным тривиальным аттрактором (репеллером) и конечным числом источников.

¹ Профессор кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru

² Профессор кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород; olgarochinka@yandex.ru

³ Аспирант кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; a.shilovskaia@gmail.com

⁴ Напомним, что инвариантное множество $\mathcal{B}$ гомеоморфизма g называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что $g(U) \subset \text{int } U$, $\bigcap_{j \geq 0} g^j(U) = \mathcal{B}$. Аттрактор

для гомеоморфизма g^{-1} называется *репеллером* гомеоморфизма g .

⁵ Гомеоморфизм f компактного метрического пространства (X, d) на себя называется *экспансивным*, если существует число $c > 0$ (*константа экспансивности*) такое, что для любых точек $x, y \in X$ существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $d(f^n(x), f^n(y)) > c$.

Таким образом, результаты настоящей работы можно рассматривать как первый шаг в решении задачи топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов на 3-многообразиях, неблуждающие множества которых содержат одномерные базисные множества, принадлежащие объединению инвариантных ручно вложенных ориентируемых замкнутых поверхностей отрицательной эйлеровой характеристики.

Диффеоморфизмы с базисными множествами, топологическая размерность которых равна трем, были полностью изучены в конце 60-х годов прошлого века, а именно, было доказано, что они являются диффеоморфизмами Аносова, а многообразие M^3 есть трехмерный тор T^3 . В работах [6], [22] Фрэнкса и Ньюхауса была получена топологическая классификация таких диффеоморфизмов (перевод работ смотри в [23]).

Один из первых результатов о топологической классификации A -диффеоморфизмов 3-мерного тора с двумерным неблуждающим множеством получен в работе [7], в которой рассматривались диффеоморфизмы n -мерного тора T^n , неблуждающие множества которых содержат ориентируемые растягивающиеся аттракторы коразмерности 1. Авторами было доказано, что действие таких диффеоморфизмов в группе гомологий тора является гиперболическим, а достижимая изнутри граница аттрактора состоит из двух граничных точек и их неустойчивых многообразий. Более того, были найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности ограничений двух таких диффеоморфизмов на аттракторы коразмерности один. В дальнейшем изучение диффеоморфизмов с гиперболическими аттракторами коразмерности 1 было продолжено в работах Плыкина Р.В. [26], [27], [14]. В [26] и [27] была изучена топология многообразия, допускающего диффеоморфизмы с ориентируемыми растягивающимися аттракторами коразмерности 1 и доказано, что компактификация устойчивого многообразия аттрактора гомеоморфна n -тору, а каждый диффеоморфизм на этом многообразии топологически сопряжен DA -диффеоморфизму.

Изучение A -диффеоморфизмов трехмерных многообразий, неблуждающие множества которых содержат двумерные базисные множества, было продолжено в начале 2000-х годов. В работах [8], [9] Гринес и Жужома получили топологическую классификацию структурно-устойчивых диффеоморфизмов на M^n с ориентируемыми растягивающимися аттракторами (сжимающимися репеллерами) коразмерности 1 и доказали, что многообразие M^n гомотопно тору T^n (при $n \neq 4$ многообразие гомеоморфно тору T^n). В случае $n = 3$ была получена топологическая классификация диффеоморфизмов без требования ориентируемости базисных множеств.

Другой тип базисных множеств рассмотрен в работе [10], а именно, авторами было показано, что если базисное множество двумерно и лежит на двумерной поверхности (оно было названо поверхностным), то оно совпадает с носителем и является объединением конечного числа многообразий, каждое из которых ручно вложено в M^3 и гомеоморфно тору T^2 , а ограничение некоторой степени диффеоморфизма на носитель сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора T^2 . В силу Плыкина [25] такие базисные множества являются аттракторами и репеллерами. В серии работ [11], [12], [13] начиная с 2012 г. рассматривались A -диффеоморфизмы, заданные на замкнутых многообразиях размерности три, в предположении, что их нетривиальные двумерные базисные множества являются поверхностными. Для указанных диффеоморфизмов была изучена структура многообразия, построен класс модельных диффеоморфизмов, найдены топологические инварианты и проведена топологическая классификация.

В силу А.Брауна ([5]) любое двумерное базисное множество на 3-многообразии является либо растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо множеством, гомеоморфным двумерному тору, при этом ограничение сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора. Таким образом, вопрос о топологической классификации структурно

устойчивых диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами полностью решен.

Изучению диффеоморфизмов на M^3 , неблуждающее множество которых содержит одномерные базисные множества, не лежащие на инвариантных замкнутых поверхностях, посвящен целый ряд работ [2], [3], [4], [29], [15] Бонатти, Боте, Вильямса, Жужомы, Исаенковой и др. При этом в работах [3], [4], [29], [15] базисные множества являлись одномерными растягивающимися аттракторами или сжимающимися репеллерами и не лежали на поверхностях, а диффеоморфизмы не были структурно устойчивыми. Вопрос существования структурно устойчивых диффеоморфизмов такого типа (с растягивающимся аттрактором) до сих пор остается открытым.

В работе [2] Х.Бонатти и Н. Гельман был изучен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов, неблуждающее множество которого состоит в точности из одного одномерного аттрактора и одного репеллера, каждый из которых лежит на двумерной поверхности с непустым краем. Подчеркнем, что вопрос о топологической классификации вышеописанных диффеоморфизмов также не рассматривался.

2. Формулировка результатов

Пусть имеется гомеоморфизм f , заданный на M^3 , и такой, что:

1) существует число $k \in \mathbb{Z}$ и конечное число двумерных ручно вложенных ориентируемых замкнутых поверхностей $\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_m$, $m \geq 1$, объединение которых содержит множество неблуждающих точек;

2) для некоторого $k \geq 1$ каждая поверхность является аттрактором или репеллером для f^k .

Предложение 2.1. *Для гомеоморфизма f множество $M^3 \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}_i$ имеет m компонент связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $M^2 \times [0; 1]$, где M^2 ориентируемая поверхность рода $p \geq 0$, и граница каждой компоненты состоит в точности из одного аттрактора и репеллера.*

Из утверждения 2.1 следует, что $m \geq 2$.

Предложение 2.2. *Если многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f , удовлетворяющий условиям 1), 2) выше, то оно является локально-тривиальным расслоением⁶ над окружностью со слоем гомеоморфным поверхности M^2 .*

Пусть теперь f гомеоморфизм из класса G . Тогда все аттракторы и репеллеры, содержащие неблуждающее множество, гомеоморфны замкнутой поверхности M^2 . Обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ объединение притягивающих (отталкивающих) поверхностей. На каждой такой поверхности гомеоморфизм f^k топологически сопряжен с псевдоаносовским гомеоморфизмом.

Напомним, что гомеоморфизм $h : M^2 \rightarrow M^2$ называется псевдоаносовским отображением (pA -гомеоморфизмом), если на поверхности M^2 существует пара h -инвариантных трансверсальных слоений F^s , F^u с множеством седловых особенностей S и трансверсальными мерами μ^s , μ^u такая, что:

⁶ Локально тривиальным расслоением называется четверка (E, B, F, p) , где E, B, F — пространства, а $p : E \rightarrow B$ отображение такое, что любая точка $x \in B$ обладает такой окрестностью $U \subset B$, что $p^{-1}(U) \approx U \times F$; более того, существует гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$. Будем называть E тотальным пространством, B — базой, F — слоем.

- 1) каждая седловая особенность из S имеет не менее трех сепаратрис;
- 2) существует число $\lambda > 1$ такое, что $\mu^s(h(\alpha)) = \lambda \mu^s(\alpha)$ ($\mu^u(h(\alpha)) = \lambda^{-1} \mu^u(\alpha)$) для любой дуги α , трансверсальной F^s (F^u).

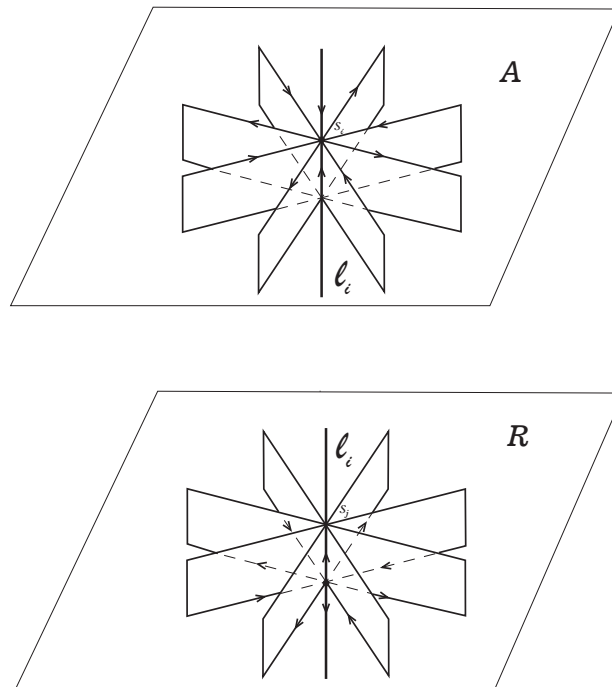
Слоения F^s , F^u называются *устойчивым* и *неустойчивым* соответственно, а число λ – *дилатацией* f .

Для гомеоморфизма $f \in G$ обозначим через $\mathcal{S}$ множество седловых особенностей. Для каждой точки $x \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}) \setminus \mathcal{S}$ определим устойчивое $W^s(x)$ и неустойчивое $W^u(x)$ многообразия следующим образом:

$W^s(x) = \{y \in M^3 : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$, и $W^u(x) = \{y \in M^3 : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow -\infty\}$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Гомеоморфизм $f \in G$ называется *топологически псевдокогерентным*, если выполняются следующие условия:

1. в каждой компоненте связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, содержащей аттрактор $A \subset \mathcal{A}$ и репеллер $R \subset \mathcal{R}$ в своем замыкании существует конечное число дуг $l_1, \dots, l_r$, каждая из которых имеет в точности две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$, другая $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, и множества $\{W^s(x), x \in A\}$, $\{W^u(y), y \in R\}$ являются слоениями на $V \setminus (l_1 \cup \dots \cup l_r)$;
2. если пересечение $W^s(x) \cap W^u(y)$ не пусто для некоторых точек $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{R}$, то каждая компонента связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ является открытой дугой, имеющей в точности две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{A}$, другая $\mathcal{R}$;
3. на M^3 существует непрерывное f -инвариантное одномерное слоение $\mathcal{L}_f$, каждый слой которого есть объединение замыканий всех дуг, определенных в 1.



Р и с у н о к 2.1

Устойчивые и неустойчивые слоения в окрестности особенности

Опишем класс Φ модельных топологически псевдокогерентных гомеоморфизмов, которые являются локально прямым произведением псевдоаносовского гомеоморфизма P и грубого преобразования φ окружности $\mathbb{S}^1$.

Для построения моделей рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi r} = (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$ и обозначим через $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ естественную проекцию, заданную формулой $\pi(r) = e^{i2\pi r}$. Введем следующие отображения:

$\psi_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$, $m \in \mathbb{N}$;

$\chi_{k,l} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ — период, $l \in \{1 \dots k-1\}$;

$\tilde{\varphi} = \chi_{k,l} \psi_{n \cdot k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Тогда корректно определен структурно устойчивый диффеоморфизм $\varphi = \pi \tilde{\varphi} \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, неблуждающее множество которого состоит из $2n$ гиперболических орбит периода k .

Используя $\tilde{\varphi}(z, r)$ и гомеоморфизм $J : M^2 \rightarrow M^2$ такой, что $JP = PJ$, построим модельный диффеоморфизм ϕ на многообразии $M_J = (M^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где циклическая группа Γ образована отображением $\gamma(z, r) = (J(z), r-1)$.

Обозначим за $\tilde{\phi} : M^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}$ отображение, задаваемое следующим образом $\tilde{\phi}(z, r) = (J(z), \tilde{\varphi}(r))$. Для $\tilde{\phi}$ выполняется равенство $\tilde{\phi}\gamma = \gamma\tilde{\phi}$. Отсюда следует, что можно задать на M_J диффеоморфизм $\phi : M_J \rightarrow M_J$, коммутирующий с $\gamma(z, r) = (J, r-1)$, либо с γ^{-1} , как $\phi = p_J \tilde{\phi} p_J^{-1}$, где p_J — естественная проекция $M^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Будем говорить, что гомеоморфизм $\phi : M_J \rightarrow M_J$ является локально прямым произведением P и φ , если $\phi = p_J \tilde{\phi} p_J^{-1}$, и писать $\phi = P \otimes \varphi$.

Обозначим через Φ множество всех таких локально прямых произведений.

Т е о р е м а 2.1. Любой топологически псевдокогерентный гомеоморфизм из класса G топологически сопряжен некоторому гомеоморфизму из класса модельных гомеоморфизмов Φ .

Благодарности. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения») при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-01-12452 офи-м2, 15-01-03687 А) и РНФ (грант 14-41-00044).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арансон С.Х., Гринес В.З., “Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях”, *УМН*, **45:1**(271) (1990), 3–32.
2. H. Bonatti, N. Guelman, “Axiom A diffeomorphisms which are derived from Anosov flows”, *Journal of Modern Dynamics*, **4:1** (2010), 1–63.
3. H. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors. I. Local triviality, tubular neighborhoods”, *Math. Nachr.*, **107** (1982), 327–348.
4. H. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
5. A. Brown., “Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds”, *Journal of Modern Dynamics*, **4** (2010), 517–548.

6. J. Franks, “Anosov Diffeomorphisms on Tori”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **145** (1969), 117–124.
7. Гринес В.З., Жужома Е.В., “О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n -мерном торе”, *УМН*, **34**:4(208) (1979), 185–186.
8. Гринес В.З., Жужома Е.В., “Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 3–66.
9. V. Grines, E. Zhuzhoma, “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357** (2005), 617–667.
10. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813–826.
11. Гринес В. З., Левченко Ю.А., “О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами”, *Доклады Академии Наук*, **447**:2 (2012), 127–129.
12. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O., “On the Dynamical Coherence of Structurally Stable 3-diffeomorphisms”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **19**:4 (2014), 506–512.
13. Гринес В. З., Левченко Ю.А., Починка О. В., “О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Нелинейная динамика*, **10**:1 (2014), 17–33.
14. Жиров А.Ю., Плыкин Р.В., “Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоаносовскими диффеоморфизмами”, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 149–152.
15. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О классификации одномерных растягивающихся аттракторов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 360–370.
16. K. Hiraide, “Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov”, *Osaka Journal of Mathematics*, **27**:1 (1990), 117–162.
17. Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону*, пер. с англ. А.Ю. Жирова, ред. Д.В. Аносов, М., 1998, XVI+112 с.
18. J. Lewowicz, “Expansive homeomorphisms of surfaces”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.(N.S.)*, **20**:1 (1989), 113–133.
19. А.Г. Майер, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч.Зап.ГГУ*, 1939, № 12, 215–229.
20. R. Mane, “Expansive homeomorphisms and topological dimension”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **252** (1979), 313–319.
21. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Fl?chen”, *Acta Math.*, **50** (1927), 189–358.
22. S. E. Newhouse, “On Codimension One Anosov Diffeomorphisms”, *American Journal of Mathematics*, **92**:3 (1970), 761–770.

23. Ньюхаус Ш.Е., “Об U -дiffeоморфизмах коразмерности один”, *Гладкие динамические системы*, **4** (1977), 87–98.
24. T. O’Brien, W. Reddy, “Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism”, *Pacific Journal of Mathematics*, **35**:3 (1970), 737–741.
25. Плыкин Р.В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла”, *Матем. сборник*, **84**:2 (1971), 301–312.
26. Плыкин Р.В., “О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов”, *УМН*, **35**:3(213) (1980), 94–104.
27. Плыкин Р.В., “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6(240) (1984), 75–113.
28. W.P. Thurston, “On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **19**:2 (1988), 417–431.
29. R.F. Williams, “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473–487.

Topologically pseudocoherent diffeomorphisms of 3-manifolds

© V. Z. Grines⁷, O. V. Pochinka⁸, A. A. Shilovskaya⁹

Abstract. In this paper, we consider a class of topologically pseudocoherent homeomorphisms of 3-manifolds. These mappings are topologically pseudocoherent everywhere except finite number of circles. We prove that every homeomorphism from the considered class is topologically conjugate to the semidirect product of a pseudoanosov homeomorphism and a rough circle transform.

Key Words: Topological pseudocoherence, pseudoanosov homeomorphism, topological conjugacy.

⁷ Professor of Department of numerical and functional analysis, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru

⁸ Professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru

⁹ Postgraduate of the Department numerical and functional analysis, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; a.shilovskaia@gmail.com

УДК 517.9

Оптимальное управление в математической модели государства

© В. К. Захаров¹, О. А. Кузенков²

Аннотация. В статье на основе общей агрегированной модели государства в широком смысле (близком к слову «страна»), понятия реальной стоимости достояний и теории денег как средства государственного управления создаётся математическая модель государства с базисным использованием ссудного дохода в виде системы из семи дифференциальных уравнений с восемью управляющими параметрами. Для неё ставится оптимизационная задача нахождения оптимальных управлений при различных функционалах качества. В качестве конкретного случая рассматривается задача обеспечения максимума совокупного конечного достояния государства. Приводится явное аналитическое решение полученной оптимизационной задачи.

Ключевые слова: Государство в широком смысле, общая модель государства, реальная стоимость достояний, деньги как средство государственного управления, математическая модель государства, система экономических уравнений государства с базисным использованием ссудного дохода, оптимизационная задача, оптимальное управление, аналитическое решение.

Введение

Статья состоит из трёх частей. В первой и второй частях, принадлежащих первому автору, излагается *общая агрегированная модель государства в широком смысле* (близком к слову «страна»), восходящая к [3], и на её основе создаётся математическая *модель государства с базисным использованием ссудного дохода* в виде системы из семи дифференциальных уравнений с восемью управляющими параметрами. Для неё ставится оптимизационная задача нахождения оптимальных управлений для *обеспечения максимума совокупного конечного достояния государства*. В третьей части, принадлежащей второму автору, приводится явное аналитическое решение указанной выше оптимизационной задачи, которое позволяет дать эффективный численный алгоритм поиска оптимального управления. Решение даётся на основе использования классических методов оптимального управления и приемов решения оптимизационных задач, разработанных для систем авторепродукции [5]. В заключение находится численное решение задачи при одном наборе значений параметров и начальных данных.

Статья является развитием статьи [3], в которой решалась оптимизационная задача для более простой *базисно-надстроечной модели государства с базисным использованием ссудного дохода* в виде системы из двух дифференциальных уравнений с тремя управляющими параметрами.

1. Общая агрегированная модель государства

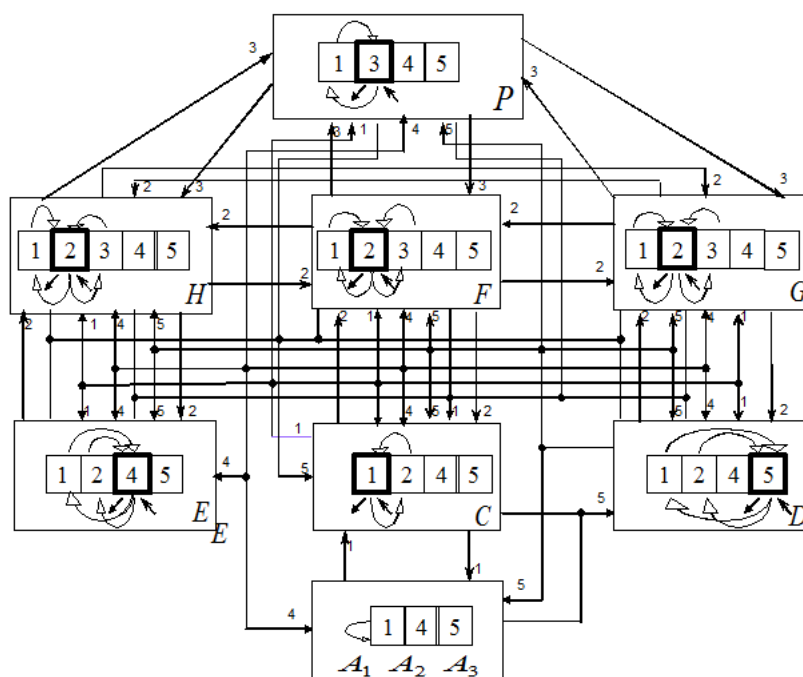
Каждое государство в широком смысле, близком к слову «страна», является сложной трёхуровневой жизнедеятельной системой общества, устроенной в виде совокупности

¹ Профессор кафедры теоретической информатики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Нижний Новгород; zakharov_valeriy@list.ru

² Доцент кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kuzenkov_o@mail.ru

основных систем: содержательной C , учётной D , обеспечительной E , совокупной распорядительной F и властной P [2]. Содержательная, учётная и обеспечительная системы связаны с *природной средой* A_1 , *внешней организованной средой* A_2 , состоящей из зарубежных жизнедеятельных единиц и государств, и *внутренней организованной средой* A_3 , состоящей из теневых единиц. Властная система выделяет в учётной системе **казначейскую систему**, осуществляющую выдачу бюджетных денег. Для использования денег самой содержательной системой властная система также выделяет в учётной системе **банковскую систему**, осуществляющую выдачу ссудных денег с условием возврата с относительной прибавочной долей r .

Используемые государством и производимые им достояния располагаются в единицах государства и во внешних средах. Все эти достояния подразделяются на следующие **виды**: *содержательное* (код 1), *распорядительное* (код 2), *властное* (код 3), *обеспечительное* (код 4), *учётное* (код 5). Каждая основная система производит *достояние своего вида*. При производстве соответствующего достояния каждая система использует некоторые из имеющихся в ней достояний. Все основные системы связаны между собой потоками производимых достояний. Содержательная, учётная и обеспечительная системы получают из внешних сред и отдают в эти среды соответствующие достояния. В сильно агрегированной форме устройство и функционирование государства, а также описание имеющихся в нём достояний и потоков дано на рисунке 1.1. На нем производимые достояния выделены квадратиком с жирным контуром. Дугами указаны *преобразовательные потоки*. *Передаточные потоки* показаны стрелками с указанием кодов на концах стрелок. *Произведённые потоки* обозначены прямыми входящими стрелочками, а *изведённые* – выходящими.



Р и с у н о к 1.1

Схема систем, достояний и потоков государства

2. Математическая модель государства и оптимальное управление в ней

Математическая модель государства создаётся на основе общей агрегированной модели посредством использования *реальной денежной стоимости достояний всех видов* [2]. Достояние вида m в системе M в момент времени t будем обозначать через $W_M^m(t)$. Система эволюционных уравнений государства составляется по следующему *принципу сохранения*: скорость изменения реальной стоимости достояния какого-либо вида в какой-либо основной системе равно сумме реальных стоимостей всех входящих потоков этого достояния в эту систему минус сумма реальных стоимостей всех выходящих потоков этого достояния из этой системы. Система эволюционных уравнений упрощается путём наложения *допущений для потоков достояний*. Часть допущений основана на *предположении о сохранении реальной стоимости достояний*, другая часть допущений основана на новой теории денег как средства государственного управления [1]. Все преобразования и упрощения были проделаны в [3]. В частности, там было положено, что ссудный поток L_{DC}^{55} имеет вид

$$L_{DC}^{55} = aW_C^1(K - W_C^1)/(c + dr + (B_{DC}^{55} + B_{DD}^{55} + B_{DE}^{55} + B_{DF}^{55} + B_{DG}^{55} + B_{DH}^{55} + B_{DP}^{55})),$$

где B_{DM}^{55} обозначает бюджетный поток из системы D в систему M (M принимает значения из множества $\{C, D, E, F, G, H, P\}$), число $K > 0$ обозначает *наибольшую предельно возможную величину содержательного достояния содержательной системы*, положительные числа a, c, d представляют собой размерностные коэффициенты. В [3] была получена *система экономических уравнений государства при базисном использовании ссудного дохода*

$$\dot{W}_C^1 = L_{DC}^{55} - (p_1 B_{DD}^{55} + p_2 B_{DE}^{55} + p_3 B_{DF}^{55} + p_4 B_{DG}^{55} + p_5 B_{DH}^{55} + p_6 B_{DP}^{55}) - e_0 W_C^1,$$

$$\dot{W}_D^5 = B_{DD}^{55} - e_1 W_D^5, \quad \dot{W}_E^4 = B_{DE}^{55} - e_2 W_E^4, \quad \dot{W}_F^2 = B_{DF}^{55} - e_3 W_F^2,$$

$$\dot{W}_G^2 = B_{DG}^{55} - e_4 W_G^2, \quad \dot{W}_H^2 = B_{DH}^{55} - e_5 W_H^2, \quad \dot{W}_P^3 = B_{DP}^{55} - e_6 W_P^3,$$

где $0 < e_i < 1$, $0 < p_i < 1$. В этой системе параметры B_{DM}^{55} , r являются управлениями. На управления накладываются ограничения $r_0 \leq r \leq r_1$, $(B_{DM}^{55})_0 \leq B_{DM}^{55} \leq (B_{DM}^{55})_1$ для $M \in \{C, D, E, F, G, H, P\}$.

Властная система государства должна решать оптимизационную задачу на выбор оптимальных управлений в соответствии с поставленными целями на временном промежутке $[0, T]$. Например, возможной целью может быть *обеспечение максимума совокупного конечного достояния государства*, т. е.

$$(W_C^1 + W_D^5 + W_E^4 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(T) \rightarrow \max.$$

Далее в статье рассматривается нахождение оптимального решения указанной системы при следующих числовых данных: $T = 100$, $K = 300$, $d = 20$, $a = 0.0005$, $c = 1$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = p_4 = p_5 = 0.2$, $p_6 = 0.7$, $e_0 = 0.015$, $e_1 = 0.005$, $e_2 = 0.02$, $e_3 = e_4 = e_5 = 0.005$, $e_6 = 0.01$, $W_C^1(0) = 100$, $W_D^5(0) = 20$, $W_E^4(0) = 20$, $W_F^2(0) = 10$, $W_G^2(0) = 10$, $W_H^2(0) = 10$, $W_P^3(0) = 30$, $r_0 = 0.001$, $r_1 = 1$, $(B_{DC}^{55})_0 = 0$, $(B_{DC}^{55})_1 = 0.5$, $(B_{DM}^{55})_0 = 0.1$, $(B_{DM}^{55})_1 = 0.2$ для $M \in \{D, E, F, G, H, P\}$.

3. Решение оптимизационной задачи для модели государства

Далее для удобства полагается $W_C^1 = x$, $W_M = y_i$ для $M \in \{C, D, E, F, G, H, P\}$, соответственно, $r = u$, $B_{DC}^{55} = v$, $B_{DM}^{55} = w_i$.

В новых обозначениях управляемая система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(K-x)x}{c+qu+v+\sum_{j=1}^6 w_j} - \sum_{j=1}^6 p_j w_j - e_0 x, \quad \frac{dy_i}{dt} = w_i - e_i y_i, \quad i = \overline{1,6}, \quad (3.1)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y_i(0) = y_{i0}$, $i = \overline{1,6}$. Здесь $K, a, d, p_i, c, e_i, e_0$ – некоторые положительные константы, u, v, w_i – управляющие функции времени ($i = \overline{1,6}$), удовлетворяющие в каждый момент времени $0 \leq t \leq T$ ограничениям $u_0 \leq u \leq u_1$, $v_0 \leq v \leq v_1$, $w_{i0} \leq w \leq w_{i1}$, $i = \overline{1,6}$. Кроме того, считается, что $0 < x_0 < K$.

Задача состоит в том, чтобы найти управляющие функции u , v и w_i , $i = \overline{1,6}$, при которых выражение $x(T) + \sum_{i=1}^6 y_i(T)$ достигает наибольшего значения, где T – заданное время управления. Для решения поставленной оптимизационной задачи будем использовать принцип максимума Л.С. Понтрягина. В этом случае сопряженная система имеет вид

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \left(-\frac{a(K-2x^*)}{c+qu^*+v^*+\sum_{j=1}^6 w_j^*} + e_0 \right) \psi_1, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = e_i \psi_i, \quad i = \overline{2,6}.$$

Условия трансверсальности выглядят следующим образом $\psi_1(T) = -1$, $\psi_i(T) = -1$, $i = \overline{2,6}$. Здесь u^* , v^* , w_i^* – оптимальные управления, $i = \overline{1,6}$, x^* – соответствующее им решение первого уравнения системы (3.1). Очевидно, что при этом все компоненты решения сопряженной системы отрицательны.

Функция Гамильтона $H(u, v, w)$ принимает вид

$$H = \psi_1 \left(\frac{a(K-x^*)x^*}{c+qu+v+\sum_{i=1}^6 w_i} - \sum_{i=1}^6 p_i w_i - e_0 x^* \right) + \sum_{i=2}^6 \psi_{i+1} (w_i - e_i y_i^*).$$

Здесь x^* , y_i^* – решения системы (3.1), соответствующие оптимальному управлению, $i = \overline{1,6}$. В соответствии с принципом Л. С. Понтрягина минимум функции Гамильтона реализуется на оптимальном управлении. Дальнейшие усилия были сосредоточены на исследовании функции Гамильтона и поиске ее минимума.

При условии, что оптимальное решение удовлетворяет неравенству $0 < x^*(t) < K$, очевидно, что минимум функции Гамильтона будет достигаться при минимальном возможном значении управляющих параметров u и v . Таким образом, оптимальные управления u^* и v^* постоянны: $u^* = u_0$, $v^* = v_0$. Далее на основе анализа решения сопряженной системы и поведения функции Гамильтона было доказано, что все оптимальные управления w_i имеют релейный характер, они кусочно-постоянны и принимают значения либо w_{i0} , либо w_{i1} , $i = \overline{1,6}$. Таким образом, задача построения оптимального управления сводится к задаче нахождения его точек переключения с одного постоянного режима на другой. Для определения значений моментов переключения использовался численный метод перебора. Численное решение поставленной задачи оптимального управления проводилось при

приведенных выше числовых значениях параметров и начальных данных. Проведенные расчеты показывают, что оптимальным будет постоянное управление (без переключений): $u^* = u_1$, $v^* = v_1$, $w^* = w_{i1}$, $i = \overline{1, 6}$.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-12452 офи_м2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.К. Захаров, “Финансово-кризисные способы государственного и межгосударственного управления”, *Национальные интересы: приоритеты и безопасность*, 2010, № 11, 9-16.
2. В.К. Захаров, *Номология. Устройство и направление человеческой деятельности: учебное пособие*, М.: МГППУ, 2011, 216 с.
3. В.К. Захаров, О.А. Кузенков, “Оптимальное управление в модели государства”, *Моделирование и анализ данных*, 2011, № 1, 55-75.
4. В.К. Захаров, Е.С. Половинкин, А.Д. Яшин, “Математическая модель государства”, *Доклады РАН*, **413**:2 (2007), 158-162.
5. О.А. Кузенков, Г.В. Кузенкова, “Оптимальное управление системами авторепродукции”, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2012, № 4, 26-37.

Optimal control in mathematical state model

© V.K. Zakharov³, O. A. Kuzenkov⁴

Abstract. Some mathematical model of a state is constructed in the form of a system of seven differential equations with eight controlling parameters. It is based on some general aggregated model of a state in broad meaning (close to the word «country»), on some notion of a real cost of wealth, and on some theory of money as a weapon of state administration. The optimization problem of finding the optimal controls under varies quality functionals is considered for this system. In the capacity of a concrete case the problem of guaranteeing the maximum of the joint final wealth of a state is considered. The explicit analytical solution of the obtained optimization problem is presented

Key Words: The state in broad meaning, the general model of the state, a real cost of wealth, money as a weapon of state administration, the mathematical model of the state, the economic system of the state with the basic use of the loan income, optimization problem, optimal control, analytical solution

³ Professor of Theoretical Computer Science chair, Lobachevsky State University, Nizhni Novgorod; zakharov_valeriy@list.ru

⁴ Associate Professor of numerical and functional analysis chair, Lobachevsky State University, Nizhni Novgorod; kuzenkov_o@mail.ru

УДК 544.431.8

Алгоритм уточнения констант скоростей колебательных реакций на примере модели Орегонатора

© Р. Д. Икрамов,¹ С. А. Мустафина²

Аннотация. В работе предложен алгоритм решения обратных задач химической кинетики для определения или уточнения констант скоростей колебательных реакций на примере модели Орегонатора. В качестве решения прямой задачи использован метод Розенброка с действительными коэффициентами.

Ключевые слова: обратная задача, реакция Белоусова-Жаботинского, метод Розенброка, Орегонатор.

1. Введение

Колебательные реакции – это реакции, в которых могут наблюдаться периодические изменения концентраций реагирующих веществ или скоростей реакции во времени [1]. Изучение колебательных реакций остается актуальной задачей химической кинетики, т.к. позволяет понять суть явления катализа и закономерность периодических процессов, протекающих в живых организмах, а также дает возможность сформулировать принципы использования периодических процессов в химической технологии.

Существенную роль при возникновении колебаний играет также соотношение между константами скоростей отдельных стадий и значений исходных концентраций реагентов.

Особый интерес вызывают колебательные химические реакции в гомогенной жидкой среде. Наиболее известной является окисление органических кислот и их эфиров бромат-ионом, катализируемое ионами металлов. Подобный класс реакций был обнаружен Б.П. Белоусовым, в ходе проведения которых он заметил периодическое изменение цвета раствора при окислении лимонной кислоты броматом в растворе в присутствии ионов цериия. Детальное изучение кинетических закономерностей этого процесса проведено А.М. Жаботинским [2]. На сегодняшний день реакция каталитического окисления различных восстановителей бромноватой кислотой, идущая в автоколебательном режиме, называется реакцией Белоусова-Жаботинского [3].

2. Постановка прямой задачи химической кинетики

Полный механизм реакции Белоусова-Жаботинского был сделан Р. Нойесом, Е. Керешом, Р. Филдом [4]. Такой механизм насчитывает 18 реакций и 21 химическое соединение, принимающее в них участие. Упрощенный механизм реакции Белоусова-Жаботинского был предложен теми же авторами и назван «Орегонатором» со ссылкой на университет штата Орегон.

Математическая модель Орегонатора представима в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

¹ Аспирант кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского Государственного Университета, г. Стерлитамак; rustam_ikramov@mail.ru.

² Зав. кафедры математического моделирования, декан физико-математического факультета, Стерлитамакский филиал Башкирского Государственного Университета, г. Стерлитамак; mustafina_sa@mail.ru.

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= k_1AY - k_2XY + k_3AX - 2k_4X^2, \\ \frac{dY}{dt} &= -k_1AY - k_2XY + f k_5Z, \\ \frac{dZ}{dt} &= k_3AX - k_5Z\end{aligned}\quad (2.1)$$

с начальными условиями

$$X_0 = 5 \cdot 10^{-11}, Y_0 = 3 \cdot 10^{-7}, Z_0 = 5 \cdot 10^{-8}. \quad (2.2)$$

Данная реакция является типичным примером колебательных реакций, моделированием и численным исследованием которой занимаются многие ученые, но до настоящего времени остается открытым вопрос разработки методов и алгоритмов решения обратных задач поиска и уточнения кинетических параметров реакции.

Для решения прямой задачи (2.1) - (2.2) был выбран метод Розенброка, основанный на неявных схемах решения систем линейных алгебраических уравнений. В простейшем случае методы типа Розенброка могут иметь вид

$$(E + C_1hJ + C_2h^2J^2)(y_{n+1} - y_n) = hF(y_n + C_3hF), \quad (2.3)$$

где y_{n+1} – искомое численное решение на одном шаге интегрирования длины h , C_1 , C_2 и C_3 – коэффициенты, определяющие метод, y и F – n -мерные вектор-функции, J – матрица Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, E – единичная матрица. Отметим, что F и J (без аргументов) всюду означают $F(y_n)$, $J(y_n)$. Наиболее часто используемые значения коэффициентов метода: $C_1 = 1.077$, $C_2 = 0.372$, $C_3 = -0.577$, при которых метод Розенброка становится L-устойчивым [4].

3. Постановка обратной задачи химической кинетики

Прямая кинетическая задача представляет собой решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1) с начальными условиями (2.2)). Правые части системы (2.1)) зависят от констант скоростей $k_i (i = \overline{1..5})$. Обратная задача состоит в определении параметров на основе экспериментальных данных концентраций, участвующих в реакции веществ. Тогда функционал критерия поиска кинетических констант примет вид:

$$\sum_{k=1}^W \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_{ki}^P - x_{ki}^{EXP}}{x_{ki}^{EXP}} \right) \rightarrow \min \quad (3.1)$$

где W – количество экспериментов, N – количество наблюдаемых веществ.

В общем виде алгоритм поиска решения обратной задачи состоит из трех шагов:

- задать начальные параметры метода минимизации функционала качества, данные эксперимента, начальное приближение значений кинетических констант $k_i (i = \overline{1..5})$;
- найти минимум функционала качества (3.1), решая прямую задачу (2.1) с начальными условиями (2.2),
- согласно алгоритму метода минимизации менять значения кинетических констант 3.1 и переходим к шагу 2.

В качестве метода минимизации функционала качества используется метод Хука-Дживса.

4. Результаты и их анализ

Для реализации разработанного алгоритма необходимо знание экспериментальных значений в различные моменты времени. Для их поиска решим прямую кинетическую задачу (2.1) с начальными условиями (2.2) методом Розенброка. В результате получим данные эксперимента для различных моментов времени (табл. 1):

Таблица 1: Экспериментальные данные концентрации $[Br^-]$, полученные в результате решения прямой кинетической задачи

t, c	$[Br^-]$, моль	t, c	$[Br^-]$, моль
0.01	$5.72 \cdot 10^{-11}$	57.78	$5.72 \cdot 10^{-11}$
1.24	$1.17 \cdot 10^{-7}$	58.81	$1.17 \cdot 10^{-7}$
1.812	$5.28 \cdot 10^{-6}$	59.382	$5.28 \cdot 10^{-6}$
4.5	$5.026 \cdot 10^{-11}$	62.07	$5.026 \cdot 10^{-11}$
20	$5.034 \cdot 10^{-11}$	77.57	$5.034 \cdot 10^{-11}$

При решении обратной задачи поиска кинетических параметров в модели (2.1) - (2.2) были найдены значения констант скоростей k_1 , k_3 , k_5 . Результаты численного поиска представлены в табл. 2. Эталонные значения кинетических констант приведены в работе [5].

Таблица 2: Результаты численного поиска кинетических констант в модели (2.1)

	k_1	k_3	k_5
Эталон	1.34	8000	0.5
Алгоритм	1.25	8130	0.57

Полученные результаты показывают, что значения кинетических констант k_1 , k_3 , k_5 отличаются от эталонных с погрешностью не более 11%. Такая погрешность считается допустимой в кинетическом эксперименте.

Таким образом, в работе разработан алгоритм решения обратных задач, основанный на L-устойчивом методе Розенброка, который позволяет определять и уточнять кинетические параметры колебательной реакции, проводить расчет прямой кинетической задачи и находить периоды колебаний реакции. Построенный алгоритм адаптирован под колебательные реакции и протестирован на известной колебательной реакции Бе-лоусова-Жаботинского с заданными эталонными кинетическими параметрами. Результаты расчета реализованного алгоритма показали удовлетворительное согласование с данными, опубликованными в работе [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Коробов, В. Очков, *Химическая кинетика. Введение с Mathcad/Maple/MCS.*, Горячая линия - Телеком, М., 2009.

2. Игнатьева Л. Ф., Нахов С. И., Алексеев В. Ю., Карпова С. И., “Химико-аналитическое исследование реакции Белоусова-Жаботинского в условиях закрытой системы”, *Наука и образование*, 2008, № 2, 80–85.
3. Ikramov R. D., Mustafina S. A., “Numerical study of the Belousov-Jabotinsky’s reaction models on the basis of the two-phase Rozenbrock’s method with complex coefficients”, *International Journal of Applied Engineering Research*, **9**:22 (2014), 12797–12801.
4. Икрамов Р. Д., Мустафина С. А., “Численное исследование моделей реакции Белоусова-Жаботинского на основе двухстадийного метода Розенброка с комплексными коэффициентами”, *Системы управления и информационные технологии*, 2014, № 2, 11–14.
5. Икрамов Р. Д., Мустафина С. А., “Алгоритм поиска констант скоростей колебательной реакции примере реакции Белоусова-Жаботинского”, *Башкирский химический журнал*, **22**:1 (2015), 87–91.

Numerical modeling of oscillating reactions based on Rosenbrock method with real coefficients

© R. D. Ikramov ³, S. A. Mustafina ⁴

Abstract. The paper considers an algorithm for solving inverse problems of finding and verifying models of chemical kinetic parameters of oscillatory reactions. The algorithm is tested on the model of the oscillatory Belousov-Zhabotinsky reaction Oregonator. As a solution to the direct problem Rosen-brock method is used with real coefficients.

Key Words: oregonator, Rosenbrock method, BZ-reaction, inverse problem

³ Postgraduate student of the department of mathematical modeling, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak; rustam_ikramov@mail.ru.

⁴ Head of Mathematical Modeling Chair, Dean of Physics and mathematics Faculty, Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak; mustafina_isa@mail.ru.

УДК 519.62, 519.876.5

Планирование экономически оптимального химического эксперимента на основе кинетической модели каталитической реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом

© С. Н. Коледин¹, К. Ф. Коледина²

Аннотация. В работе представлено математическое моделирование реакции синтеза алкилметиловых эфиров и алкилметилкарбонатов, посредством реагентов, неопасных для окружающей среды («зеленая химия»). На основе кинетической модели проведен анализ режимов проведения процесса и построен профиль температур, позволяющий определить оптимальные условия проведения реакции.

Ключевые слова: каталитическая реакция, кинетические уравнения, диметилкарбонат, зеленая химия, профиль температур.

1. Введение

В институте нефтехимии и катализа РАН в лаборатории «Химия углеводов» ведутся исследования реакции синтеза алкилметиловых эфиров и алкилметилкарбонатов, посредством реагентов, неопасных для окружающей среды («зеленая химия») [1]. Рассматриваемые продукты реакции имеют широкое применение в практике: в качестве растворителей, в качестве интермедиатов синтеза лекарственных препаратов, гербицидов, антифризов и так далее [?]. Для обеспечения максимального выхода продукта с минимальными затратами (реагенты, катализаторы, энергии и так далее) необходимо исследовать вышеуказанную реакцию в широком интервале соотношений исходных реагентов и условий проведения реакции (температуры, давления, время проведения и так далее). Очевидно, проведение натурных химических опытов при разных условиях требует значительных материальных и энергетических затрат. Также, не маловажен безопасный объём труда экспериментаторов. Эти проблемы, на современном этапе эффективно решаются использованием имитационного компьютерного моделирования. Основой, которого является математическая модель химических превращений исследуемого химического процесса - кинетическая модель. Кинетическая модель с одной стороны позволяет подробно изучить реакцию, практически в любых условиях (особенно в тех, при которых невозможно осуществлять химический эксперимент) с разными входными данными, с другой стороны, вычислительными экспериментами можно установить оптимальные условия проведения реакции, с целью максимизации выхода продуктов [2].

2. Постановка задачи

Сотрудниками лаборатории «Химия углеводов» на основе натурных химических экспериментов исследован механизм реакции при различных условиях и предложена возможная схема химических превращений (таблица 1).

¹ Аспирант ФГБУН Институт нефтехимии и катализа РАН; koledinsrg@gmail.com

² Научный сотрудник ФГБУН Институт нефтехимии и катализа РАН; koledinakamila@mail.com

Таблица 1. Механизм и кинетические уравнения реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом

№	Стадии	Кинетические уравнения
1	$2X_1 + X_3 \rightarrow 2X_8$	$w_1 = k_1 x_3 x_1^2$
2	$X_2 + X_8 \rightarrow X_4 + X_9 + X_{10}$	$w_2 = k_2 x_8 x_2$
3	$X_9 \rightarrow X_6 + X_{11}$	$w_3 = k_3 x_9$
4	$X_{10} + X_{11} \rightarrow X_7 + X_{12}$	$w_4 = k_4 x_{11} x_{10}$
5	$X_1 + X_{12} \rightarrow X_8$	$w_5 = k_5 x_{12} x_1$
6	$X_2 + X_8 \rightarrow X_5 + X_{10} + X_{11}$	$w_6 = k_6 x_8 x_2$

Где $X_1 = ROH$, $X_2 = (MeO)_2CO$, $X_3 = CO_2(CO)_8$, $X_4 = ROMe$, $X_5 = ROCO_2Me$, $X_6 = CO_2$, $X_7 = MeOH$, $X_8 = HCo(CO)_4RO$, $X_9 = MeOCO_2$, $X_{10} = HCo(CO)_4$, $X_{11} = MeO$, $X_{12} = Co(CO)_4$.

С использованием информационно-вычислительной аналитической системы [3], [4], разработана математическая модель каталитической реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом (2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_3 x_1^2 - k_5 x_{12} x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -k_2 x_8 x_2 - k_6 x_8 x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = -k_1 x_3 x_1^2, \\ \frac{dx_4}{dt} = k_2 x_8 x_2, \\ \frac{dx_5}{dt} = k_6 x_8 x_2, \\ \frac{dx_6}{dt} = k_3 x_9, \\ \frac{dx_7}{dt} = k_4 x_{11} x_{10}, \\ \frac{dx_8}{dt} = k_1 x_3 x_1^2 + k_5 x_{12} x_1 - k_6 x_8 x_2 - k_2 x_8 x_2, \\ \frac{dx_9}{dt} = k_2 x_8 x_2 - k_3 x_9, \\ \frac{dx_{10}}{dt} = k_2 x_8 x_2 - k_4 x_{11} x_{10} + k_6 x_8 x_2, \\ \frac{dx_{11}}{dt} = k_3 x_9 - k_4 x_{11} x_{10} + k_6 x_8 x_2, \\ \frac{dx_{12}}{dt} = k_4 x_{11} x_{10} - k_5 x_{12} x_1. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

При $t=0$: $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$; $x_3 = x_3^0$;

3. Организация вычислительного процесса

Математическая модель (2.1) представляет собой систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (СОНДУ) с начальными данными, то есть задачу Коши. Тогда под прямой задачей будем понимать определение неизвестных концентраций веществ в зависимости от времени при заданных константах скоростей (k_i). Под обратной задачей будем понимать определение таких констант скоростей, решение СОНДУ с которыми приводит к значениям x_j , максимально близко похожих на экспериментальные данные. Каждая обратная задача это множество прямых задач, с заданными константами скоростей.

Среди методов решения СОНДУ широко распространены схемы Рунге-Кутты, но не все схемы Рунге-Кутты подходят для решения жестких задач, а СОНДУ задач химической кинетики в большинстве являются жесткими. Наличие итераций сильно усложняет использование этих схем, так как к проблемам устойчивости добавляется проблема сходимости итерационного процесса. Альтернативой, которая обходит эту трудность, являются

методы Розенброка [5]. Формально эти схемы неявные, но итераций в них не возникает и число арифметических действий для перехода на новый временной слой фиксировано и заранее известно (как в явных схемах). За это безусловное преимущество эти схемы получили название явно-неявных, или полуявных. Численный метод Розенброка решения СОНДУ реализован в системах Maple и MatLab, поэтому его и будем использовать для решения прямой задачи.

Обратная кинетическая задача относится к некорректно поставленным задачам, так как не удовлетворяет ни одному из требований корректно поставленной задачи: существование решения, единственность решения, устойчивость решения к малым изменениям в исходных данных [6]. Обратная задача химической кинетики не удовлетворяет ни одному из этих требований. Из-за неточных исходных данных, так как экспериментальные значения определяются с погрешностью, нарушается первое требование. Решение задачи также находится с некоторой погрешностью - нарушение второго требования. Наконец, вследствие особенностей методов численного решения задачи может быть нарушено и третье требование. Нет универсального метода решения обратной задачи. Обычно на практике ее решение находят перебором по определенному алгоритму серии прямых задач с целью минимизировать выбранный критерий отклонения расчетных и экспериментальных данных

$$F(\eta) = \min \quad (3.1)$$

где η - разность (невязка) между экспериментальными и расчетными концентрациями компонентов.

Большое значение при решении обратной задачи имеет правильный выбор вида функции $F(\eta)$. Методы математической статистики дают обоснованный вид этой функции только в том случае, когда известен закон распределения погрешности измерений. При нормальном законе распределения

$$F(\eta) = \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^I (x_{pi}^E - x_{pi}^P)^2 = \min. \quad (3.2)$$

где x_{pi}^E и x_{pi}^P - экспериментальные и расчетные значения концентраций компонентов, I - количество веществ, P - количество точек замера.

Нами обратная задача решается генетическим алгоритмом [7]. В программном комплексе MatLab реализован генетический алгоритм, поэтому его будем использовать для решения обратной задачи. Допустимым значением отклонения расчетных значений от экспериментальных данных принята погрешность экспериментальных данных, возникающая из-за погрешности установки для проведения химических опытов.

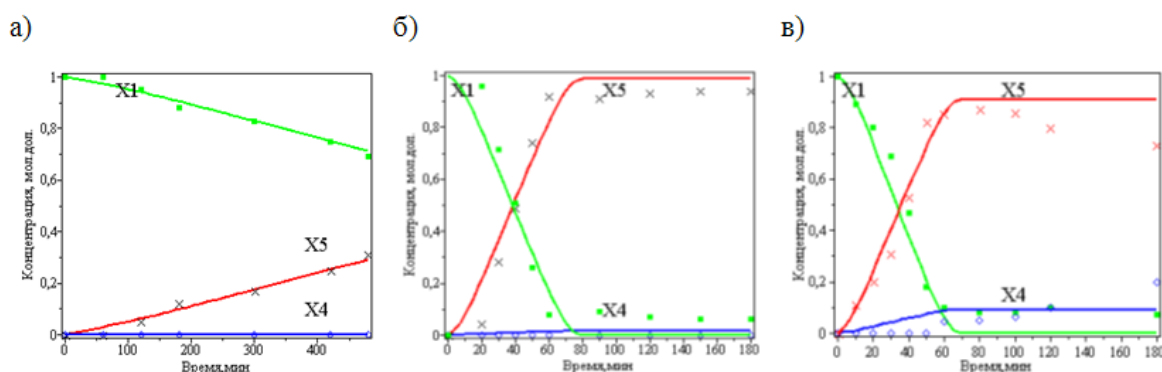
4. Кинетическая модель реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом

После обработки экспериментальных данных и решения обратной задачи, найдены значения констант скоростей стадий для заданных температур. Из уравнения Аррениуса определены энергии активации, по методу наименьших квадратов. Рассчитанные значения параметров приведены в табл. 3.

Таблица 2. Кинетические параметры стадий реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом ($k_i = [\text{мин}^{-1}]$, $E_a = [\text{ккал/моль}]$)

№	Реакция	T, °C	k_i					Ea
			150	160	170	180	200	
1	$2ROH + Co_2(CO)_8 \rightarrow 2H^+Co(CO)_4RO^-$		0,5	1	2	4	5	19
2	$(MeO)_2CO + H^+Co(CO)_4RO^- \rightarrow ROMe + MeOCO_2^- + H^+Co(CO)_4$		0,0005	0,01	0,02	0,12	1	57,6
3	$MeOCO_2^- \rightarrow CO_2 + MeO^-$		12	20	35	50	100	16,9
4	$H^+Co(CO)_4 + MeO^- \rightarrow MeOH + Co(CO)_4$		4	5,5	7	120	130	32,2
5	$ROH + Co(CO)_4 \rightarrow H^+Co(CO)_4RO^-$		5,5	7	9	150	180	32,3
6	$(MeO)_2CO + H^+Co(CO)_4RO^- \rightarrow ROCO_2Me + H^+Co(CO)_4 + MeO^-$		1	2	3,1	8	10	19,1

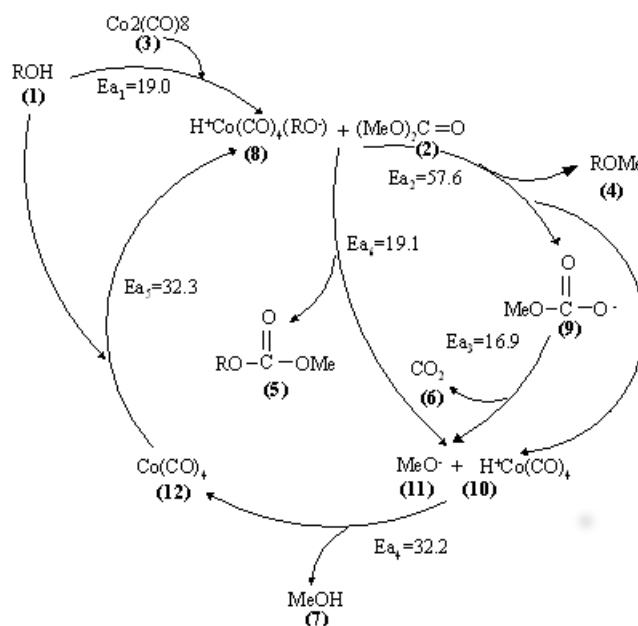
На 4.1 показано соответствие расчетных значений концентраций наблюдаемых веществ экспериментальным данным, при заданном наборе параметров.



Р и с у н о к 4.1

Соответствие расчетных значений экспериментальным данным реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом: а) T=150 ° C, б) T=180 ° C, в) T=200 ° C

На 4.2 приведена кинетическая модель рассматриваемой реакции.



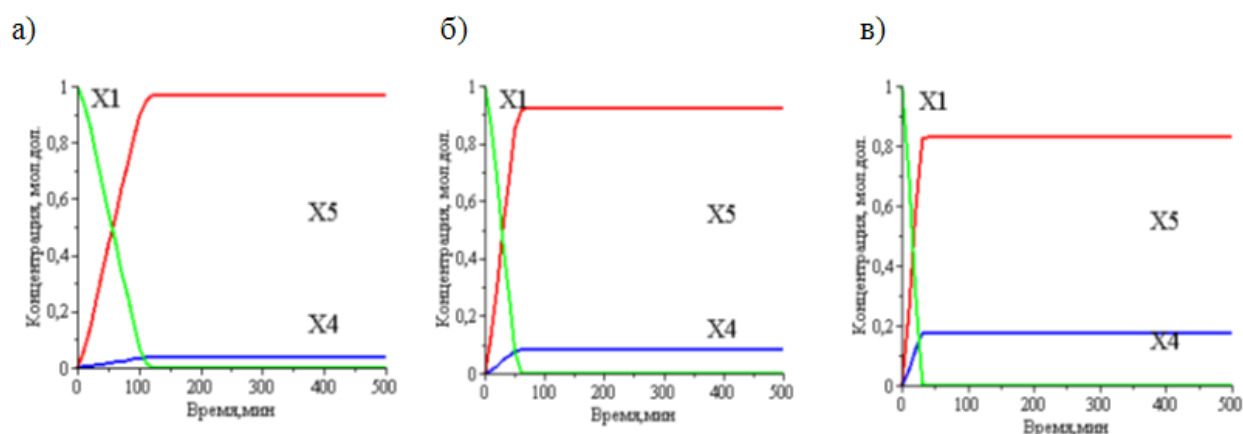
Р и с у н о к 4.2

Кинетическая модель реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом

По 4.2 видно, что спирты при взаимодействии с кобальтовым катализатором образуют комплекс (8), реакция которого с исходным диметилкарбонатом может пойти по двум направлениям: либо с образованием комплекса (9) и побочного продукта (4), либо по пути образования комплексов (10) и (11) и целевого продукта (5) - алкилметилового эфира. Принимая во внимание активационные барьеры стадий можно сделать вывод, что более вероятно протекание реакции с образованием комплекса(5) ($E_a=19,1$ ккал/моль), чем с образованием (4) ($E_a=57,6$ ккал/моль). Такая закономерность наблюдается и в эксперименте. Так по 4.1 видно, что только при температуре 200°C , в заданный промежуток времени появляется комплекс (4) после 60 мин. реакции, а комплекс (5) появляется в самом начале реакции, даже при более низких температурах. Но в любом случае, обе эти стадии приводят к образованию (10) и (11), которые в свою очередь образуют комплекс (12), взаимодействие которого с исходным спиртом приводит к замыканию каталитического цикла.

5. Вычислительный эксперимент. Результаты

На основе кинетической модели реакции можно провести вычислительный эксперимент и проанализировать поведение реакции при любых условиях, даже для тех, для которых не поставлен химический эксперимент. Так, зная энергии активации и, соответственно значения предэкспоненциального множителя в уравнении Аррениуса можно определить константы скоростей для любой температуры и, соответственно, решить прямую задачу для этих констант скоростей и посмотреть, как себя ведут любые вещества в реакции. Так из рис. 1 видно, что с увеличением температуры идет рост выхода целевого продукта X5. Однако, при температуре 200°C продукт X5 уже не достигает максимального значения 1, как при 180°C , так как начинает образовываться побочный продукт X4. Поэтому нами был проведен вычислительный эксперимент с целью определения значения температуры, при котором начинает образовываться X4 и более которого не имеет смысла поднимать температуру (5.1).

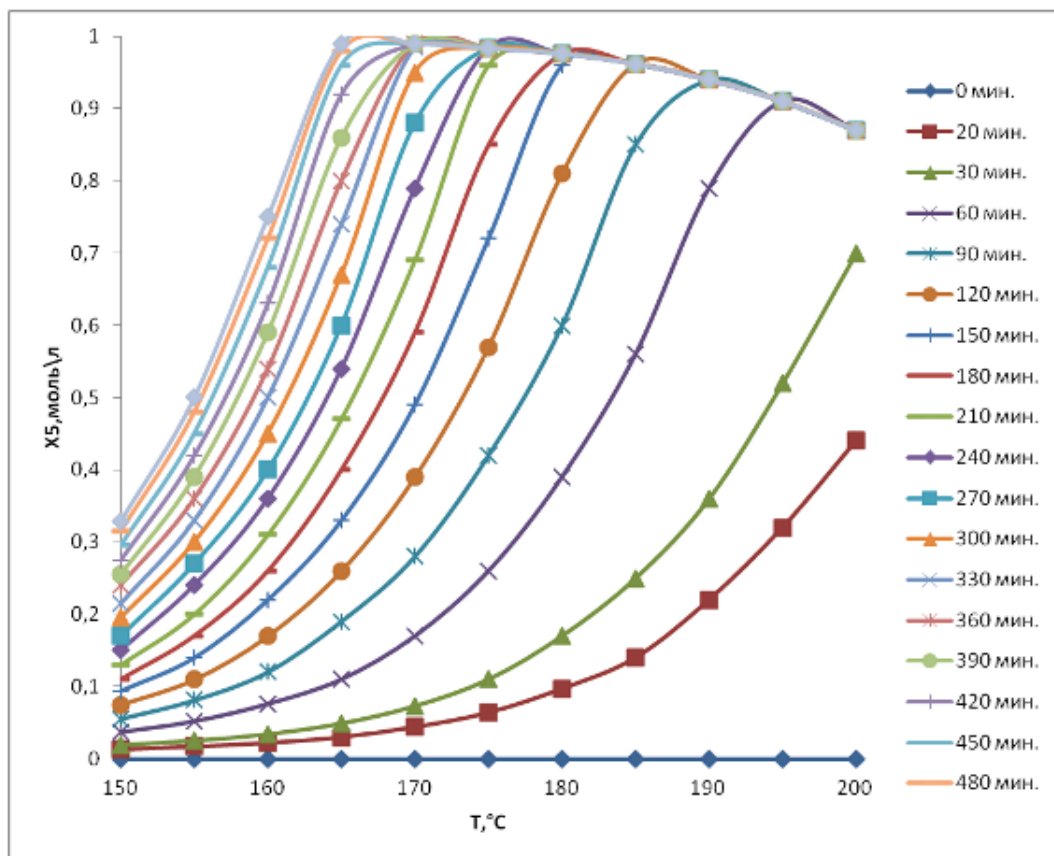


Р и с у н о к 5.1

Расчетные значения изменения концентраций наблюдаемых веществ реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом: а) $T=184^\circ\text{C}$, б) $T=194^\circ\text{C}$, в) $T=204^\circ\text{C}$

По 5.1 видно, что при $T=184^\circ\text{C}$ уже начинает образовываться побочный продукт X4. С увеличением температуры его становится только больше, а при температуре 204°C он занимает практически 20% из всего выхода продуктов, тем самым уменьшая выход целевого X5. Дальнейшие исследования были направлены на определение оптимального

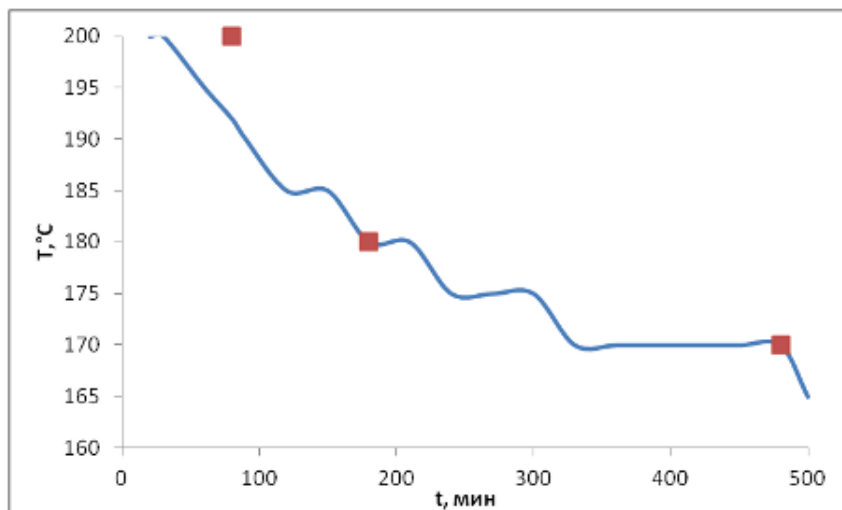
времени для максимального выхода продукта при различных условиях. Из 5.1 видно, что изменение выхода продукта в одно и то же время при различных температурах проходит через точку максимума. То есть для каждой температуры можно определить оптимальное время, при котором выход продукта будет максимальным и после которого реакцию необходимо остановить и, возможно, запустить рецикл. Иначе дальнейшее проведение реакции, поддержание температуры будет экономически нецелесообразно [8].



Р и с у н о к 5.2

Изменение выхода продукта реакции взаимодействия спиртов с диметилкарбонатом в одно и тоже время при различных температурах

На 5.2 каждая кривая это изменение концентрации X_5 в одно и тоже время при разных температурах. Видно, что каждая кривая проходит через максимум. По точкам максимумов строим оптимальный профиль температур, поставив в соответствие каждому рассматриваемому моменту времени температуру, при которой достигается максимум выхода продукта (5.3).



Р и с у н о к 5.3

Условия максимального выхода продукта $ROCO_2Me$ (сплошная линия - расчетные значения, точки - экспериментальные данные)

По 5.3 видно, что, для любой температуры можно определить оптимальное время проведения реакции и, наоборот, для любого заданного времени подобрать оптимальную температуру. Для подтверждения адекватности разработанной кинетической модели химикам-экспериментаторам, авторам работы [1], было предложено провести натуральный химический эксперимент при следующих условиях: $T=175^\circ\text{C}$, $T=190^\circ\text{C}$. Проведенные химические опыты полностью подтвердили вычислительный эксперимент. Так, при $T=175^\circ\text{C}$ максимальный выход целевого продукта наблюдался на 5 ч. проведения эксперимента, а при $T=190^\circ\text{C}$ на 2 ч., что соответствует расчетным значениям (5.3).

Таким образом, математическое моделирование химических реакций, построение кинетической модели, позволяет определить оптимальные условия проведения реакции и тем самым планировать химический эксперимент, с целью получения необходимых значений выхода продуктов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-07-01764 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хуснутдинов Р.И., Щаднева Н.А., Маякова Ю.Ю., "Синтез алкилметиловых эфиров и алкилметилкарбонатов при взаимодействии спиртов с диметилкарбонатом в присутствии комплексов W и Co", *Журнал органической химии*, **50**:6 (2014), 808-813.
2. Григорьева Н.Г., Джемилев У.М., Кутепов Б.И., Балаев А.В., Губайдуллин И.М., Хазилова А.Н., Галяутдинова Р.Р., "Разработка кинетической модели димеризации α -метилстирола на цеолите типа Y", *Химическая промышленность сегодня*, 2004, № 9, 31-36.
3. Губайдуллин И.М., Коледина К.Ф., Спивак С.И., "Структурная и параметрическая идентификация кинетических моделей химических реакций с участием металлоорганических соединений на основе информационно-вычислительной аналитической системы", *Химическая промышленность сегодня*, 2014, № 11, 18-27.

4. Губайдуллин И.М., Коледина К.Ф., Спивак С.И., “оследовательно-параллельное определение кинетических параметров”, *Журнал средневожского математического общества*, **11**:2 (2009), 14-25.
5. Альшин А. Б., Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корягина А. Б., “Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально- алгебраических систем”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **46**:8 (2006), 1392-1414.
6. Коледина К.Ф., Губайдуллин И.М., “Программный комплекс для решения обратных задач химической кинетики и его реализация в виде виртуального испытательного стенда”, *Наука и образование: электронное научно-техническое издание*, 2013, № 7, 385-398.
7. Gubaydullin I., Koledina K., Sayfullina L., “Mathematical modeling of induction period of the olefins hydroalumination reaction by diisobutylaluminiumchloride catalyzed with $\text{Cp}^*\text{2ZrCl}_2$ ”, *Engineering journal*, **18**:1 (2014), 13-24.
8. Коледин С.Н., Коледина К.Ф., Губайдуллин И.М., “Кинетика реакции в исследовании экономической эффективности химического производства”, *В сборнике: Математическое моделирование процессов и систем сборник трудов III всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Ответственный редактор С.А. Мустафина.*, 2014, 30-34.

Scheduling economically optimal chemical experiment based on a kinetic model of the catalytic reaction of alcohols with dimethyl carbonate

© S. N. Koledin³, K. F. Koledina⁴

Abstract. A mathematical modeling of the synthesis reaction alkylmetilovyh esters and alkylmetilkarbonatov by reagents, non-hazardous for the environment («green chemistry»). On the basis of the analysis of the kinetic model of the process conditions and temperature profile is built, which allows to determine the optimal reaction conditions.

Key Words: the catalytic reaction, kinetic equation, dimethyl carbonate, green chemistry, temperature profile

³ Postgraduate FSBIS Institute of Petrochemistry and Catalysis, RAS; koledinsrg@gmail.com

⁴ Scientific employee FSBIS Institute of Petrochemistry and Catalysis, RAS; koledinakamila@mail.com

УДК 517.956.2

Топология магнитных полей и динамические системы

© М. Л. Коломиец¹, А. Н. Сахаров²

Аннотация. Изучается топология магнитных полей в плазме и возможности ее описания в терминах динамических систем.

Ключевые слова: особые точки поля, магнитные силовые линии, топологическая структура, сепараторы, гетероклинические кривые

1. Введение

В настоящей работе рассматривается связь между топологией силовых линий магнитного поля и теорией динамических систем. Эта связь рассматривается в рамках магнитной гидродинамики, то есть речь идет о динамике взаимодействия магнитного поля с проводящей движущейся средой, которую будем для краткости называть плазмой. Задача о топологии магнитных силовых линий в плазме играет существенную роль в описании динамики плазмы в короне солнца, термоядерных реакторах, а также в фундаментальной задаче о механизме пере замыкания [1].

Топология магнитных полей описывается на языке силовых линий. Действительно, магнитное поле задается вектором напряженности $\mathbf{H}$ в каждой точке некоторой области трехмерного пространства. Интегрирование этого векторного поля позволяет определить его интегральные кривые, которые принято называть *силовыми линиями поля*. Для построения полной картины топологии магнитного поля – фазового портрета, необходимо также учесть конфигурацию особенностей поля – точек, где оно не определено. Таковыми точками являются точки, в которых поле равно нулю, а также точки, в которых поле неограничено. Точки, в которых поле неограничено, в классической электродинамике соответствуют точечным электрическим или магнитным зарядам. Точечные заряды являются либо *источниками*, либо *стоками*, то есть силовые линии начинаются и заканчиваются в этих точках. Заметим, что магнитный заряд – монополю до сих пор экспериментально не обнаружен, поэтому источниками (стоками) магнитного поля являются *диполи*³. Отсутствие монополей приводит к тому, что магнитное поле бездивергентно:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (1.1)$$

Совокупность всех источников поля образует мультиполь, интенсивность которого равна сумме интенсивностей входящих в него источников.

Представление о точечной природе источников электромагнитного поля приводит к логическим противоречиям теории: точечный заряд имеет бесконечную массу. Они разрешаются с помощью так называемых процедур перенормировки поля в окрестности особенности [2]. Перенормировка, как правило, – это переход от точечного объекта к объекту конечных размеров. В случае макроскопических полей допущение о точечном характере источников поля вполне оправдано.

¹ Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru

² Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru

³ Диполь – комбинация двух противоположных по знаку зарядов, равных по абсолютной величине. Моделью магнитного диполя является поле, создаваемое петлевым током.

В задачах магнитной гидродинамики магнитное поле принято представлять индукцией магнитного поля $\mathbf{B}$, которая связана с $\mathbf{H}$ соотношением $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, где μ – магнитная проницаемость среды. Тогда движение вдоль силовых линий описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

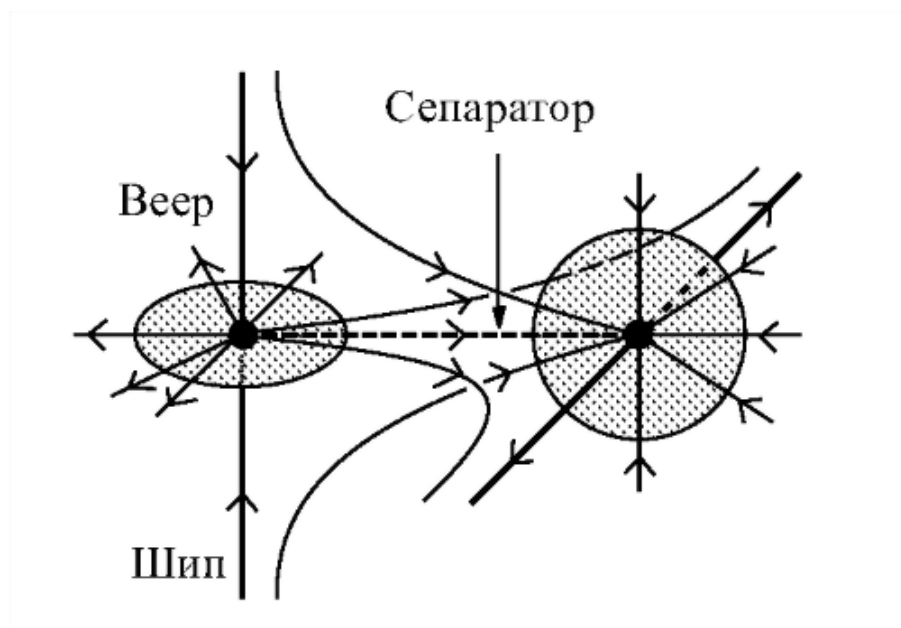
где $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ – радиус-вектор точки, в которой приложен вектор $\mathbf{B}$, а s – некоторый параметр (не обязательно длина дуги), который определяет положение точки на силовой линии, относительно начального положения. Нулевые точки определяются уравнением

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.3)$$

Нулевые точки – это неподвижные точки потока, порождаемого уравнением (1.2).

В типичном случае⁴ собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в нулевой точке поля $\mathbf{B}$ не равны нулю и удовлетворяют соотношению $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, в силу равенства (1.1). С точки зрения теории динамических систем такая нулевая точка является седлом с двумерной и одномерной сепаратрисами. Как показано в [11] нулевая точка будет седлом, если сумма интенсивностей всех источников поля в конечной части рассматриваемой области не равна нулю.

В физической литературе часто одномерную сепаратрису седла называют *шипом* (spine), а двумерную – *веерной поверхностью* (fan) [3]. Пересечения веерных поверхностей различных нулевых точек принято называть *сепараторами*. Если эти пересечения трансверсальны, то их называют *гетероклиническими сепараторами*. На языке динамических систем – это гетероклинические кривые.



Р и с у н о к 1.1

Гетероклинический сепаратор.

Таким образом, объединение особенностей поля, шипов, веерных поверхностей и сепараторов определяет топологическую структуру поля. Это объединение называют в физической литературе *скелетом* или *остовом* магнитного поля.

⁴ Легко показать, что у градиентного потока все собственные числа нулевых точек будут вещественными.

Экспериментальные наблюдения показывают, что эволюция структуры магнитного поля в плазме демонстрирует характер релаксационных колебаний: в течении значительного промежутка времени структура магнитного поля не изменяется, затем быстро происходит перестройка структуры (бифуркация), которая сопровождается перезамыканием магнитных силовых линий. Физические процессы, приводящие к перезамыканию силовых линий, подробно описаны в обзорной статье [1], математическая теория этих процессов дается в монографии [3], глава 8.

Задача о перестройке структуры магнитного поля сводится к изучению бифуркаций траекторий системы (1.2). При достаточно общих предположениях этой системе можно сопоставить динамическую систему на трехмерном многообразии с тем же самым остовом. Более того, в типичном случае это будет система Морса-Смейла, что позволяет выделить структурно устойчивые топологические конфигурации магнитных полей и получить их топологическую классификацию.

Заметим, что во многих учебниках физики присутствует утверждение о том, что силовые линии не имеют физического смысла⁵. Однако, в магнитной гидродинамике силовые линии имеют вполне определенный физический смысл. Например, в идеально проводящей плазме имеет место свойство *вмороженности магнитного поля*: при движении среды силовые линии следуют за ней, будучи как бы “вмороженными” [4]. Эти условия выполнены в токомаках – устройствах для изучения термоядерных реакций в земных условиях. Устойчивость замкнутого плазменного шнура в токомаке обеспечивается существованием замкнутых магнитных поверхностей (торов), состоящих из силовых линий [5].

В работе В.З. Гринеса и О.В. Починки [6] был изучен класс динамических систем, моделирующих при достаточно общих предположениях магнитные поля в короне Солнца. Ниже рассматривается частный случай таких систем, моделирующих явно заданные потенциальные поля.

2. Модели магнитных полей

Непосредственное изучение топологии магнитного поля в плазме подразумевает решение системы магнитогидродинамических уравнений ([8], гл. 8). Основное уравнение, связывающее скорость потока $\mathbf{v}$ в плазме и магнитное поле $\mathbf{H}$ описывается следующим уравнением в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \eta \Delta \mathbf{H}, \quad (2.1)$$

где η – магнитная вязкость, обратная магнитному числу Рейнольдса. Решение этого и сопутствующих уравнений при заданных начальных и краевых условиях представляет собой сложную вычислительную задачу. Например, численное моделирование процесса перезамыкания силовых линий полей в высокопроводящей плазме возможно только при использовании суперкомпьютеров [9]. Следовательно, в системе (1.2) необходимо использовать априорные модели поля. Построение таких моделей использует ряд предположений физического характера.

Основное предположение носит название «модель топологии магнитного заряда» (модель ТМЗ) (см., например, [10]) и заключается в следующих упрощающих анализ допущениях:

1. источник поля (диполь) представляется в виде пары точек, одна из которых является источником, другая – стоком;

⁵ Заметим, что этого мнения придерживался академик И.Е. Тамм [7], один из авторов идеи токомака!

2. поле потенциально, то есть представимо в виде $\mathbf{B} = \nabla\Phi$, где Φ – скалярный потенциал.

Для n точечных источников с интенсивностями α_k , расположенных в точках $\mathbf{r}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, потенциальное поле, удовлетворяющее условиям модели ТМЗ, задается потенциалом

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|}. \quad (2.2)$$

Тогда

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|^3}. \quad (2.3)$$

В этой модели равенство $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ выполняется всюду, кроме источников (стоков) магнитного поля. Эта модель с разной степенью детализации рассматривалась в целом ряде работ [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], где она использовалась для описания механизма рождения и смерти сепараторов.

При моделировании магнитного поля солнечной короны, в модель ТМЗ добавляется еще одно предположение:

3. границу фотосферы можно рассматривать как инвариантную сферу S^2 , на которой и располагаются источники поля.

В локальных координатах это инвариантная плоскость $z = 0$. При заданном количестве источников, можно в типичном случае определить количество нулей поля, лежащих на инвариантной сфере. Используя формулу Эйлера для индекса векторного поля получаем

$$n_\alpha + n_\omega - n_\sigma = \chi = 2, \quad (2.4)$$

где n_α – число источников поля, n_ω – число стоков, n_σ – число седловых нулевых точек, χ – эйлерова характеристика сферы [18].

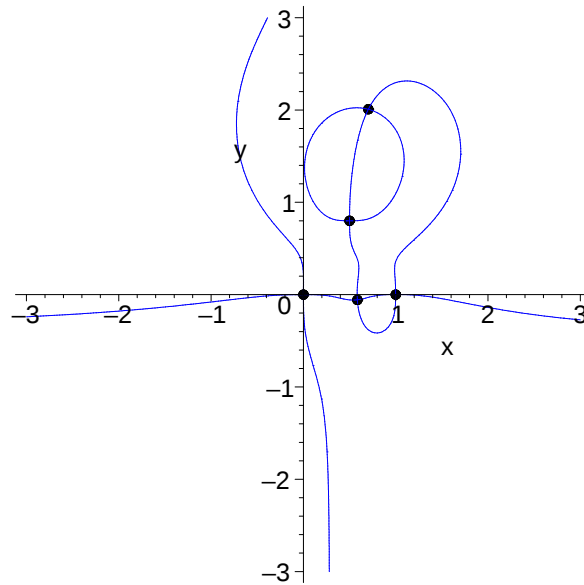
В общем случае нули и источники поля располагаются в пространстве произвольным образом и их количество удовлетворяет соотношению

$$n_\alpha - n_\sigma^+ = n_\omega - n_\sigma^-, \quad (2.5)$$

где n_σ^+ – число седел с двумерной неустойчивой сепаратрисой, n_σ^- – число седел с двумерной устойчивой сепаратрисой. Это соотношение следствие равенства нулю суммы индексов особых точек векторного поля на трехмерном замкнутом многообразии [18]. В равенствах (2.4) и (2.5) подразумевается баланс источников поля, то есть сумма интенсивностей всех источников равна нулю. В случае неравенства нулю этой суммы добавляется источник в бесконечности соответствующей интенсивности.

Формулы (2.4) и (2.5) связывают между собой количество критических точек различных индексов функции Морса на замкнутом многообразии.

Следовательно, в этой модели подразумевается, что источники поля по своей природе не отличаются от притягивающих (отталкивающих) нулевых точек поля.



Р и с у н о к 2.1

Источники и нулевые точки поля.

Действительно, пусть $a(\mathbf{r}) = \prod_{k=1}^n \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|^3$. Тогда уравнение (1.3) можно представить в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{a(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) a(\mathbf{r}) / \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|^3 = \frac{1}{a(\mathbf{r})} \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Ясно, что уравнение $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ определяет нули поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ и имеет, кроме этого, простые нули в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$.

Пусть $\varepsilon > 0$, для любого $k = 1, 2, \dots, n$ найдем шар $U_k(\varepsilon)$ радиуса $\rho(\varepsilon)$ с центром в точке $\mathbf{r}_k$ такой, что $a(\mathbf{r}) < \varepsilon$ для всех $\mathbf{r} \in U_k(\varepsilon)$. Очевидно, что $\rho(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{a(\mathbf{r})} \mathbf{F}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k=1}^n U_k(\varepsilon), \\ \frac{1}{a(\mathbf{r}, \varepsilon)} \mathbf{F}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \bigcup_{k=1}^n U_k(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.6)$$

где $a(\mathbf{r}, \varepsilon) = a(\mathbf{r}) + \varepsilon b_k(\mathbf{r})$, а $b_k : \overline{U_k(\varepsilon)} \rightarrow [0, 1]$ — C^∞ -функция такая, что

1. $b_k(\mathbf{r}) = 1$ при $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\| \leq \frac{\rho(\varepsilon)}{2}$,
2. $0 < b_k(\mathbf{r}) < 1$ при $\frac{\rho(\varepsilon)}{2} < \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\| < \rho(\varepsilon)$,
3. $b_k(\mathbf{r}) = 0$ при $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\| = \rho(\varepsilon)$.

Определенное таким образом поле $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \varepsilon)$ имеет те же самые нули, что и поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, бездивергентно в области $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k=1}^n U_k(\varepsilon)$ и имеет в качестве источников-стоков простые нулевые точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$. Будем называть векторное поле $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \varepsilon)$ *регуляризацией* поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Так как топология векторного поля определяется силовыми линиями, то естественно ввести следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2.1. Два векторных поля на одном и том же многообразии M называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M \rightarrow M$ этого многообразия, который переводит интегральные кривые первого поля в интегральные кривые второго, сохраняя их ориентации.

Исходя из этого определения, получаем следующий результат.

Т е о р е м а 2.1. Векторные поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \varepsilon)$ топологически эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вне окрестностей $U_k(\rho)$ интегральные кривые обоих полей идентичны и искомый гомеоморфизм – тождественный. В окрестностях $U_k(\rho)$ отождествим траектории с одинаковыми начальными данными на границе окрестности. Так как все интегральные кривые уравнения (1.2) и уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{G}(\mathbf{r}, \varepsilon) \quad (2.7)$$

в каждой окрестности входят в одну и ту же точку, то это соответствие будет взаимно однозначным.

Далее, при $\mathbf{r} \in U_k(\varepsilon)$ уравнение (2.7) представляет собой сингулярно возмущенное уравнение

$$a(\mathbf{r}, \varepsilon) \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Так как единственное положение равновесия этой системы будет асимптотически устойчиво (неустойчиво), то согласно классической теореме А.Н. Тихонова [19] построенное выше соответствие будет непрерывным при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Рис. 2.1 иллюстрирует доказанную теорему. На нем изображены кривые $\mathbf{B}_x(x, y, 0) = 0$, $\mathbf{B}_y(x, y, 0) = 0$ для поля вида (2.3) с тремя источниками в точках $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}_3 = (.5, .8, 0)$ на инвариантной плоскости $z = 0$. Кривые имеют пять точек пересечения в конечной части плоскости: три из них соответствуют источникам, две – нулевым точкам седлового типа.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-03687-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б.Б. Кадомцев, “Перезакрытие магнитных силовых линий”, *Успехи физических наук*, **151**:1 (1987), 3–29.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теория поля*, Наука, М., 1967.
3. Прист Э., Форбс Т., *Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения*, Физматлит, М., 2005.
4. Альвен Г., Фельхаммар К.Г., *Космическая электродинамика*, Мир, М., 1967.
5. Ю. Мозер, *Лекции о гамильтоновых системах*, Мир, М., 1973.
6. V. Grines, O. Pochinka, “Topological Classification of Global Magnetic Field in the Solar Corona”, *Solar Physics*, (in the press) (2015).

7. И.Е. Тамм, *Основы теории электричества*, Физматлит, М., 2003.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
9. Д. П. Костомаров, Е. Ю. Ечкина, И. Н. Иновенков, С. В. Буланов, “Моделирование магнитного пере замыкания в трехмерной геометрии”, *Матем. моделирование*, **21**:11 (2009), 3–15.
10. D.W. Longcope, “Topological Methods for the Analysis of Solar Magnetic Fields”, *Living Rev. Solar Phys.*, **2**:7 (2005), 5–72.
11. Молоденский М. М., Сыроватский С. И., “Магнитное поле в активных областях и его нулевые точки”, *Астрономический Журнал*, **54** (1977), 1293–1304.
12. D.S. Brown, E.R. Priest, “Topological bifurcations in three-dimensional magnetic fields”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **455**:1991 (1999), 3931–3951.
13. D.S. Brown, E.R. Priest, “The topological behavior of stable magnetic separators”, *Solar Phys.*, **190**:1-2 (1999), 25–33.
14. D.S. Brown, E.R. Priest, “Topological bifurcations and similarities between force-free and potential models of coronal magnetic fields”, *Solar Phys.*, **194**:2 (2000), 197–204.
15. C. Beveridge, E.R. Priest, D.S. Brown, “Magnetic topologies due to two bipolar regions”, *Solar Phys.*, **2**:2 (2002), 333–347.
16. C. Beveridge, E.R. Priest, D.S. Brown, “Magnetic topologies in the solar corona due to four discrete photospheric flux regions”, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **98**:5 (2004), 429–446.
17. R. Maclean, C. Beveridge, D. Longcope, D. Brown, E. Priest, “A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare”, *Proc. R. Soc. A*, **461**:5 (2005), 2099–2120.
18. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., *Современная геометрия*, Наука, М., 1979.
19. Тихонов А.Н., “О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра”, *Матем сб.*, **22**:2 (1948), 193–204.

Topology of magnetic fields and dynamical systems

© M.L. Kolomiets⁶, A.N. Sakharov⁷

Abstract. We discuss the topology of magnetic fields in the plasma and the possibility of their description in terms of dynamic systems.

Key Words: singular points of the field, magnetic field lines, topological structure, sources, sinks, bifurcation, separatrix, separators, heteroclinic curves

⁶ Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru

⁷ Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru

УДК 517.9+519.8

Математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала с дискретным временем

© Ю. А. Кузнецов ¹, Е. В. Круглов ², Д. А. Бурлакова ³

Аннотация. В работе рассматривается дискретная математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала типа Лукаса. Её исследование сводится к изучению трехмерной динамической системы с дискретным временем. Определяются условия существования единственной траектории сбалансированного роста.

Ключевые слова: модели экономического роста с учетом человеческого капитала, трехмерные динамические системы с дискретным временем, траектории сбалансированного роста

1. Введение

В теории экономического роста принято выделять некоторый набор так называемых *стилизованных фактов* (*stylized facts*) современного экономического роста – набор тенденций и закономерностей, типичных для современной экономической динамики. К их числу относится и следующий факт: в обеспечении высоких темпов экономического роста важную роль играют как *научно-технологический прогресс*, так и *образование и уровень квалификации рабочей силы* (см. подробнее [2], [20], [14]).

Следует отметить, что роль уровня квалификации рабочей силы отмечалась ещё классиками экономической теории (А. Смит, Ж.Б. Сэй, Дж.С. Милль, Л. Вальрас, А. Пигу и др.). В явном и теперь уже общепринятом виде концепция человеческого капитала вошла в экономическую науку только в 60-х годах XX столетия благодаря работам Дж. Минцера, Т. Шульца, Г. Беккера и М. Блауга. Первоначально в теории экономического роста в качестве основных рассматривались лишь такие экономические факторы, как *физический капитал* и *трудовые ресурсы* (в действительности – *численность* занятых в производстве работников).

В настоящее время одним из самых существенных *факторов экономического роста* считается *человеческий капитал*. По существу человеческий капитал представляет собой совокупность накопленных профессиональных *знаний, умений и навыков*, получаемых в процессе образования и повышения квалификации, которые впоследствии могут приносить доход – в виде заработной платы, процента или прибыли. Его передача осуществляется с помощью (относительно длительного) процесса *обучения и(или) практик*, призванных транслировать специфические знания и демонстрировать процедуры выработки новых навыков. Человеческий капитал носит ярко выраженный *индивидуальный* характер и *изначально* он воплощен в *отдельной* человеческой личности, а совокупный запас человеческого капитала в том или ином сообществе равен сумме запасов всех входящих в него индивидуумов.

¹ Заведующий кафедрой математического моделирования экономических процессов, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; Yu-Kuzn@mm.unn.ru.

² Доцент кафедры математического моделирования экономических процессов, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kruglov19@mail.ru.

³ Аспирант, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; groha@yandex.ru.

В современной теории экономического роста человеческий капитал рассматривается как важный фактор экономического роста и развития, а механизм его производства и накопления – как существенная часть *эндогенных математических моделей экономического роста*. Начиная с работ классиков, рассматриваются различные пути (механизмы) формирования и накопления человеческого капитала. Важнейшие концепции, описывающие влияние человеческого капитала и научно-технологического прогресса (НТП) на динамику экономических систем, восходят к работам К. Эрроу, П. Ромера, Р. Нельсона – Э. Фелпса, Х. Узава и Р. Лукаса (см. подробнее [2], [14], [15], [16], [17], [18], [19]).

По-видимому, впервые концепция человеческого капитала была включена в модель экономического роста в классической статье К. Эрроу [1]. В его модели рост технического знания был «непреднамеренным» (то есть *побочным, by-product*) последствием опыта создания новых средств производства, а механизм накопления человеческого капитала включает в себя обучение работников без отрыва от производства («*learning-by-doing*»).

Другой механизм накопления человеческого капитала описан в общетеоретическом плане Г. Беккером и связан с повышением квалификации работников путем их обучения «с *отрывом от производства*». Впервые эта концепция накопления человеческого капитала была включена в неоклассическую модель экономического роста в известной (и тоже считающейся классической) работе Р. Лукаса [9]. Подробнее об этой модели и её обобщениях см., например, в работах [2], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19]. Подчеркнем, что в работе Р. Лукаса [9] строится математическая модель с *непрерывным* временем.

В последнее десятилетие были предприняты попытки рассмотрения аналога модели Лукаса с *дискретным* временем (см., например, [7], [6], [3], [8]). Мотивацией для построения подобных моделей выступает желание получить модель, сохраняющую известные и экономически оправданные качественные особенности исходной модели Лукаса, и, кроме того, такую, которую проще и удобнее сопоставлять с данными экономической статистики (то есть с соответствующими временными рядами).

Заметим, что важнейшие математические модели экономического роста, связанные с понятием человеческого капитала, в действительности в той или иной степени отождествляют человеческий капитал с той его компонентой, которая характеризует (в широком смысле) *эффективность* труда экономического агента, или даже (более узко) его *производительность* труда.

В настоящей работе рассматривается общая математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала типа Лукаса с дискретным временем. Её исследование сводится к изучению трехмерной динамической системы с дискретным временем. Определяются условия существования единственной траектории сбалансированного роста. Исследуются качественные особенности фазового пространства системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №15-01-04604).

2. Постановка задачи

Процедура построения математической модели экономического роста с учетом накопления человеческого капитала с дискретным временем в основном следует логике работы [9]. Следуя традиции (см. [9]), выделим в явном виде «*внутренний*» и «*внешний*» эффекты процесса накопления человеческого капитала. Внутренний эффект этого процесса определяет рост *индивидуальной* эффективности труда «репрезентативного экономического агента» (ЭА); внешний эффект – связан с организационными и социальными аспектами производственной деятельности, на которые не могут повлиять индивидуальные

решения ЭА о накоплении своего человеческого капитала. Этим эффектом определяются «экстерналии». Как и в работе [9], ограничимся рассмотрением простейшего (и вместе с тем – одного из важнейших) случая, когда производственная функция является функцией типа Кобба – Дугласа, а экстерналии учитываются в мультипликативной форме. Поскольку речь идет о выявлении роли процесса накопления человеческого капитала, а не роста численности работников, естественно ограничиться случаем постоянной численности рабочей силы, то есть считать, что её темп роста равен нулю. В итоге уравнения динамики запишутся в виде:

$$k_{t+1} = Ak_t^\beta (u_t h_t)^{1-\beta} \bar{h}_t^\gamma - c_t + (1 - \delta_k)k_t, \quad (2.1)$$

$$h_{t+1} = \delta(1 - u_t)h_t + (1 - \delta_h)h_t. \quad (2.2)$$

Здесь t – номер временного периода, $t \geq 0$; $k_t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$ – удельный (*per capita*) физический капитал, приходящийся в среднем на одного ЭА; $h_t \in \mathbb{R}_+$ – уровень человеческого капитала ЭА; u_t – доля активного времени ЭА, отводимая трудовой деятельности; c_t – уровень потребления ЭА; δ_k и δ_h – соответственно коэффициенты выведения (*depreciation rate*) физического и человеческого капиталов, $\delta_k \in (0, 1)$, $\delta_h \in (0, 1)$; $\delta > 0$, $A > 0$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma > 0$ – постоянные, характеризующие процесс накопления человеческого капитала и технологические особенности производства. Множитель $\bar{h}_t^\gamma$ описывает экстерналии.

Вообще говоря, ЭА при планировании своей деятельности исходит из восприятия экстерналий как заданных (и известных) функций времени. При этом он выбирает свою стратегию из условия максимизации суммарной дисконтированной полезности

$$J[u, c] = \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \rightarrow \max. \quad (2.3)$$

Здесь $\sigma > 0$ ($\sigma \neq 1$) и $\rho \in (0, 1)$ – постоянные, характеризующие особенности поведения ЭА. Функции $c(t) \in \mathbb{R}_+$ и $u(t) \in [0, 1]$ являются управлениями.

Форма оптимизационной задачи (2.1), (2.2), (2.3) является вполне традиционной для математической теории экономического роста. Адекватный для исследования этой задачи (а также и более общих задач) математический аппарат достаточно подробно представлен в работах [4], [11], [5], [2] и [14]. Там же описана специфика рассмотрения этой задачи, трактуемой в содержательном плане как задача о «конкурентном равновесии» (*competitive equilibrium*).

Используя подход работ [4], [11] и [5], основанный на методе множителей Лагранжа, записанном в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина, можно показать, что необходимые условия экстремума в данной задаче могут быть представлены в виде следующей системы разностных уравнений:

$$k_{t+1} = Ak_t^\beta u_t^{1-\beta} h_t^{1-\beta+\gamma} - c_t + (1 - \delta_k)k_t, \quad (2.4)$$

$$h_{t+1} = \delta(1 - u_t)h_t + (1 - \delta_h)h_t, \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{c_t}{c_{t-1}}\right)^\sigma = \rho \left(\beta Ak_t^{\beta-1} u_t^{1-\beta} h_t^{1-\beta+\gamma} + (1 - \delta_k)\right) \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{u_t}{u_{t-1}}\right)^\beta = \rho \left(\frac{c_{t-1}}{c_t}\right)^\sigma \left(\frac{k_t}{k_{t-1}}\right)^\beta \left(\frac{h_t}{h_{t-1}}\right)^{\gamma-\beta} ((1 - \delta_h) + \delta). \quad (2.7)$$

Заметим, что в уравнениях (2.4)–(2.7) фактически предполагается, что, в соответствии с экономическим смыслом переменных, справедливо включение $(k_t, h_t, c_t, u_t) \in \mathbb{R}_{++}^4$, $\mathbb{R}_{++} \equiv (0, \infty)$.

В математической теории экономического роста обычно ограничиваются исследованием только некоторого подмножества $\mathcal{P}_{BGP}$ множества $\mathcal{P}$ оптимальных траекторий, а именно – рассмотрением *сбалансированных оптимальных траекторий*. По-видимому, впервые такие траектории были рассмотрены в работе [9]. Сам термин «сбалансированная оптимальная траектория» (*Balanced Growth Path, BGP – траектория*) носит достаточно условный характер. Фактически речь идет о траекториях, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности и таким, что темпы роста всех или нескольких переменных вдоль таких траекторий постоянны. Как отметил Р. Лукас, вообще говоря, не очень ясно, что «сбалансировано» вдоль таких траекторий, «но поскольку мы нуждаемся в некотором термине для обозначения решений со свойством постоянного темпа роста, то этот термин столь же хорош как любой другой» (см. [9], Р. 26).

Напомним, что для функции $z(t)$ дискретного аргумента t темпом роста называется величина $\omega_z(t) = \frac{z(t+1)}{z(t)}$. Таким образом, сбалансированной траекторией системы (2.4) – (2.7) является траектория, для которой темпы роста ω_k , ω_h , ω_c и ω_u постоянны.

3. Существование сбалансированных траекторий

Сформулируем сначала некоторое «условное» утверждение о существовании сбалансированных траекторий.

Т е о р е м а 3.1. *Если система уравнений (2.4)–(2.7) имеет BGP – траектории, то на BGP – траекториях справедливы следующие утверждения:*

1*. Для переменных $(k_t, h_t, c_t, u_t) \in \mathbb{R}_{++}^4$ имеют место «законы сохранения»:

$$u_t = \text{const}, \quad k_t^{\beta-1} h_t^{1-\beta+\gamma} = \text{const}, \quad \frac{c_t}{k_t} = \text{const}. \quad (3.1)$$

2*. Для темпов роста переменных $(k_t, h_t, c_t, u_t) \in \mathbb{R}_{++}^4$ имеют место равенства:

$$\omega_u = 1, \quad \omega_k = \omega_c, \quad \omega_k^{1-\beta} = \omega_h^{1-\beta+\gamma}, \quad (3.2)$$

$$\omega_h^{\frac{\gamma(1-\sigma)}{1-\beta} - \sigma} = \frac{1}{\rho[(1-\delta_h) + \delta]}. \quad (3.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть $\omega_h = \text{const}$. Тогда из уравнения (2.5) следует равенство $\frac{h_{t+1}}{h_t} = \delta(1-u_t) + (1-\delta_h) = \text{const}$, из которого вытекает, что $u_t = \text{const}$ и, значит, $\omega_u = 1$. Далее, если $\omega_c = \text{const}$, то в силу равенства $u_t = \text{const}$ и уравнения (2.6) имеет место соотношение

$$k_t^{\beta-1} h_t^{1-\beta+\gamma} = M = \text{const} > 0. \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что $\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)^{\beta-1} \left(\frac{h_{t+1}}{h_t}\right)^{1-\beta+\gamma} = \frac{M}{M} = 1$, так что $\omega_k^{1-\beta} = \omega_h^{1-\beta+\gamma}$. Из уравнения (2.4) имеем:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = A k_t^\beta u_t^{\beta-1} h_t^{1-\beta+\gamma} - \frac{c_t}{k_t} + (1-\delta_k) = \text{const}. \quad (3.5)$$

В силу условий $u_t = \text{const}$, $\omega_k = \text{const}$ и равенства (3.4) из уравнения (3.5) следует соотношение $\frac{c_t}{k_t} = \text{const}$, из которого, в свою очередь, следует равенство $\omega_k = \omega_c$. Таким образом, соотношения (3.1) и (3.2) обоснованы. Равенство (3.3) следует из уравнения (2.7) и соотношений (3.1) и (3.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

«Интегралы движения» (3.1) позволяют провести замену переменных в системе уравнений (2.4)–(2.7). Введем новые переменные $q_t = \frac{c_t}{k_t}$ и $x_t = \frac{k_t}{(h_t)^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}}}$. Переход от переменных (k, h, c, u) к переменным (x, q, c, u) позволяет привести систему уравнений (2.4)–(2.7) к виду:

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} - q_t + (1 - \delta_k)}{[\delta(1 - u_t) + (1 - \delta_h)]^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}}}, \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{q_{t+1}}{q_t}\right)^\sigma = \frac{\rho [\beta Ax_{t+1}^{\beta-1}u_{t+1}^{1-\beta} + (1 - \delta_k)]}{[Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} - q_t + (1 - \delta_k)]^\sigma}, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{u_{t+1}}{u_t}\right)^\beta = \frac{[Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} - q_t + (1 - \delta_k)]^\beta [\delta(1 - u_t) + (1 - \delta_h)]^{\gamma-\beta}}{[\beta Ax_{t+1}^{\beta-1}u_{t+1}^{1-\beta} + (1 - \delta_k)]} [(1 - \delta_h) + \delta]. \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{c_t}{c_{t-1}}\right)^\sigma = \rho [\beta Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} + (1 - \delta_k)], \quad (3.9)$$

Система уравнений (3.6) – (3.9) обладает специфической структурой – уравнения (3.6) – (3.8) образуют замкнутую подсистему. Их решение позволяет однозначно определить решение уравнения (3.9). Таким образом, произведенная замена переменных позволила «понизить порядок» исследуемой системы уравнений.

Заметим, что в силу (3.1) и (3.2) справедливы равенства

$$\omega_q = 1, \quad \omega_x = 1, \quad \omega_u = 1, \quad (3.10)$$

означающие, что первые три координаты сбалансированных траекторий образуют стационарные (неподвижные) точки системы (3.6) – (3.8).

Таким образом, исследование динамики исходной математической модели и вопросов существования ВГР – траекторий тесно связано с изучением системы трех разностных уравнений (3.6) – (3.8). При этом важную роль играет определение количества и свойств стационарных (неподвижных) точек системы (3.6) – (3.8).

Обозначим стационарные значения переменных, фигурирующих в системе (3.6) – (3.8), (x, q, u) . Используя для преобразования системы (3.6) – (3.8) условие (3.10), получим соответствующую «стационарную» систему уравнений для определения переменных (x, q, u) (координат неподвижных точек системы (3.6) – (3.8)). Введем в рассмотрение величину $U = Ax^{\beta-1}u^{1-\beta}$. Проводя несложные алгебраические выкладки нетрудно показать, что стационарная система уравнений может быть записана в виде:

$$[\delta(1 - u) + (1 - \delta_h)]^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}} = U - q + (1 - \delta_k), \quad (3.11)$$

$$[U - q + (1 - \delta_k)]^\sigma = \rho [\beta U + (1 - \delta_k)], \quad (3.12)$$

$$\beta U + (1 - \delta_k) = [U - q + (1 - \delta_k)]^\beta [\delta(1 - u) + (1 - \delta_h)]^{\gamma-\beta} [(1 - \delta_h) + \delta]. \quad (3.13)$$

Возведя обе части уравнения (3.11) в степень σ , сложим его почленно с уравнением (3.12). Получим:

$$[\delta(1 - u) + (1 - \delta_h)]^{\frac{\sigma(1-\beta+\gamma)}{1-\beta}} = \rho [\beta U + (1 - \delta_k)]. \quad (3.14)$$

Возведем теперь обе части уравнения (3.11) в степень β и разделим на него почленно уравнение (3.13). При этом получим:

$$\frac{\beta U + (1 - \delta_k)}{[\delta(1 - u) + (1 - \delta_h)]^{\frac{\beta(1-\beta+\gamma)}{1-\beta}}} = [(1 - \delta_h) + \delta] [\delta(1 - u) + (1 - \delta_h)]^{\gamma-\beta} \quad (3.15)$$

Перемножим почленно уравнения (3.14) и (3.15) и получим уравнение относительно единственной переменной u :

$$[\delta(1-u) + (1-\delta_h)]^D = \rho[(1-\delta_h) + \delta], \quad D = \frac{\sigma(1-\beta) + \gamma(\sigma-1)}{1-\beta}. \quad (3.16)$$

Из (3.16) вытекает, что «стационарное» значение переменной $u \equiv u_{BGP}$ задается следующей формулой:

$$u_{BGP} = \frac{\Delta - [\rho\Delta]^{\frac{1}{D}}}{\delta}, \quad \Delta \equiv (1-\delta_h) + \delta. \quad (3.17)$$

Ясно, что проведенные выше выкладки имеют место лишь при условии $J \equiv [U - q + (1-\delta_k)] \neq 0$. Однако легко показать, опираясь на справедливое на BGP – траектории соотношение (3.11), что для всех допустимых значений переменных $x, q \in \mathbb{R}_{++}$, $u \in [0, 1]$ имеет место неравенство $J > 0$.

Используя теперь представление (3.17) и уравнения (3.12) и (3.13), нетрудно получить явные формулы и для стационарных значений переменных $x \equiv x_{BGP}$ и $q \equiv q_{BGP}$. Эти формулы достаточно элементарны, но весьма громоздки и поэтому не приводятся. Однако из них, а также из соотношения (3.17) можно получить ряд весьма полезных выводов о тех ограничениях на параметры системы, при которых существуют реализуемые (имеющие экономический смысл) BGP – траектории.

Например, поскольку u_t и u_{BGP} характеризуют долю времени, затрачиваемую ЭА на производственную деятельность, то, в силу экономического смысла этих величин, должно быть справедливо включение $u_t, u_{BGP} \in (0, 1)$.

Следующее утверждение отвечает на вопрос, при каких условиях на параметры системы это возможно.

Т е о р е м а 3.2. Пусть имеет место одна из следующих систем неравенств:

$$1^*. \quad D > 0, \quad \frac{(1-\delta_h)^D}{(1-\delta_h) + \delta} < \rho < ((1-\delta_h) + \delta)^{D-1}. \quad (3.18)$$

$$2^*. \quad D > 0, \quad ((1-\delta_h) + \delta)^{D-1} < \rho < (1-\delta_h)^D((1-\delta_h) + \delta)^{-1}. \quad (3.19)$$

Тогда справедливо включение $u_{BGP} \in (0, 1)$.

Поясним соотношения (3.18) и (3.19). Рассмотрим неравенства 1^* . Неравенство $u = u_{BGP} > 0$ в силу представления (3.17) и условия $D > 0$ влечет за собой неравенство $\Delta^{D-1} > \rho$; аналогично, неравенство $u = u_{BGP} < 1$ в сочетании с представлением (3.17) и условием $D > 0$ влечет за собой неравенство $(\Delta - \delta)^D < \rho\Delta$. Сходные рассуждения позволяют обосновать и неравенства 2^* .

Для переменных x_{BGP} и q_{BGP} имеют место похожие утверждения.

Обозначим вектор параметров системы (2.1) – (2.3) $\theta \equiv \text{col}\{A, \delta, \gamma, \beta, \rho, \delta_k, \delta_h, \sigma\} \in \Theta$, $\Theta \equiv \mathbb{R}_{++}^3 \times [0, 1]^4 \times \Sigma$, $\Sigma = (0, 1) \cup (1, \infty)$. Из теоремы 3.2. и аналогичных ей утверждений для переменных x_{BGP} и q_{BGP} следует, что в пространстве параметров Θ системы (3.6) – (3.8) можно выделить непустую область Θ_{BGP} , для которой существуют BGP – траектории. Более того, из проведенных выше рассуждений следует также, что имеет место

Т е о р е м а 3.3. Система (2.4)-(2.7) имеет единственную реализуемую траекторию сбалансированного роста.

4. Заключение

Понятно, что значительный интерес представляет вопрос о типе неподвижной точки системы (3.6) – (3.8) и, соответственно, поведении системы (2.4) – (2.7) в окрестности найденной BGP – траектории. Большой интерес представляет также поведение системы в окрестности начала координат и границ множества $\mathbb{R}_+^3$. Этим вопросам будет посвящена отдельная работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arrow K.J., “The Economic Implications of Learning by Doing”, *Review of Economic Studies*, **29**:1 (1962), 155 – 173.
2. Barro R., Sala-i-Martin X., *Economic Growth. 2-nd Edition*, Cambridge, Massachusetts – London, England: MIT Press., 2004, 654 pp.
3. Bethmann D., “A Closed-form Solution of the Uzawa – Lucas Model of Endogenous Growth”, *Journal of Economics*, **90**:1 (2007), 87–107.
4. Chow G.C., *Dynamic Economics: Optimization by Lagrange Method*, Oxford: Oxford University Press., 1997, 234 pp.
5. de la Croix D., Michel P., *A Theory of Economic Growth. Dynamic and Policy in Overlapping Generations*, Cambridge: Cambridge University Press., 2004, 378 pp.
6. Gomes O., “Decentralized allocation of human capital and nonlinear growth”, *Computing Economics*, **31** (2008), 45–75.
7. Gourdel P., Ngoc L.H., Le Van C., Mazamba T., “Equilibrium and Competitive Equilibrium in a Discrete-Time Lucas Model”, *Journal of Difference Equations and Applications*, **10**:5 (2004), 501–514.
8. Hiraguchi R., “A two sector endogenous growth model with habit formation”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **35**:3 (2011), 430–441.
9. Lucas R.E., “On the mechanics of economic development”, *Journal of Monetary Economics*, **22**:1 (1988), 3–42.
10. Robinson C., *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos.*, CRC Press LLC., 1999, 506 pp.
11. Stokey N.L., Lucas R.E., Jr., Prescott E.C., *Recursive Methods in Economic Dynamics. Seventh printing.*, Cambridge, Massachusetts – London, England: Harvard University Press., 2004, 588 pp.
12. Uzawa H., “Optimal technical change in an aggregate model of economic growth”, *International Economic Review*, **6** (1965), 213–217.
13. Круглов Е.В., “О некоторых моделях циклов деловой активности”, *Экономический анализ: теория и практика*, 2011, № 8(215), 44 – 50.

14. Кузнецов Ю.А., *Оптимальное управление экономическими системами*, Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета., 2008, 449 с.
15. Кузнецов Ю.А., “Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты. I”, *Экономический анализ: теория и практика*, 2011, № 17(224), 50 – 61.
16. Кузнецов Ю.А., “Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты. II”, *Экономический анализ: теория и практика*, 2011, № 18(225), 42 – 57.
17. Кузнецов Ю.А., “Человеческий капитал, производительность труда и экономический рост. I”, *Экономический анализ: теория и практика*, 2012, № 43 (298), 2 – 17.
18. Кузнецов Ю.А., “Человеческий капитал, производительность труда и экономический рост. II”, *Экономический анализ: теория и практика*, 2012, № 44(299), 2 – 14.
19. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В., “Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала”, *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2012, № 4, 46 – 57.
20. Шараев Ю.В., *Теория экономического роста*, М.: Издательство ГУ ВШЭ., 2006, 254 с.

Mathematical model of economic growth based on the accumulation of human capital with discrete time

© Yu. A. Kuznetsov⁴, E. V. Kruglov⁵, D. A. Burlakova⁶

Abstract. The mathematical model of economic growth taking in account the process of the human capital accumulation and with discrete time is considered. This mathematical model is reduced to the study of three-dimensional dynamical system with discrete time. The conditions of existence of a unique balanced growth path are determined.

Key Words: model of economic growth based on human capital, three-dimensional dynamical systems with discrete-time, balanced growth path

⁴ Head of Mathematical Modelling of Economic Processes department, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; Yu-Kuzn@mm.unn.ru.

⁵ Associated Professor of Mathematical Modelling of Economic Processes department, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; kruglov19@mail.ru.

⁶ Postgraduate student, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; groha@yandex.ru.

УДК 512.917+513.9

Аппроксимация максимальных мер для счетных топологических марковских цепей с мероморфной дзета-функцией

© М. И. Малкин¹

Аннотация. Рассматриваются счетные топологические марковские цепи (ТМЦ). Предполагается, что степени матрицы переходов ТМЦ имеют конечные следы и, следовательно, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура. Предполагается также, что выполнены два условия: 1) радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, больше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ с матрицей переходов A , и 2) дзета-функция ТМЦ мероморфна в некотором диске радиуса, большего $r(A)$. Данные условия выполняются, в частности, для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией. В работе показано, что при данных условиях неразложимая ТМЦ имеет единственную меру максимальной энтропии, причем эта мера аппроксимируется (в слабой топологии) мерами максимальной энтропии, сосредоточенными на конечных ТМЦ – подсистемах исходной системы.

Ключевые слова: топологические марковские цепи, топологическая энтропия, динамическая дзета-функция, максимальные меры

1. Введение

Данная статья продолжает исследования автора (см. [8], [9]) по вопросам динамических и эргодических свойств счетных топологических марковских цепей. Топологические марковские цепи могут служить символическими моделями для различных классов динамических систем с гиперболической структурой, включая неравномерно гиперболические и частично гиперболические системы, в случае, когда фазовое пространство таких систем допускает марковское разбиение (возможно, счётное). К таким классам относятся системы, удовлетворяющие аксиоме A , гиперболические бильярды, геометрические модели аттрактора Лоренца, одномерные кусочно-монотонные отображения с положительной топологической энтропией и др. (см. [1], [3], [4], [11], [2], [6]). Ф. Хофбауэр показал (см. [5]), что для кусочно-монотонного, кусочно-непрерывного отображения f интервала I с положительной топологической энтропией можно построить конечную или счётную ТМЦ (Ω_A, σ) с матрицей переходов A , такую, что $f: I \rightarrow I$ топологически сопряжено с отображением сдвига $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$. Тем самым, изучение топологических и эргодических свойств одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией сводится к рассмотрению счётных топологических марковских цепей.

В отличие от конечных топологических марковских цепей, фазовое пространство счетной ТМЦ некомпактно и поэтому возникают проблемы при обобщении результатов теории конечных марковских цепей — теории Перрона-Фробениуса. Для неразложимой бесконечной матрицей переходов A соответствующая ТМЦ топологически транзитивна, и в этом случае, как следует из работ Д. Вер-Джонса и Б.М. Гуревича (см. [16], [14], [15]), результаты теории Перрона-Фробениуса частично обобщаются. Однако для ТМЦ с бесконечной матрицей переходов, даже в случае её неразложимости, некоторые важные эргодические

¹ Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@unn.ru

свойства, известные для конечных ТМЦ, могут не выполняться. Б.М. Гуревич показал, что свойством бесконечной матрицы, отвечающим за существование меры с максимальной энтропией, является R -положительность матрицы переходов, где R — параметр сходимости матрицы, совпадающий (см. [15], [8]) с радиусом сходимости $r(A)$ дзета-функции и со значением $\exp(-h_{\text{top}}(A))$, где $h_{\text{top}}(A)$ — топологическая энтропия ТМЦ. В статье автора [9] доказано, что это важное свойство R -положительности имеет место для неразложимых ТМЦ, у которых дзета-функция обладает естественными свойствами (см. свойства (*) и (**)) ниже). Тем самым, в силу этого результата и результатов Гуревича, при указанных условиях ТМЦ обладает единственной мерой с максимальной энтропией. В данной статье при этих же условиях мы доказываем аппроксимационные свойства меры с максимальной энтропией, а именно, будет доказано, что эта мера аппроксимируется (в слабой топологии) мерами максимальной энтропии, сосредоточенными на конечных ТМЦ — подсистемах исходной системы. Этот результат имеет значение с вычислительной точки зрения, поскольку для конечных ТМЦ имеются алгоритмы вычисления максимальных мер по собственным значениям и собственным векторам соответствующих матриц.

Перейдем к формулировке указанных условий на класс матриц, определяющих счетные ТМЦ. Рассматриваются счетные ТМЦ с неразложимыми матрицами переходов A . Условия, накладываемые на A , следующие. Предполагается, что любая степень матрицы переходов имеет конечный след, т.е. для любого k $N_k(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i}^{(k)} < \infty$. Легко видеть, что $N_k(A)$ равно числу неподвижных точек отображения $\sigma^k|_{\Omega_A}$. Тем самым, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура $\zeta_A(z)$:

$$\zeta_A(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k(A)z^k}{k}\right). \quad (1.1)$$

Кроме того, предполагается, что радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, больше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ; точнее, предполагается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(\hat{A}|_n) > r(A), \quad (*)$$

где $\hat{A}|_n$ — это подматрица матрицы A , у которой (бесконечное) индексное множество есть $\{n, n+1, \dots\}$. Данное условие означает, что "хвостовая" подматрица матрицы переходов становится всё более разреженной, когда индексы принимают достаточно большие значения. Второе условие, которое мы будем предполагать выполненным, состоит в следующем:

$$\zeta_{\hat{A}|_n}(z) \text{ мероморфна в диске } |z| < r(A) + \varepsilon_0 \text{ для некоторого } \varepsilon_0 > 0 \text{ при всех } n \quad (**)$$

Отметим, что указанные условия являются естественными, т.к. они выполняются для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией. Более того, для таких отображений условие (**) на самом деле выполняется в более сильной форме (см. [5]), а именно, можно показать мероморфность указанных дзета-функций в открытом единичном диске. В настоящей работе показано, что при данных условиях меры с максимальной энтропией ν_n , соответствующие ТМЦ с подматрицами $A|_n$ с индексным множеством $\{1, 2, \dots, n\}$, сходятся в слабой топологии при $n \rightarrow \infty$ к единственной мере с максимальной энтропией μ^* ТМЦ (Ω_A, σ) . Тем самым, мероморфность дзета-функции гарантирует возможность существенного продвижения в теории Перрона-Фробениуса в случае бесконечных матриц.

2. Предварительные сведения и результаты

Приведем необходимые для дальнейшего определения и результаты из [8], [9]. Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ из нулей и единиц. Данной матрице следующим образом ставится в соответствие счетная топологическая марковская цепь (ТМЦ). Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество символов (алфавит) и пусть $\Omega_A \subset \mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ — множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей $\underline{x} = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ натуральных чисел, для которых при всех $n \in \mathbf{Z}$ выполняется

$$a_{x_n, x_{n+1}} = 1.$$

Метрика ρ на пространстве Ω_A вводится так:

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right|. \quad (2.1)$$

ТМЦ (Ω_A, σ) есть топологическое (метрическое) пространство Ω_A , на котором действует отображение сдвига $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$, задаваемое формулой $\sigma(\underline{x}) = \underline{y}$, где $y_n = x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, метрика ρ согласована с топологией прямого (тихоновского) произведения на пространстве $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$; здесь предполагается, что множество $\mathbf{N}$ наделено дискретной топологией.

Таким образом, пространство Ω_A некомпактно. Чтобы компактифицировать Ω_A , рассмотрим расширенный алфавит с дополнительным символом ∞ , т.е. $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Метрика на $\bar{\mathbf{N}}$ задается по формуле $d(n, m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$, где естественно предполагается, что $\frac{1}{\infty} = 0$. Далее рассматривается замыкание пространства Ω_A в $\bar{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$, т.е. $\bar{\Omega}_A = \text{Clos}(\Omega_A)$. Легко видеть, что на пространство $\bar{\Omega}_A$ корректно продолжается метрика ρ , задаваемая формулой (1), и, кроме того, $\bar{\Omega}_A$ является σ -инвариантным.

Мы всюду без ограничения общности предполагаем, что A — бесконечная матрица из нулей и единиц, не имеющая ни нулевых строк, ни нулевых столбцов (иначе соответствующий символ следует исключить из алфавита). Далее, мы предполагаем, что для матрицы A определены (конечны) все положительные степени, т.е. A^k , i.e. $a_{i,j}^{(k)} < +\infty$ при любых i, j, k . Для $I \subset \mathbf{N}$ мы обозначаем через $A|_I$ подматрицу матрицы A с индексным множеством I . Для простоты записи мы обозначаем через $A|_n$ конечную подматрицу $A|_{\{1, 2, \dots, n\}}$, а через $\hat{A}|_k$ — бесконечную подматрицу $A|_{\{k, k+1, \dots\}}$.

Матрица A называется неразложимой, если для любых $i, j \in \mathbf{N}$ найдется натуральное число k такое, что $a_{i,j}^{(k)} > 0$. В противном случае матрица A разложима. Точно так же, как и в случае конечных ТМЦ (см., например, [12]), доказывается, что неразложимость матрицы A эквивалентна транзитивности системы (Ω_A, σ) . Для неразложимой матрицы A обозначим через $d = d(A)$ её индекс цикличности (период). В случае $d > 1$ множество индексов $\mathbf{N}$ можно разбить на d подмножеств $I_1, I_2, \dots, I_d$ так, что для любых двух индексов $i \in I_s, j \in I_t$ будет существовать $k > 0$, удовлетворяющее условию $a_{i,j}^{(k)} > 0$, в том и только в том случае, когда $k \equiv (s - t) \bmod d$.

Пусть $h(A)$ — топологическая энтропия сдвига σ на компактификации $\bar{\Omega}_A$. Для конечной матрицы B обозначим через $h(B)$ топологическую энтропию ограничения $h(\sigma|_{\Omega_B})$. Б.М. Гуревич показал (см. [14], [15]), что для неразложимой матрицы A существует последовательность конечных неразложимых подматриц $A|_{J_n}$, такая, что

$$J_n \subset J_{n+1} \text{ для всех } n, \bigcup J_n = \mathbf{N} \quad (2.2)$$

и выполняется

$$h(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A|_{J_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A|_n). \quad (2.3)$$

В работе [7] доказано, что равенство $h(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A|_n)$ справедливо и для разложимых матриц. Для разложимой матрицы A и индекса $i \in \mathbf{N}$ обозначим через $I(i)$ максимальное подмножество (возможно, пустое) $J \subset \mathbf{N}$ такое, что $i \in J$ и матрица $A|_J$ неразложима, т.е.

$$I(i) = \{j \in \mathbf{N} : \exists k_1 > 0, \exists k_2 > 0 \text{ т.ч. } a_{ij}^{(k_1)} > 0, a_{ji}^{(k_2)} > 0\}.$$

Обозначим для простоты матрицу $A|_{I(i)}$ через A_i . Заметим, что если множество $I(i)$ конечно, то $\overline{\Omega}_{A_i} = \Omega_{A_i}$, где запись $\overline{\Omega}_{A_i}$ означает замыкание множества Ω_{A_i} в пространстве $\overline{\Omega}_A$.

В работе [7] показано также, что неблуждающее множества компактификации $(\overline{\Omega}_A, \sigma)$ имеет следующее разложение (в формулировке использовано обозначение $(\infty) = (\dots \infty \infty \infty \dots) \in \overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$):

Т е о р е м а 2.1. *Неблуждающее множество отображения сдвига σ на компактификации $\overline{\Omega}_A$ представляется в виде*

$$NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) = (\bigcup \overline{\Omega}_{A_i}) \bigcup P,$$

где $P = (\infty)$, когда индексное множество $I(i)$ конечно для всех i , и $P = \emptyset$ в противном случае.

Нам потребуются некоторые соотношения для производящих функций, ассоциированных с матрицей A . Для произвольных индексов i, j эти функции определяются следующим образом):

$$T_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k; \quad F_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} z^k; \quad L_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{i,j}^{(k)} z^k \quad (2.4)$$

где $a_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}$; $f_{i,j}^{(0)} = l_{i,j}^{(0)} = 0$; $a_{i,j}^{(1)} = f_{i,j}^{(1)} = l_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}$

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_n a_{i,n}^{(k)} a_{n,j}; \quad f_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n \neq j} a_{i,n} f_{n,j}^{(k)}; \quad l_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n \neq i} l_{i,n}^{(k)} a_{n,j}$$

Справедливы соотношения (см. [16]):

$$T_{i,i}(z) = 1/(1 - F_{i,i}(z)) = 1/(1 - L_{i,i}(z)) \quad (2.5)$$

$$T_{i,j}(z) = T_{i,i}(z) \cdot L_{i,j}(z) = F_{i,j}(z) \cdot T_{j,j}(z), \quad (i \neq j) \quad (2.6)$$

$$F_{i,j}(z) = z a_{i,j} (1 - F_{j,j}(z)) + z \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} F_{k,j}(z); \quad L_{i,j}(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) a_{k,j} + z a_{i,j} (1 - L_{i,i}(z)) \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) F_{k,i}(z) = z \frac{dF_{ii}(z)}{dz} - F_{ii}(z) \cdot (1 - F_{ii}(z)) \quad (2.8)$$

Мы будем также обозначать данные функции $T_{i,j}(A, z), F_{i,j}(A, z), L_{i,j}(A, z)$, когда требуется подчеркнуть зависимость от A . Напомним некоторые свойства неразложимых матриц (см. [16]). Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ существует предел $\lim (a_{i,j}^{(k)})^{-1/k}$, когда $k \rightarrow \infty$, находясь в таком подмножестве индексов I_m , для которого не все степени $a_{i,j}^{(k)}$ равны нулю.

Этот предел, скажем, R , не зависит от i, j и, кроме того, он равен радиусу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k$. Число $R = R(A)$ называется *параметром сходимости* матрицы A .

Неразложимая матрица A с параметром сходимости R называется *R -рекуррентной*, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} R^k$ расходится, т.е. $T_{i,j}(R) = \infty$. Если, кроме того, $a_{i,j}^{(k)} R^k$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то A называется *R -положительной* (и это определение корректно, т.к. не зависит от i, j в силу неразложимости матрицы A).

Пусть $r(A)$ — радиус сходимости дзета-функции, т.е. $r(A) = (\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{N_k(A)})^{-1}$. Имеют место следующие свойства.

Л е м м а 2.1. [8] *Если A — неразложимая бесконечная матрица, то $r(A) \leq R(A) < 1$.*

Обобщением на разложимые матрицы является следующая лемма.

Л е м м а 2.2. [8] *Для бесконечной матрицы A выполняется*

$$r(A) \leq \exp(-h(A)). \quad (2.9)$$

Л е м м а 2.3. [8] *Последовательность дзета-функций $\zeta_{A|n}(z)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к $\zeta_A(z)$ равномерно в любом диске $|z| \leq r_0 < r(A)$.*

Обозначим через $R_{i,j} = R_{i,j}(A)$ радиус сходимости ряда $T_{i,j}(z)$ (здесь в случае разложимой матрицы A параметр сходимости R_{ij} может зависеть от i, j).

Л е м м а 2.4. [8] *Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ последовательность $T_{i,j}(A|n, z)$ сходится равномерно к $T_{i,j}(z)$ в любом замкнутом диске $|z| \leq R_0$, where $R_0 < R_{i,j}$.*

Для произвольной матрицы B (над $\mathbf{C}$) обозначим через $B_{i,j}^*$ подматрицу, которая получается из B удалением i -ой строки и j -го столбца. Аналогично, для подмножеств $I, J \subset \mathbf{N}$ пусть $B_{I,J}^*$ обозначает матрицу, которая получается из B удалением строк и столбцов с индексами, принадлежащими I и J соответственно. Из этих определений нетрудно получить соотношение:

$$\zeta_A(z) = \zeta_{A_{i,i}^*}(z) \cdot T_{ii}(z). \quad (2.10)$$

Теперь рассмотрим бесконечные подматрицы $\hat{A}|_n = A|_{\{n, n+1, \dots\}}$. Очевидно, что $r(\hat{A}|_n) \leq r(\hat{A}|_{n+1})$ при всех n . Мы будем использовать естественное ограничение на матрицу A , определяемое условием:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(\hat{A}|_n) > r(A). \quad (*)$$

Основная теорема о совпадении инвариантов энтропийного типа для счетных ТМЦ с матрицей переходов, удовлетворяющей условию $(*)$, состоит в следующем:

Т е о р е м а 2.2. [8] *Если матрица переходов A удовлетворяет условию $(*)$, то*

$$r(A) = \exp(-h(A)) = \lim_{n \rightarrow \infty} r(A|_n) = \inf_j R_{j,j}(A) = \inf_i R(A_i) = \inf_i r(A_i),$$

и более того, все нижние грани в указанных соотношениях достигаются.

Теперь будем предполагать, что выполнено и второе условие — условие $(**)$

$$\zeta_{\hat{A}|_n}(z) \text{ мероморфна в диске } |z| < r(A) + \varepsilon \text{ для некоторого } \varepsilon > 0 \text{ при всех } n \quad (**)$$

Будем говорить, что бесконечная матрица B (над $\mathbf{C}$) имеет сходящийся определитель, если последовательность определителей $\det B|_n$ сходится.

Л е м м а 2.5. ([8]) Для любой точки z_0 из открытого круга сходимости ряда ζ_A матрица $E - z_0 A$ имеет сходящийся определитель (здесь E — единичная матрица); более того, выполняется

$$\det(E - z_0 A) = \frac{1}{\zeta_A(z_0)} \quad (2.11)$$

Л е м м а 2.6. ([8]) Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ и любой точки z_0 из диска $|z| \leq \min(R_{j,i}(A), r(A))$ матрица $(E - zA)_{i,j}^*$ имеет сходящийся определитель. Более того, выполняется

$$\det(E - zA)_{i,j}^* = (-1)^{i+j} T_{j,i}(z) \det(E - zA). \quad (2.12)$$

Используя следующие обозначения

$$\Delta_{i,j}(z) = (-1)^{i+j} \det(E - zA)_{i,j}^*; \quad \Delta(z) = \det(E - zA)$$

можно записать соотношение последней леммы в виде

$$\Delta_{i,j}(z) = T_{j,i}(z) \cdot \Delta(z). \quad (2.13)$$

Т е о р е м а 2.3. ([9]) Пусть A — неразложимая матрица периода d с параметром сходимости R и пусть для A выполняются условия $(*)$ и $(**)$. Тогда

- i) A является R -положительной матрицей;
- ii) дзета-функция $\zeta_A(z)$ имеет ровно d полюсов на окружности $|z| = R$, а именно, $z_j = R \exp(2\pi i j / d)$, $j = 0, 1, \dots, d-1$, и все эти полюса простые.

3. Аппроксимация максимальных мер

Таким образом, в силу теоремы 2.3. мы имеем неразложимую ТМЦ с R -положительной матрицей A , и поэтому, как следует из результатов Б.М. Гуревича, данная ТМЦ (Ω_A, σ) обладает единственной мерой μ^* с максимальной энтропией. Нам потребуются следующие леммы о свойствах производящих функций $F_{i,j}(z)$ и $L_{i,j}(z)$.

Л е м м а 3.1. Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то

- i) радиус R_1 сходимости ряда $F_{1,1}(z)$ больше, чем R ;
- ii) при любом $k \in \mathbf{N}$ ряды $F_{k,1}(z)$ и $L_{1,k}(z)$ сходятся в открытом диске $|z| < R_1$;
- iii) функция $\sum_{k=0}^{\infty} F_{k,1}(z) L_{1,k}(z)$ голоморфна в диске $|z| < R_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из доказательства теоремы 2.3. (см. [9]), функция $T_{1,1}(z)$ мероморфна в диске $|z| < r(A) + \varepsilon_0$, а значит, в этом диске мероморфна и функция $F_{1,1}(z) = 1 - (T_{1,1}(z))^{-1}$. Отсюда следует, что $F_{1,1}(z)$ не имеет полюсов на окружности $\text{circle } |z| = R$. Таким образом, первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Для этого рассмотрим тождество (2.7) при $i = j = 1$ для вещественных значений $z \in (0, R)$. Тогда для ненулевых элементов $a_{1,k_0} \neq 0$ будем иметь $F_{k_0,1}(z) \neq \infty$ и далее применим (2.7) при $i = k_0, j = 1$. Если $a_{k_0,k_1} \neq 0$, то $F_{k_1,1}(z) \neq \infty$ при всех $z \in (0, R_1)$. По индукции получаем, учитывая неразложимость матрицы A , что значение $F_{k,1}(z)$ конечно при всех $k \in \mathbf{N}, z \in (0, R_1)$. Поскольку все

коэффициенты степенного ряда $F_{k,1}(z)$ неотрицательны, второе утверждение леммы относительно $F_{k,1}(z)$ доказано. Аналогичный результат справедлив относительно $L_{1,k}(z)$ в силу второго соотношения в тождестве (2.7).

Третье утверждение леммы следует из второго утверждения и соотношения (2.8) при $i = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

З а м е ч а н и е 3.1. Аналогичные утверждения справедливы, если зафиксировать $m_0 \in \mathbf{N}$ и заменить $F_{k,1}(z)$ и $L_{1,k}(z)$ на $F_{k,m_0}(z)$ и $L_{m_0,k}$, соответственно.

Л е м м а 3.2. Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{j,i}(A|_n, z) = F_{j,i}(A, z) \quad (3.1)$$

при всех $i, j \in \mathbf{N}$ и всех значениях z в диске $|z| < R_i$, где $R_i > R$ — радиус сходимости ряда $F_{i,i}(A, z)$; более того, сходимость данного ряда равномерная на любом компактном подмножестве этого диска.

Результат данной леммы следует из леммы 8 работы [8] (так как коэффициенты ряда $F_{j,i}(A|_n, z)$ стабилизируются и становятся равными коэффициентам ряда $F_{j,i}(A, z)$).

Л е м м а 3.3. Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{i,j}(A|_n, z) = \Delta_{i,j}(A, z) \quad (3.2)$$

для всех $i, j \in \mathbf{N}$ и всех значений z в диске $|z| < R'_i$, где $R'_i = \min(r(A_{i,i}^*), R_i) > R$, а R_i — радиус сходимости ряда $F_{ii}(A, z)$; более того, сходимость данного ряда равномерная на любом компактном подмножестве этого диска.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $i = j$ результат следует из леммы 2.5. в применении к матрице A_{ii}^* . В этом случае $\Delta_{i,i}(A, z) = 1/\zeta_{A_{ii}^*}(z)$ и требуемое равенство выполняется для всех z из диска $|z| < r(A_{ii}^*)$ (заметим, что его радиус больше, чем R).

При $i \neq j$ из (2.6) и (2.13) получаем

$$\Delta_{i,j}(z) = \Delta_{i,i}(z) \cdot F_{j,i}(z) \quad (3.3)$$

В применении к матрице A , из равенства 3.3 следует сходимость ряда $\Delta_{i,j}(A, z)$ в диске $|z| < R'_i$, так как правая часть 3.3 в силу доказанного, представляет собой ряд, сходящийся в этом диске. В применении к матрице $A|_n, n \rightarrow \infty$, равенство (3.3) доказывает лемму.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Л е м м а 3.4. Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то

i) для достаточно больших n у матрицы $A|_n$ максимальное собственное значение равно $1/r(A|_n)$, причем это собственное значение простое;

ii) компоненты левого и правого собственных векторов $\bar{\alpha}^{(n)} = (\alpha_i^{(n)})_{i=1}^n, \bar{\beta}^{(n)} = (\beta_i^{(n)})_{i=1}^n$, соответствующих собственному значению $1/r(A|_n)$ of $A|_n$ и нормированных согласно равенству $\alpha_1^{(n)} = \beta_1^{(n)} = 1$, при $n \rightarrow \infty$ сходятся к компонентам левого и правого собственных векторов, соответствующим собственному значению $1/R$ матрицы A .

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы Фробениуса-Перрона и результата работы [7] для нетранзитивных ТМЦ.

Пусть $\bar{\beta} = (F_{i,1}(A, R))_{i=1}^{\infty}$. В силу рекуррентности матрицы A имеем, что $\bar{\beta}$ — ее правый собственный вектор, соответствующий собственному значению $1/R$ (см. равенство (2.7)). Покажем, что $\bar{\beta}^{(n)} \rightarrow \bar{\beta}$ при $n \rightarrow \infty$.

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{1,1}(A|_n, r(A|_n)) = \Delta_{1,1}(A, R) = \frac{1}{\zeta_{A_{1,1}^*}(R)} > 0$$

(здесь мы пользуемся доказанной ранее равномерной сходимостью и тем фактом, что $r(A|_n) \rightarrow R$). Далее, заметим, что для любой конечной $n \times n$ матрицы B , имеющей собственное значение $\lambda \neq 0$, такое, что $\Delta_{1,1}(B, \frac{1}{\lambda}) \neq 0$, вектор $\Delta_{1,i}(B, \frac{1}{\lambda})_{i=1}^n$ является собственным. Поэтому для достаточно больших n вектор $\Delta_{1,i}(A|_n, r(A|_n))_{i=1}^n$ — правый собственный вектор матрицы $A|_n$, соответствующий собственному значению $1/r(A|_n)$. Таким образом, для таких n и $i = 1, \dots, n$ из нормировки $\beta_1^{(n)} = 1$ и равенства (2.13) следует, что

$$\beta_i^{(n)} = \frac{\Delta_{1,i}(A|_n, r(A|_n))}{\Delta_{1,1}(A|_n, r(A|_n))} = F_{i,1}(A|_n, r(A|_n)) \quad (3.4)$$

Отсюда, учитывая равномерную сходимость, получаем результат леммы для правых собственных векторов. Результат для левых собственных векторов аналогичен: $\alpha_i^{(n)} \rightarrow L_{1,i}(A, R)$ when $n \rightarrow \infty$.

Доказательство закончено.

Теперь мы докажем основной результат работы для меры с максимальной энтропией μ^* системы (Ω_A, σ) , аппроксимируемой максимальными мерами конечных ТМЦ $(\Omega_{A|_n}, \sigma)$. Поскольку $1/r(A|_n)$ есть простое собственное значение матрицы $A|_n$ для достаточно больших n , ТМЦ $(\Omega_{A|_n}, \sigma)$ имеет единственную меру с максимальной энтропией. Эта мера сосредоточена на Ω_{H_n} , где H_n — единственная подматрица матрицы $A|_n$ с параметром сходимости $r(A|_n)$. Пусть ν_n — продолжение этой меры на Ω_A , т.е. $\nu_n(D) = \nu_n(D \cap \Omega_{A|_n}) = \nu_n(D \cap \Omega_{H_n})$ для всех борелевских множеств $D \subset \Omega_A$.

Теорема 3.1. Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям (*) и (**), то последовательность ν_n сходится в слабой топологии к единственной мере μ^* с максимальной энтропией ТМЦ (Ω_A, σ) .

Доказательство. В силу теоремы 2.1. достаточно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(B) = \mu^*(B)$ для всех цилиндрических множеств $B \subset \Omega_A$. Пусть $B = [j_0, \dots, j_m]_N^{N+m}$ и пусть n_0 выбрано так, что при $n > n_0$ индексное множество H_n содержит числа $1, 2, \dots, \max(j_0, \dots, j_m)$. Пусть $\bar{\alpha}^{(n)}, \bar{\beta}^{(n)}$ — собственные векторы (левый и правый), соответствующие собственному значению $1/r(A|_n)$ of $A|_n$ с нормировкой $\alpha_1^{(n)} = \beta_1^{(n)} = 1$. Тогда

$$\nu_n(B) = \nu_n(B \cap \Omega_{H_n}) = \frac{\alpha_{j_0}^{(n)} \cdot \beta_{j_m}^{(n)}}{\sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} \beta_k^{(n)}} (r(A|_n))^m; \quad \mu^*(B) = \frac{\alpha_{j_0} \beta_{j_m}}{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k} R^m$$

Тогда из формулы (3.4) (и аналогичной формулы для левых собственных векторов) имеем:

$$\beta_k^{(n)} = F_{k,1}(A|_n, r(A|_n)); \quad \alpha_k^{(n)} = L_{1,k}(A|_n, r(A|_n))$$

При нормировке собственных векторов $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ согласно условию $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, в силу леммы 3.4. получим: $\beta_k = F_{k,1}(A, R), \alpha_k = L_{1,k}(A, R)$ и $\beta_k^{(n)} \rightarrow \beta_k, \alpha_k^{(n)} \rightarrow \alpha_k$. Таким образом, остается показать, что $\sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} \beta_k^{(n)} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ при $n \rightarrow \infty$.

Зафиксируем x_0 , где $R < x_0 < R_1$. Тогда из третьего утверждения леммы 3.1. следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} F_{k,1}(A, x_0) L_{1,k}(A, x_0)$ сходится. Для достаточно больших n имеем: $r(A|_n) < x_0$ и

$$\beta_k^{(n)} = F_{k,1}(A|_n, r(A|_n)) \leq F_{k,1}(A, r(A|_n)) \leq F_{k,1}(A, x_0)$$

при всех $k = 1, \dots, n$. Аналогично, $\alpha_k^{(n)} \leq L_{1,k}(A, x_0)$. Тогда по теореме Лебега о сходимости ограниченных функций получаем результат теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01-03687.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms Lecture Notes Math.*, Springer-Verlag, Berlin-N.Y., 1975.
2. W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.
3. L. A. Bunimovich, N. I. Chernov, Ya. G. Sinai, "Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards", *Uspekhi Matem. Nauk*, **45** (1990), 97–134.
4. Y. Guivarch, J. Hardy, "Theorem limites pour une classe de chaines de Marcov et applications aux classe de chaines de Marcov et applications aux diffeomorphismes d'Anosov", *Ann. Inst. H.Poincare Probab. Statist.*, **24** (1988), 73–98.
5. F. Hofbauer, "On intrinsic ergodicity of piecewise monotone transformations with positive entropy", *Israel J. Math.*, **34** (1979), 213–236.
6. M. Malkin, "On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval in *Selecta Mathematica Sovietica*", **8** (1989), 131–139.
7. М.И. Малкин, "Разложение неблуждающего множества для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей", *Журнал СВМО*, **15** (2013), 49–54.
8. М.И. Малкин, "Инварианты энтропийного типа для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей", *Журнал СВМО*, **15** (2013), 148–155.
9. М.И. Малкин, "Хаотическое поведение счетных топологических марковских цепей с мероморфной дзета-функцией", *0 Журнал СВМО*, **16** (2014), 175–183.
10. J. Milnor, W. Thurston, *Dynamical Systems, Proc., 1986-87 (J.C. Alexander, Ed.). Lec. Notes Math.*, **1342**, Springer-Verlag, Berlin-N.Y., 1988.
11. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, "О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца", *Труды ММО*, **44** (1982), 150–212.
12. А.Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
13. М.-С. Li, M. Malkin, "Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps", *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353–3372.

14. Б.М. Гуревич, “Топологическая энтропия счетной цепи Маркова”, *ДАН СССР*, **187** (1969), 715–718.
15. Б.М. Гуревич, “Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве счетного графа”, *ДАН СССР*, **192** (1970), 963–965.
16. D. Vere-Jones, “Ergodic properties of nonnegative matrices”, *Pacific Journ. Math.*, **22** (1967), 361–386.

Approximation of maximal measures for countable topological Markov chains with meromorphic zeta function

© M.I. Malkin²

Abstract. Countable topological Markov chains (TMC) are considered. It is assumed that powers of the transition matrix of TMC have finite traces and so, for TMC, the dynamical (Artin-Mazur) zeta-function is well defined. It is also assumed that the following two conditions are fulfilled: 1) the radius of convergence of TMC associated with submatrices with big indexes is bigger than $r(A)$, the radius of convergence of the initial countable transition matrix A , 2) zeta-function of the TMC is meromorphic in a disc of radius bigger than $r(A)$. Such conditions are satisfied, in particular, for countable TMC being symbolic models of one dimensional piecewise monotonic maps with positive topological entropy. In the paper it is shown that under these conditions, an irreducible TMC has a unique measure with maximal entropy, which can be approximated (in the weak topology) by maximal measures of finite TMCs as subsystems of the initial one.

Key Words: Topological Markov chains, topological entropy, dynamical zeta-function, maximal measures

² Associate Professor of department of differential equations and mathematical analysis, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru

УДК 517.9

Искажения высокочастотных оптических сигналов фотоприемниками, изготовленными на основе кремния легированного золотом

© Е. В. Никишин¹, Е. Е. Пескова²

Аннотация. В статье проведены теоретические исследования искажений восстановленного высокочастотного оптического сигнала. Расчеты сделаны для фотоприемников, изготовленных на основе кремния, легированного золотом. Определены условия, при которых нелинейных искажения малы.

Ключевые слова: кинетика фотопроводимости, кремний, легированный золотом, рекомбинационные центры, времена жизни электронов и дырок, восстановление сигналов

Принципиальная возможность восстановления зависимости интенсивности высокочастотных импульсов возбуждающего излучения ($J = J(\omega t)$) по зависимости от времени фототока ($j = j(\omega t)$), возникающего в фотоприемнике, исследована в работах [1 - 3]. В [4] показано, что предложенный метод может быть осуществлен при использовании фотоприемников со сложными механизмами рекомбинации, наличие которых приводит к значительным нелинейностям в кинетических уравнениях [5 - 9]. Необходимым условием является большая частота изменения интенсивности света ω , а именно: $\omega \gg \max(\tau_n^{-1}, \tau_p^{-1})$. В работе [10] исследованы искажения, возникающие при использовании фоторезистора, изготовленного на основе кристаллического кремния с рекомбинационными центрами индия, для восстановления высокочастотных оптических сигналов.

Цель данной работы: исследование искажений, возникающих при восстановлении временной зависимости интенсивности возбуждающего света, при использовании для этого кремния легированного золотом. Контактными и поверхностными явлениями пренебрегаем. Параметры рекомбинационных центров приведены в [5], уравнения, описывающие кинетику неравновесных носителей заряда — в работе [4]. Соответствующие уравнения решались численными методами.

Ниже приведены результаты исследований нелинейных, частотных и фазовых искажения функции. Соответствующие коэффициенты, рассчитывались аналогично тому, как это делалось в работе [10]. Коэффициент нелинейных искажений:

$$K = \frac{1}{|c_1|} \sqrt{\sum_i |c_k|^2}, \text{ здесь } c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dj(\tau)}{d\tau} \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot \tau} d\tau, \quad (1.1)$$

Коэффициент частотных искажений $Y(\omega_i)$:

$$Y(\omega_i) = \max |j'_t(\omega_i \cdot t)| / \max [j'_t(\omega \cdot t)], \quad \omega_i \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}] \quad (1.2)$$

здесь: $j'_t(\omega_i)$ — амплитуда восстановленного оптического сигнала для фиксированной частоты ω в относительных единицах; $\max(j'_t)$ — максимальная амплитуда восстановленного сигнала в относительных единицах в рабочей области частот.

¹ Доцент кафедры экспериментальной физики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; nikishin57@mail.ru.

² Ассистент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; lizanika@mail.ru.

Фазовые искажения характеризуются групповым временем запаздывания τ в исследуемой полосе частот:

$$\tau_{gp} = d\phi/d\omega \quad (1.3)$$

ϕ — сдвиг фаз между восстановленным и возбуждающим импульсами.

Кроме малости искажений, использование фотоприемника для восстановления оптических импульсов предполагает относительно большую глубину модуляции, которая рассчитывалась по формуле:

$$K = (j_{\max} - j_{\min}) / (j_{\max} + j_{\min}) \quad (1.4)$$

Проведено исследование искажений при различных концентрациях донорных центров. Результаты численных расчетов приведены на рис. 1–4. Для кривых 1–4 рис. 1–4 использованы следующие параметры полупроводника и внешнего возбуждения: концентрация равновесных электронов — $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$; темп генерации — $g(\omega t) = 10^{20}(1 - \cos \omega t) \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; концентрация рекомбинационных (акцепторных) центров золота — $N_a = 8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Для кривой 1 рис. 1–4 концентрация донорных центров золота равна $N_\delta = 0 \text{ см}^{-3}$; для кривой 2 — $N_\delta = 10^{14} \text{ см}^{-3}$; для кривой 3 — $N_\delta = 10^{15} \text{ см}^{-3}$; для кривой 4 — $N_\delta = 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

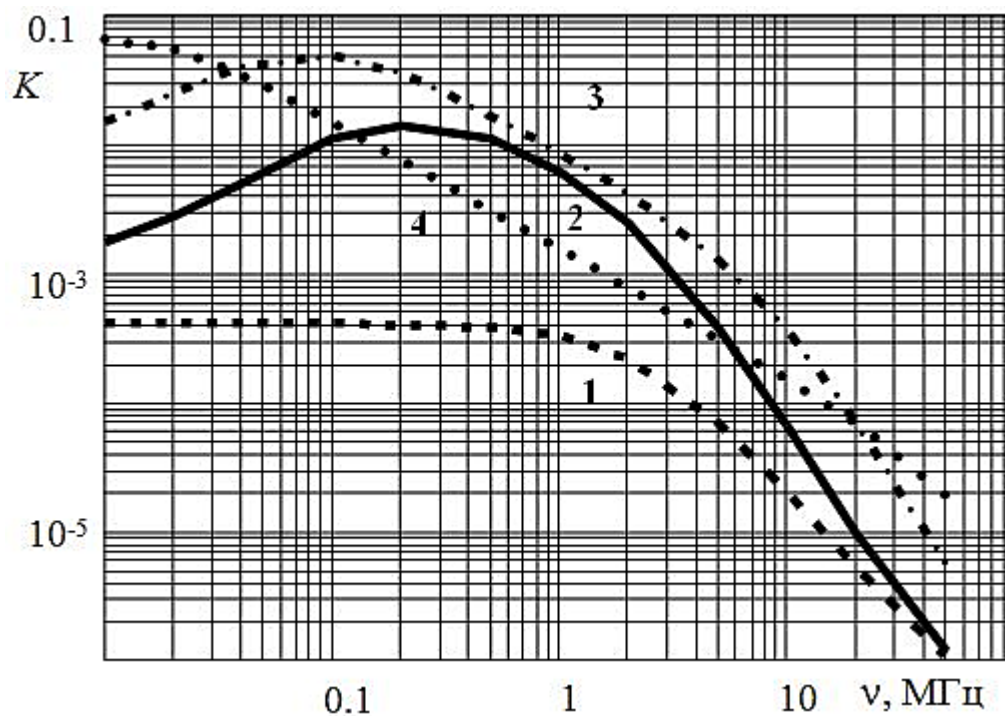


Рис. 1. Зависимости коэффициента нелинейных искажений от частоты.

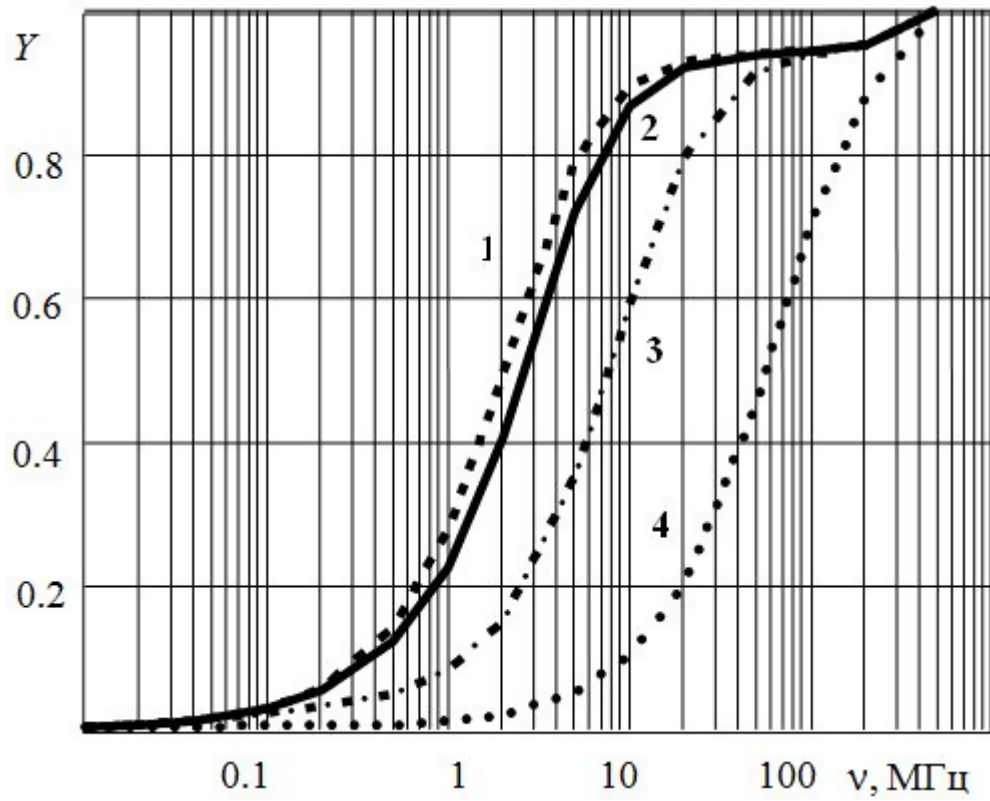


Рис. 2. Зависимость коэффициента Y , характеризующего частотные искажения оптического сигнала, от частоты следования гармонических импульсов света

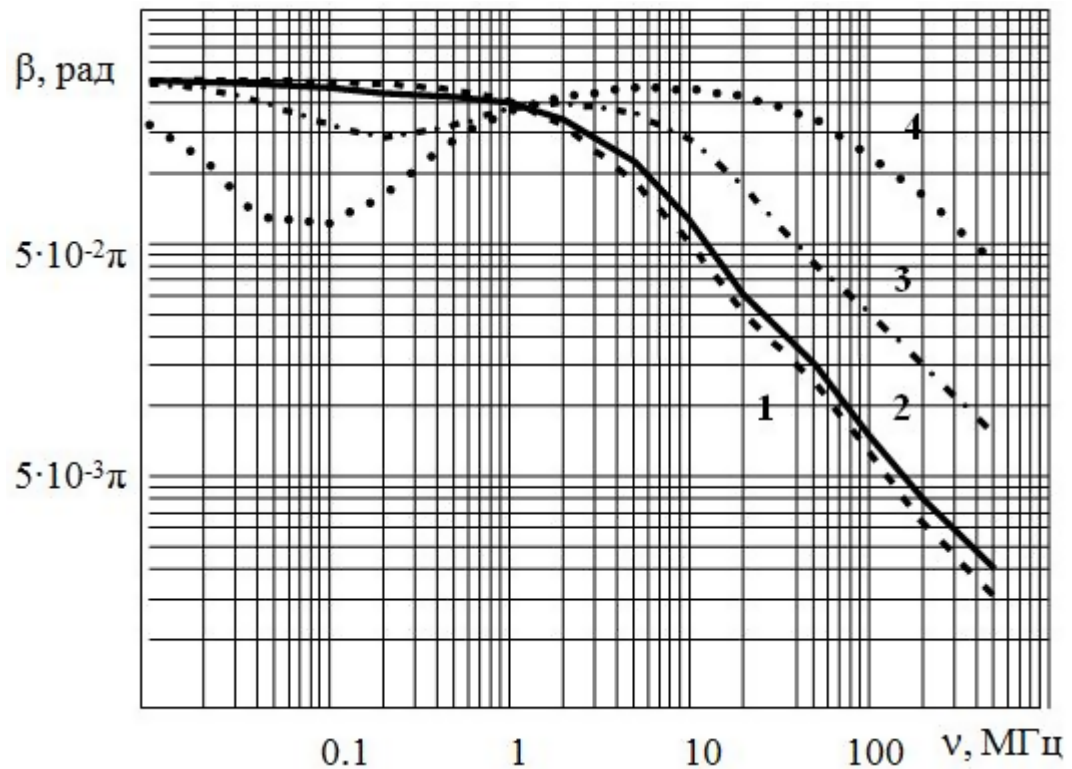


Рис. 3. Зависимость угла сдвига фаз восстановленного сигнала от частоты следования гармонических импульсов света.

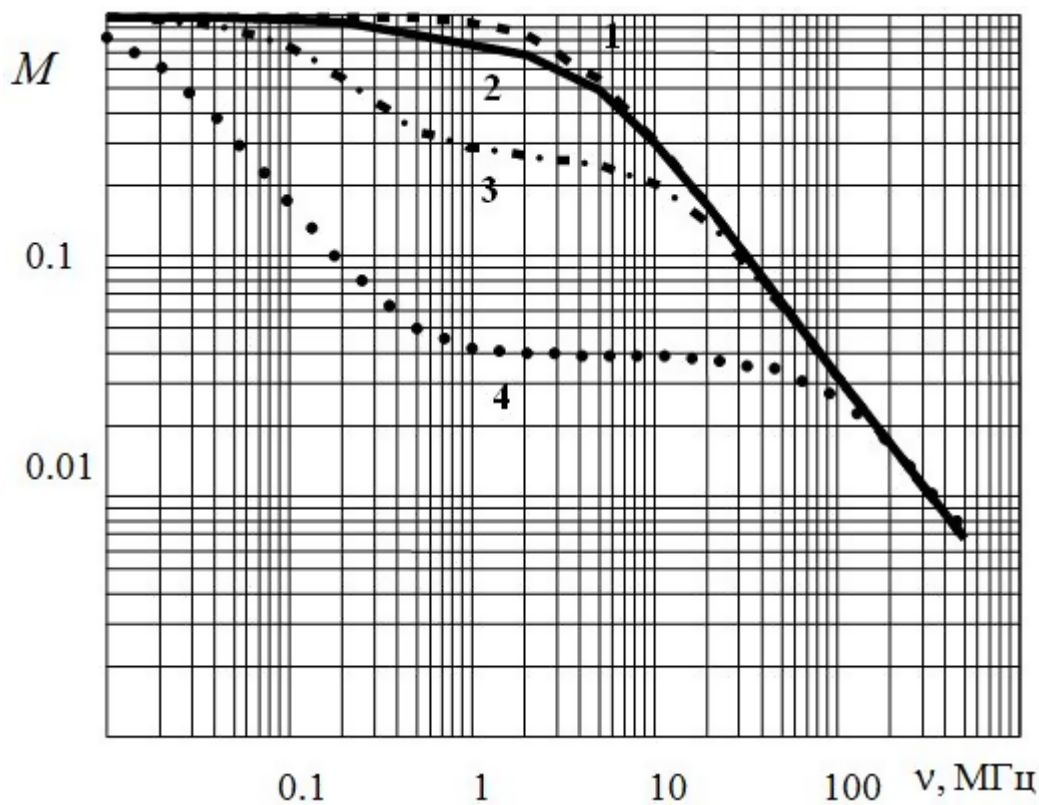


Рис. 4. Зависимость глубины модуляции электрического сигнала от частоты следования гармонических импульсов света.

Анализ полученных результатов показывает, что увеличение концентрации донорных примесей ухудшает параметры фотоприемника, предназначенного для восстановления высокочастотных возбуждающих импульсов. При частоте большей 100 МГц, то есть при $\omega \gg \max(\tau_n^{-1}, \tau_p^{-1})$ в независимости от концентрации донорных центров искажениями можно пренебречь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мхитарян В. М., Партамян Х. В., “Скоростные фотоприемники импульсного излучения на основе инерционных-фоторезисторов и фотодиодов”, *ЖТФ*, **52**:9 (1982), 1900–1902.
2. Горюнов В. А., Гришаев В. Я., Никишин Е. В., “Кинетика фотопроводимости при возбуждении высокочастотными импульсами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2012, № 4, 242–250.
3. Гришаев В. Я., Никишин Е. В., “Фотоэлектрический преобразователь высокочастотного оптического сигнала”, *патент на полезную модель*, 24.12.2012.

4. Мурюмин С. М., Никишина А. Е., Никишин Е. В., “Использование кремния легированного золотом для определения формы оптического сигнала”, *Журнал Средне-волжского математического общества*, **16**:1 (2014), 140–144.
5. Милнс А., *Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках*, Мир, М., 1977, 568 с.
6. Горюнов В. А., Гришаев В. Я., Никишин Е. В., “Об изменении времен жизни носителей заряда при импульсном фотовозбуждении в кремнии с глубокими примесными центрами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2011, № 4, 118–126.
7. Lang D. V., Grimmeis H. G., Meijer E., Jaros M., *Phys. Rev. B.*, **22**:7 (1980), 3917.
8. Аут И., *Фотоэлектрические явления*, Мир, М., 1980, 208 с.
9. Денисов Б. Н., Никишин Е. В., “Исследование кинетики неравновесных носителей в полупроводнике по среднему значению фотопроводимости при периодическом оптическом возбуждении”, *ФТП*, **48**:2 (2014), 175–178.
10. Никишин Е. В., “О границах применимости способа восстановления временной формы модулированных оптических сигналов с частотой выше граничной частоты фоторезистора”, *ФТП*, **48**:11 (2014), 1526–1529.

Distortion of high frequency optical signals photodetectors fabricated on silicon doped with gold.

© Е. В. Nikishin³, Е. Е. Peskova⁴

Abstract. In the article theoretical study of the distortions of the reconstructed high-frequency optical signal. Calculations are made for photo detectors fabricated on silicon doped with gold. The conditions under which nonlinear distortion is small.

Key Words: photoconductivity kinetics, silicon doped with gold, recombination centers, lifetimes of electrons and holes, signal reconstruction

³ Associate Professor in the Department of experimental physics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; nikishin57@mail.ru.

⁴ Assistant Professor of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; lizanika@mail.ru.

УДК 517.9

Управляемость за бесконечное время и асимптотическое равновесие

© А. Ю. Павлов¹

Аннотация. На основе обобщения неравенства Важевского найдены классы дифференциальных систем уравнений, для которых существование асимптотического равновесия у уравнения первого приближения не является необходимым условием управляемости за бесконечное время. Рассматривается пример скалярного уравнения, первое приближение для которого не имеет асимптотического равновесия, хотя само оно является управляемым за бесконечное время.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, управляемость за конечное и бесконечное время, асимптотическое равновесие

Важную роль в математической теории управления играют задачи об управляемости систем дифференциальных уравнений за конечное и бесконечное время [3],[4].

При управляемости за конечное время произвольная фиксированная точка переводится в другую произвольную точку за определенное время T . В случае управляемости за бесконечное время фиксированная точка переводится в сколь угодно малую окрестность другой точки, причем в дальнейшем из этой окрестности переводимая точка не выходит.

В работах [1], [2] профессором Е.В. Воскресенским рассмотрен вопрос об управляемости нелинейных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + f(t, x, u) + F(t) \quad (1.1)$$

за конечное и бесконечное время в определенных классах допустимых управлений K .

Данные условия получены на основе асимптотической теории интегрирования уравнений движения и метода сравнения. Причем уравнением сравнения является

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)u + F(t). \quad (1.2)$$

Одним из условий управляемости за бесконечное время является существование асимптотического равновесия [6] у системы первого приближения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y. \quad (1.3)$$

Для системы (1.3) существование асимптотического равновесия следующее [5].

Пусть $Y(t)$ - фундаментальная матрица уравнения (1.3), нормированная в нуле, $Y(0) = E$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = Y(+\infty)$, $\det Y(+\infty) \neq 0$.

Тогда говорят, что система (1.3) имеет асимптотическое равновесие.

Однако можно показать, что это условие не является в общем случае необходимым для управляемости системы (1.1) за бесконечное время.

Пример 1.1. . Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -x + u \quad (1.4)$$

¹ Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск, korspa@yandex.ru

Уравнение первого приближения

$$\frac{dy}{dt} = -y \quad (1.5)$$

не имеет асимптотического равновесия, так как общее решение уравнения (1.5): $y(t) = c e^{-t}$ и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, $\forall c \in R$.

Покажем, что уравнение (1.4) является управляемым за бесконечное время. Пусть точку x_0 по траектории уравнения (1.4) необходимо перевести за бесконечное время в точку x_1 , то есть $x(t_0) = x_0$, $x(+\infty) = x_1$.

Частное решение уравнения (1.4), проходящее через точку (t_0, x_0) имеет вид

$$x(t) = e^{-t} \left(\int_{t_0}^t e^s u(s) ds + x_0 e^{t_0} \right)$$

Найдем такое управление u , что $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_1$. Имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t e^s u(s) ds + x_0 e^{t_0}}{e^t}$.

Если потребовать непрерывность функции на промежутке $[t_0, +\infty)$, то к последнему пределу можно применить правило Лопиталя. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t u(t)}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t).$$

То есть искомым управлением может быть любая непрерывная функция такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = x_1$. В частности, можно положить $u(t) = x_1$; $u(t) = x_1 + \frac{1}{t}$; $u(t) = x_1 - \frac{1}{t^2}$.

Таким образом, система (1.4) является управляемой за бесконечное время, хотя уравнение первого приближения не имеет асимптотического равновесия.

Определенный интерес представляют классы уравнений, для которых существование асимптотического равновесия у уравнения первого приближения является необходимым или достаточным условием. Найдем класс дифференциальных систем, управляемых за бесконечное время в некотором классе допустимых управлений без предположения существования асимптотического равновесия первого приближения.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x, u), \\ x(t_0) = x_0, x(+\infty) = x_1 \end{cases} \quad (1.6)$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $T \leq t < +\infty$, $A(\cdot) : [T, +\infty) \mapsto \text{Hom}(R^n, R^n)$ - непрерывное отображение, $f \in C([T, +\infty) \times R^n \times R^m, R^n)$.

Необходимо перевести точку x_0 в точку x_1 по траектории уравнения (1.6) за бесконечное время.

Пусть $y = x - x_1$. Тогда $\dot{y} = \dot{x}$ (точкой обозначена производная по t), $x = y + x_1$. Система (1.6) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t)y + A(t)x_1 + f(t, y + x_1, u), \\ y(t_0) = x_0 - x_1, y(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Обозначим $\phi(t) = A(t)x_1$, $\tilde{f}(t, y, u) = f(t, y + x_1, u)$. Предположим, что

$$\|\tilde{f}(t, y, u) + \phi(t)\| \leq \psi(t)\|y\| + \eta(t, u(t)),$$

где $\psi \in C([t_0, +\infty), R)$, $\eta \in C([t_0, +\infty) \times R^m, R)$.

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp \left(\int_l^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl + \|x_0 - x_1\| \exp \left(\int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) = \\ &= \exp \left(\int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) [\|x_0 - x_1\| + \\ &+ \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp \left(\int_l^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds - \int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl] = \\ &= \exp \left(\int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) \left[\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp \left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl \right] \end{aligned}$$

Последнее выражение при $t \mapsto +\infty$ должно стремиться к нулю. Рассмотрим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp \left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl}{\exp \left(- \int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right)}.$$

Предположим, что выполняется одна из следующих альтернатив

1. $\int_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds = -\infty$, $\int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp \left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl = \infty$,
2. $\int_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds = +\infty$, $\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp \left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl = 0$

а функция $u(t)$ такова, что к пределу можно применить правило Лопиталья. Тогда последний предел равен

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t)) \exp \left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right)}{-\exp \left(- \int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) (\Lambda(t) + \psi(t))} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\Lambda(t) + \psi(t)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1.2. Если для системы (1.6) и управления $u(t)$ выполняется одна из следующих альтернатив

- 1) $\int_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds = -\infty$, $\int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp \left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl = \infty$,
- 2) $\int_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds = +\infty$, $\|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp \left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl = 0$

и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\Lambda(t) + \psi(t)} = 0$, то любую точку $x_0 \in R^n$ можно перевести в точку $x_1 \in R^n$ за бесконечное время по траектории системы (1.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Саранск: изд-во Сарат. ун-та. Саран. фил., 1990, 224 с.
2. Воскресенский Е. В., *Асимптотические методы: Теория и приложения*, Саранск: СВМО, 2001, 300 с.
3. Зубов В. И., *Лекции по теории управления*, М. : Наука, гл. ред. физ.мат. лит., 1975, 495 с.
4. Зубов В. И., *Теория колебаний: Учеб. пособие для университетов*, М. : Высш. школа, 1979, 400 с.
5. Павлов А. Ю., *Методы сравнения и управляемость нелинейных систем*, дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Саранск, 1995, 143 с.
6. Чезари Л., *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Мир, 1964, 480 с.

Controllability for infinite time and asymptotic equilibrium

© A. Yu. Pavlov²

Abstract. On the basis of generalization of Wazewski inequality the author obtained classes of differential equations systems, for which the existence of asymptotic equilibrium equations in the first approximation is not necessary condition of controllability infinite time. The article considers the example of a scalar equation, which the first approximation has no asymptotic equilibrium, although it itself is controlled for an infinite time.

Key Words: nonlinear systems of ordinary differential equations, controllability in finite and infinite time, asymptotic equilibrium

² Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk, korspa@yandex.ru

УДК 519.3:62-50

Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений с запаздывающим аргументом и приближенное вычисление функционала качества

© Т. К. Юлдашев¹ С. М. Овсяников²

Аннотация. Рассмотрены вопросы приближенного решения системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с нелинейным запаздывающим аргументом и случайной непрерывной вектор-функцией и приближенного вычисления функционала качества при известном управлении. Поставленная задача сведена к рассмотрению случайного управления, ограниченного по модулю вектором-константой и с критерием нелинейного вида. Использован случай, когда переменные принимают натуральные значения. Задача заменяется с её суммарным аналогом. Для каждого набора заданной координаты и управления задача сведена к случайной системе суммарных уравнений с запаздыванием. Доказано существование и единственность решения этой системы суммарных уравнений. При этом использован метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Получена оценка для допустимой погрешности по состоянию приближенного решения суммарной задачи. Далее доказано, что последовательность дискретных управлений является минимизирующей последовательностью для этой задачи. В качестве примера рассматриваемой системы интегральных уравнений составлена простейшая математическая модель производственного процесса компании, производящего n видов продукции.

Ключевые слова: Интегральное уравнение Вольтерра, нелинейное запаздывание, оптимальное управление, случайное приближенное решение, математическая модель экономики.

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам относятся и задачи адаптивных систем управления [1] – [4].

Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами получила бурное развитие. К системам с распределенными параметрами относятся задачи аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т.д. [5] – [10].

Разрабатываются эффективные численные методы и программные средства для решения задач динамики и управления. При приближенном решении задач оптимального управления используются широкий спектр разных методов [11] – [20].

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для одной системы нелинейных случайных интегральных уравнений с нелинейным запаздывающим аргументом и с нелинейным критерием оптимальности.

¹ Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru

² Магистрант института информатики и телекоммуникации, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, s.ovsianikov@yandex.ru

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс на отрезке D_T описывается системой нелинейных интегральных уравнений вида

$$\vartheta(t) = \int_{t_0}^t K \left(t, s, u(s), \vartheta \left[s - \tau \left(s, u(s), \int_{t_0}^s H(s, \theta) \vartheta(\theta) d\theta \right) \right], \xi(s) \right) ds \quad (1.1)$$

с условием

$$\vartheta(t) = \phi(t), \quad t \in [-\eta; t_0], \quad (1.2)$$

где $K(t, s, u, \vartheta, \xi) \in C(D_T^2 \times U \times V \times \Omega)$, $\xi(t) \in \Omega$ – случайный процесс с непрерывными траекториями в $\mathbb{R}^n$, $0 < \tau(t, u(t), \vartheta(t))$ – непрерывная вектор-функция запаздывания, такая, что $t - \tau(t, u(t), \vartheta(t)) \geq t_0 - \eta$, $0 < \eta = \text{const}$, $\varphi(t) \in C[-\eta; t_0]$ – начальная вектор-функция, $\int_{t_0}^t |H(t, s)| ds < \infty$, $0 < u(t) \in U$ – управляющая вектор-функция, $U \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – случайные ограниченные замкнутые множества, $D_T^2 \equiv D_T \times D_T$, $D_T \equiv [t_0; T]$, $0 < t_0 < T < \infty$.

Задача 1. Найти случайное состояние $\vartheta^*(t)$ – решение задачи (1.1), (1.2) при известных управляющих воздействиях

$$u^*(t) \in \{u^* : |u^*(t)| \leq M_0 \in \mathbb{R}^n, t \in D_T\},$$

что доставляют минимум функционалу

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^T \tau \left(t, u(t), \int_{t_0}^t H(t, s) \vartheta(s) ds \right) dt.$$

Отметим, что данная работа является дальнейшим развитием работы [21]. В [22] изучены вопросы разрешимости случайных нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

2. Дискретный аналог задачи 1

Вместо случайной системы нелинейных интегральных уравнений (1.1) рассмотрим её суммарный аналог

$$\vartheta(k) = \sum_{\mu=k_0}^{k-1} K \left(k, \mu, u(\mu), \vartheta \left[\mu - \tau \left(\mu, u(\mu), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta(\nu) \right) \right], \xi(\mu) \right) \quad (2.1)$$

при условии

$$\vartheta(k) = \phi(k), \quad k \in D_1, \quad (2.2)$$

где случайная вектор-функция $K(k, \mu, u, \vartheta, \xi)$ определена для всех $k \in D_k \equiv \{k_0 \leq \mu \leq k \leq k_1\}$, $k - \tau(k, u(k), \vartheta(k)) \geq k_0 - \eta$, $\phi(k)$ определена для всех $k \in D_1 \equiv \{k_0 - \eta \leq k \leq k_0\}$, $\eta > 0$, $\sum_{\mu=k_0}^{k-1} |H(k, \mu)| < \infty$, $\xi(k)$ – целочисленная случайная вектор-функция, а k_0 , k и k_1 – натуральные числа.

Задача 2. Найти случайное состояние $\vartheta^*(k)$ – решение задачи (2.1), (2.2) при известных управляющих воздействиях

$$u^*(k) \in \{u^* : |u^*(k)| \leq M_0^*, k \in D_k\},$$

что доставляют минимум функционалу

$$J[u] = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \tau \left(k, u(k), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} H(k, \mu) \vartheta(\mu) \right). \quad (2.3)$$

В данной работе вместо задачи 1 будем рассматривать суммарную задачу 2.

3. Однозначная разрешимость системы суммарных уравнений (2.1)

В дальнейшем все соотношения понимаем в смысле почти наверное. Обозначим через A множество всех случайных величин ω . Очевидно, что $P(A) = 1$. Для всех $\omega \in A$ мы используем следующие обозначения: $Bnd(M(\omega))$ – класс целочисленных вектор-функций, ограниченных по норме с положительным случайным вектором $M(\omega)$; $Lip\{L(\omega)_{|u,v,\dots}\}$ – класс вектор-функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \dots$ с положительной случайной матрицей $L(\omega)$. В качестве нормы на множестве D_k для произвольной целочисленной вектор-функции $x(k, \omega)$ мы будем брать евклидову норму

$$\|x(k, \omega)\| = \sum_{i=1}^n \max \{|x(k, \omega)| : k \in D_k\}.$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполняются следующие условия:

1. $f(k, \mu, u, \vartheta, \xi) \in Bnd(M(\omega)) \cap Lip\{L_1(k, \mu, \omega)_{|\vartheta}\}$, где $0 < M(\omega)$ – случайный постоянный вектор, $0 < L_1(k, \mu, \omega)$ – случайная матрица-функция;

2. $0 < \alpha = \max \left\{ \sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k, \mu, \omega) : k \in D_k \right\} < \infty$;

3. $\tau(k, u, \vartheta, \omega) \in Lip\{L_2(\omega)_{|\vartheta}\}$, где $0 < L_2(\omega)$ – случайная постоянная матрица;

4. $0 < \beta = \max \left\{ \sum_{\mu=k_0}^{k-1} |H(k, \mu)| : k \in D_k \right\} < \infty$;

5. $0 < \gamma = \max \{|\phi(k)| : k \in D_1\} < \infty$;

6. $|\vartheta(k, \omega) - \vartheta(\mu, \omega)| \leq L_3(\omega)|k - \mu|$, $0 < L_3(\omega)$ – случайная постоянная матрица;

7. $\rho_{max} < 1$, где ρ_{max} – наибольшее собственное значение случайной матрицы

$Q(\omega) = \alpha(E + \beta L_2(\omega) L_3(\omega))$, E – единичная матрица.

Тогда система суммарных уравнений (2.1) при фиксированных значениях управления $u(k, \omega)$ имеет единственное решение на множестве D_k .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(k, \omega) &= \phi(k_0, \omega), \quad r = 0, 1, 2, \dots; \quad \vartheta_{r+1}(k, \omega) = \\ &= \sum_{\mu=k_0}^{k-1} K \left(k, \mu, u(\mu, \omega), \vartheta_r \left[\mu - \tau \left(\mu, u(\mu, \omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_r(\nu, \omega) \right), \omega \right], \xi(\mu) \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В силу первого условия теоремы для нулевого приближения из (3.1) справедлива следующая оценка

$$\|\vartheta_0(k, \omega)\| \leq \gamma < \infty. \quad (3.2)$$

В силу условий теоремы, с учетом (3.2) из (3.1) для первого приближения имеем оценку

$$\|\vartheta_1(k, \omega) - \vartheta_0(k, \omega)\| \leq \gamma + M(\omega)(k_1 - k_0 - 1). \quad (3.3)$$

Теперь для произвольного натурального числа $k > 1$, в силу условий теоремы, из (3.1) по индукции получаем

$$\begin{aligned} & \|\vartheta_{r+1}(k, \omega) - \vartheta_r(k, \omega)\| \leq \\ & \leq \max \left\{ \sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k, \mu, \omega) \left\| \vartheta_r \left[\mu - \tau \left(\mu, u(\mu, \omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_r(\nu, \omega) \right), \omega \right] - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \vartheta_{r-1} \left[\mu - \tau \left(\mu, u(\mu, \omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_{r-1}(\nu, \omega) \right), \omega \right] \right\| : k \in D_k \right\} \leq \\ & \leq \max \left\{ \sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k, \mu, \omega) \|\vartheta_r(\mu, \omega) - \vartheta_{r-1}(\mu, \omega)\| : k \in D_k \right\} + \\ & + \max \left\{ \sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k, \mu, \omega) \left\| \vartheta_{r-1} \left[\mu - \tau \left(\mu, u(\mu, \omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_r(\nu, \omega) \right), \omega \right] - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \vartheta_{r-1} \left[\mu - \tau \left(\mu, u(\mu, \omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_{r-1}(\nu, \omega) \right), \omega \right] \right\| : k \in D_k \right\} \leq \\ & \leq \max \left\{ \sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k, \mu, \omega) \|\vartheta_r(\mu, \omega) - \vartheta_{r-1}(\mu, \omega)\| : k \in D_k \right\} + \\ & + \max \left\{ L_3(\omega) \sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k, \mu, \omega) \left\| \tau \left(\mu, u(\mu, \omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_r(\nu, \omega) \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \tau \left(\mu, u(\mu, \omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_{r-1}(\nu, \omega) \right) \right\| : k \in D_k \right\} \leq \\ & \leq \max \left\{ \sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k, \mu, \omega) \|\vartheta_r(\mu, \omega) - \vartheta_{r-1}(\mu, \omega)\| : k \in D_k \right\} + \\ & \quad + \max \left\{ L_2(\omega) L_3(\omega) \sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k, \mu, \omega) \times \right. \\ & \quad \left. \times \left\| \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_r(\nu, \omega) - \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_{r-1}(\nu, \omega) \right\| : k \in D_k \right\} \leq \\ & \leq \max \left\{ \sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k, \mu, \omega) \left(E + L_2(\omega) L_3(\omega) \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \right) \|\vartheta_r(\mu, \omega) - \vartheta_{r-1}(\mu, \omega)\| : k \in D_k \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\|\vartheta_{r+1}(k, \omega) - \vartheta_r(k, \omega)\| \leq \rho_{\max} \cdot \|\vartheta_r(k, \omega) - \vartheta_{r-1}(k, \omega)\| < \|\vartheta_r(k, \omega) - \vartheta_{r-1}(k, \omega)\|. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) следует, что оператор в правой части (2.1) является сжимающим. Следовательно, система суммарных уравнений (2.1) при фиксированных значениях управления $u(k, \omega)$ имеет единственное решение на множестве D_k .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда при фиксированных значениях управления $u(k, \omega)$ справедлива оценка

$$\|\vartheta(k, \omega) - \vartheta_r(k, \omega)\| \leq \frac{\lambda_{\max}}{1 - \rho_{\max}}, \quad (3.5)$$

где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение случайной матрицы $[Q(\omega)]^r [\gamma + M(\omega)(k_1 - k_0 - 1)]$, $\lambda_{\max} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для разности $\vartheta(k, \omega) - \vartheta_r(k, \omega)$ с учетом (3.3) и (3.4) имеем оценку

$$\begin{aligned} & |\vartheta(k, \omega) - \vartheta_r(k, \omega)| \leq \\ & \leq |\vartheta(k, \omega) - \vartheta_{r+1}(k, \omega)| + |\vartheta_{r+1}(k, \omega) - \vartheta_r(k, \omega)| \leq \\ & \leq Q(\omega) |\vartheta(k, \omega) - \vartheta_{r+1}(k, \omega)| + [Q(\omega)]^r [\gamma + M(\omega)(k_1 - k_0 - 1)]. \end{aligned}$$

Отсюда имеем (3.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 3.1. Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда имеет место следующее соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\vartheta(k, \omega) - \vartheta_r(k, \omega)\| = 0. \quad (3.6)$$

4. Вычисление функционала качества

С учетом последовательностей функций (3.1) и (3.3) функционал (2.3) запишем в виде

$$J_r[u] = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \tau \left(k, u(k, \omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} H(k, \mu) \vartheta(\mu, \omega) \right). \quad (4.1)$$

Т е о р е м а 4.1. Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |J[u] - J_r[u]| = 0. \quad (4.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий теоремы, с учетом (3.5) из (2.3) и (4.1) получаем следующую оценку

$$|J[u] - J_r[u]| \leq L_2(\omega) \sum_{\mu=k_0}^{k-1} H(k, \mu) |\vartheta(\mu, \omega) - \vartheta_r(\mu, \omega)| \leq$$

$$\leq \frac{\beta L_2(\omega) [Q(\omega)]^r [\gamma + M(\omega)(k_1 - k_0 - 1)] (k_1 - k_0 - 1)}{E - Q(\omega)}.$$

Из последней оценки переходом к пределу при $r \rightarrow \infty$ получаем справедливость (4.2).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Пусть $u^*(k, \omega)$ – оптимальное допустимое управление в задаче 2. Предполагается, что для этого оптимального управления справедлива следующая оценка

$$\|u^*(k, \omega) - u_r^*(k, \omega)\| \leq \delta_r(k, \omega), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \delta_r(k, \omega) = 0. \quad (4.3)$$

Из (1.1), (2.3), (3.1) и (4.1) приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \vartheta^*(k, \omega) = \\ = \sum_{\mu=k_0}^{k-1} K \left(k, \mu, u^*(\mu, \omega), \vartheta^* \left[\mu - \tau \left(\mu, u^*(\mu, \omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta^*(\nu, \omega) \right), \omega \right], \xi(\mu) \right); \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_0^*(k, \omega) = \phi(k_0, \omega), \quad r = 0, 1, 2, \dots; \quad \vartheta_{r+1}^*(k, \omega) = \\ = \sum_{\mu=k_0}^{k-1} K \left(k, \mu, u^*(\mu, \omega), \vartheta_r^* \left[\mu - \tau \left(\mu, u^*(\mu, \omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu, \nu) \vartheta_r^*(\nu, \omega) \right), \omega \right], \xi(\mu) \right); \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$J[u^*] = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \tau \left(k, u^*(k, \omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} H(k, \mu) \vartheta^*(\mu, \omega) \right); \quad (4.6)$$

$$J_r[u^*] = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \tau \left(k, u^*(k, \omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} H(k, \mu) \vartheta_r^*(\mu, \omega) \right); \quad (4.7)$$

$$J_r[u_r^*] = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \tau \left(k, u_r^*(k, \omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} H(k, \mu) \vartheta_r^*(\mu, \omega) \right). \quad (4.8)$$

Т е о р е м а 4.2. Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Если

$$\tau(k, u^*, \vartheta^*) \in Lip \left\{ L_2(\omega) \Big|_{u^*, \vartheta^*} \right\}$$

и выполняется условие (4.3), то имеет место следующее соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |J[u^*] - J_r[u_r^*]| = 0. \quad (4.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы (3.6) и (4.2) в случае (4.4) – (4.7) выглядят так

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\vartheta^*(k, \omega) - \vartheta_r^*(k, \omega)\| = 0, \quad (4.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |J[u^*] - J_r[u^*]| = 0. \quad (4.11)$$

Рассмотрим оценку разности $J[u_r^*] - J_r[u_r^*]$. В силу условия теоремы, из (4.7) и (4.8) получаем

$$|J[u_r^*] - J_r[u_r^*]| \leq L_2(\omega) [\|u^*(k, \omega) - u_r^*(k, \omega)\| + \|\vartheta^*(k, \omega) - \vartheta_k^*(k, \omega)\|]. \quad (4.12)$$

С учетом (4.3) и (4.10) из (4.12) получаем, что справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |J[u_r^*] - J_r[u_r^*]| = 0. \quad (4.13)$$

Так как

$$|J[u^*] - J_r[u_r^*]| \leq |J[u^*] - J_r[u^*]| + |J[u_r^*] - J_r[u_r^*]|,$$

то, переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, с учетом (4.11) и (4.13) получаем (4.9).

Доказательство закончено.

5. Заключение

Аналитическое решение задач оптимального управления процессами, описываемыми интегральными уравнениями с нелинейным запаздывающим аргументом, очень сложно. Поэтому на практике используются приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для одной нелинейной случайной системы интегральных уравнений Вольтерра с нелинейным запаздывающим аргументом и с нелинейным критерием оптимальности. При этом используются итерации (4.5) и (4.8). Доказывается сходимость последовательности функционала качества (4.8). В качестве примера для уравнения (1.1) составляется математическая модель экономики производственной компании.

6. Приложение

Пример математической модели. Рассмотрим производственный процесс одной компании в условиях рыночных отношений. Пусть компания производит n видов продукции и $u_i(t)$ – объем i -й продукции компании, реализованной к моменту времени t , $i = \overline{1, n}$. Её доход к данному моменту времени t составляет

$$y_i(t) = p_i(t)u_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.1)$$

где $p_i(t)$ – рыночная цена реализации i -й продукции производимой компанией в момент времени t .

Из (6.1) видно, что если цена реализации продукции возрастает, то и доход компании тоже возрастает к данному моменту времени t . Но, повышение цены может отрицательно отражаться в скорости реализации товара, производимой компанией.

Путем дифференцирования формулы (6.1) по времени t находим скорость реализации i -й продукции

$$y'_i(t) = p'_i(t)u_i(t) + p_i(t)u'_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.2)$$

где $p'_i(t)$ – тенденция формирования ценообразования i -й продукции.

Нас интересует случай, когда $y'_i(t) > 0$, то есть с течением времени все больше и больше продукции реализуются. Из формулы (6.2) видно, что это зависит от тенденции формирования ценообразования $p'_i(t)$ и скорости выпуска продукции $u'_i(t)$. Но, $p'_i(t)$ определяется из равновесия спроса и предложения на i -ю продукцию на рынке к моменту времени t , $i = \overline{1, n}$.

Скорость выпуска i -й продукции определяется из следующего соотношения

$$u'_i(t) = \alpha_i(t)z_i(t - \tau_i(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.3)$$

где $z_i(t)$ – функция инвестиции, направленных на расширение производства i -й продукции, $\alpha_i(t)$ – коэффициент эффективности использования инвестиции, $0 < \alpha_i(t) < 1$, $0 < t_0 < \tau_i(t) < t$. Если функция запаздывания $\tau_i(t)$ меньше будет, то это способствует тому, что скорость выпуска i -й продукции больше становится. Если $\tau_i(t) = t$, то процесс инвестирования будет останавливаться. Очевидно, что запаздывание $\tau_i(t)$ зависит от объема продукции $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ и скорости реализации производимой компанией продукции $y'(t) = (y'_1(t), y'_2(t), \dots, y'_n(t))$ к моменту времени t

$$\tau_i(t) = \tau_i(t, u(t), y'(t)), i = \overline{1, n}.$$

Тогда формула (6.3) приобретает вид

$$u'_i(t) = \alpha_i(t) z_i(t - \tau_i(t, u(t), y'(t))), i = \overline{1, n}. \quad (6.4)$$

Величина инвестиций $z_i(t)$ является частью дохода

$$z_i(t) = q_i(t) y_i(t), i = \overline{1, n}, \quad (6.5)$$

где $q_i(t)$ – доля прибыли в составе дохода от реализации i -й продукции, $0 < q_i(t) < 1$. Величина $q_i(t)$ характеризует рентабельность производства i -й продукции.

Подставляя (6.5) в (6.4), получаем

$$u'_i(t) = \alpha_i(t) q_i(t - \tau_i(t, u(t), y'(t))) y_i(t - \tau(t, u(t), y'(t))), i = \overline{1, n}. \quad (6.6)$$

Из формулы (6.6) следует, что величина скорости выпуска i -й продукции $u'_i(t)$ взаимосвязана с величиной рентабельности производства этой продукции. Запаздывание τ_i характеризуется величиной продукции, накопленных в складах предприятия, и скоростью выпуска продукции к данному моменту времени t .

Подстановка (6.6) в (6.2) дает нам следующую систему дифференциальных уравнений

$$y'_i(t) = p'_i(t) u_i(t) + \beta_i(t) q_i(t - \tau_i(t, u(t), y'(t))) y_i(t - \tau(t, u(t), y'(t))), i = \overline{1, n}, \quad (6.7)$$

где $\beta_i(t) = p_i(t) \alpha_i(t)$, $0 < \beta_i(t) < 1$, $0 < q_i(t) < 1$ – известные функции, $y_i(t)$ – неизвестная функция, $u_i(t)$ – функция управления,

$$t - \tau_i(t, u(t), y'(t)) \geq t_0 - \eta, 0 < \eta = const.$$

В системе уравнений (6.7) учтем фактор внешнего воздействия $f_i(t)$. Отметим, что фактор внешнего воздействия чаще всего зависит от дохода самой компании. Если учтем случайных внешних факторов, то система дифференциальных уравнений (6.7) приобретает вид

$$\begin{aligned} y'_i(t) = & p'_i(t) u_i(t) + \beta_i(t) q_i \left[t - \tau_i(t, u(t), y'(t)) \right] \times \\ & \times y_i \left[t - \tau_i(t, u(t), y'(t)) \right] + f_i(t, y(t), \xi(t)), i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $\xi(t)$ – случайный процесс с непрерывными траекториями в $\mathbb{R}^n$.

Систему дифференциальных уравнений (6.8) будем рассматривать при начальном условии

$$y'_i(t) = \varphi_i(t), t \in [-\eta, t_0], 0 < \eta = const, i = \overline{1, n}.$$

На большом временном отрезке $[t - \tau_i(t, u(t), y'(t)); t]$ максимизировать доход компании практически невозможно. Поэтому этот вопрос решается путем минимизации функции запаздывания $\tau_i(t, u(t), y'(t))$, управляя объемом продукции на отрезке времени D_T .

Примем обозначение $y'_i(t) = \vartheta_i(t)$. Тогда с учетом начального условия имеем

$$y_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^t \vartheta_i(s) ds, \quad i = \overline{1, n}.$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (6.8) приобретает вид системы интегральных уравнений Вольтерра

$$\begin{aligned} \vartheta_i(t) = & p'_i(t)u_i(t) + \beta_i(t)q_i\left[t - \tau_i(t, u(t), \vartheta(t))\right] \times \\ & \times \left[\varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^t \vartheta_i\left[s - \tau_i(s, u(s), \vartheta(s))\right] ds \right] + f_i\left(t, \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^t \vartheta_i(s) ds, \xi(t)\right) \end{aligned}$$

с условием $\vartheta_i(t) = \varphi_i(t)$, $t \in [-\eta, t_0]$, $0 < \eta = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Г., *Оптимальные и адаптивные системы*, Высшая школа, М., 1989, 263 с.
2. Андреев Ю. Н., *Управление конечномерными линейными объектами*, Наука, М., 1976, 424 с.
3. Вязгин В. А., Федоров В. В., *Математические методы автоматизированного проектирования*, Высшая школа, М., 1989, 184 с.
4. Куропаткин П. В., *Оптимальные и адаптивные управления*, Наука, М., 1980, 228 с.
5. Бутковский А. Г., *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1965, 474 с.
6. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.
7. Егоров А. И., *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*, Наука, М., 1978, 464 с.
8. Лионс Ж. Л., *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972, 412 с.
9. Лурье К. А., *Оптимальное управление в задачах математической физики*, Наука, М., 1975, 480 с.
10. Рапопорт Э. Я., *Оптимальное управление системами с распределенными параметрами*, Высшая школа, М., 2009, 680 с.

11. Кротов В. Ф., Гурман В. И., *Методы и задачи оптимального управления*, Наука, М., 1973, 448 с.
12. Срочко В. А., *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, Физматлит, М., 2000, 160 с.
13. Тятюшкин А. И., *Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем*, СО "Наука", Новосибирск, 1992, 193 с.
14. Федоренко Р. П., *Приближенное решение задач оптимального управления*, Наука, М., 1978, 488 с.
15. Юлдашев Т. К., "Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **20:5** (2013), 78 – 89.
16. Юлдашев Т. К., "Приближенное решение задачи оптимального управления для нелинейного псевдопараболического уравнения", *Вестн. ВоронежГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, 2014, № 1, 45 – 51.
17. Юлдашев Т. К., "Приближенное решение точечной подвижной задачи оптимального управления для нелинейного гиперболического уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **21:3** (2014), 106 – 120.
18. Юлдашев Т. К., "Нелинейная точечная задача оптимального управления для псевдопараболического уравнения", *Вестн. ВоронежГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, 2014, № 3, 9 – 16.
19. Юлдашев Т. К., "Приближенное решение нелинейного параболического и обыкновенного дифференциального уравнений и приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях", *Проблемы управления*, 2014, № 4, 2 – 8.
20. Юлдашев Т. К., "О построении приближений для оптимального управления в квазилинейных уравнениях с частными производными первого порядка", *Матем. теория игр и её приложения*, **6:3** (2014), 105 – 119.
21. Юлдашев Т. К., "Приближенное решение дифференциальных уравнений с нелинейным запаздыванием и приближенное вычисление функционала качества при известном управлении", *Журн. средневожского мат. общества*, **16:4** (2014), 75 – 84.
22. Юлдашев Т. К., Артыкова Ж. А., "Случайные интегральные уравнения Вольтерра первого рода с нелинейной правой частью", *Сб. «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения»*, 2005, 204 – 206.

Approximate solving the system of nonlinear integral equations with delay argument and approximate calculation of functionality of quality

© T. K. Yuldashev³ S. M. Ovsianikov⁴

Abstract. It is considered the questions of approximate solving of differential equations with nonlinear delay and of approximate calculation of functionality of quality at known operating influences. This problem is involved the control bounded by a constant and is contained it as nonlinear function into equation and into functionality of quality. It is considered the case when the variables are integer values. The problem is changed to its discrete analog. For each set of given coordinate and controls the initial value problem is reduced to a summary equation with nonlinear delay. It is proved the existence and uniqueness of solution of the summary equation. It is used the method of successive approximations, combined it with the method of compressing maps. It is estimated the permissible error with respect to state of approximation solution of initial value difference problem. Further it is proved that discrete control sequence is minimizing for the considering problem. As an example it is constructed a simple dynamical model of the economy in the form of differential equations with delay time, which is considered in this paper. This model takes into account the relationship of volume of production and income in certain conditions of market pricing.

Key Words: Volterra integral equation, nonlinear delay, optimal control, random approximate solution, mathematical model of economics.

³ Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru

⁴ Graduate Student, Institut of Informatics and Telecommunication , M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, s.ovsianikov@yandex.ru

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929

Вещественный радиус устойчивости матрицы системы

© А. В. Zubov ¹, С. В. Zubov ²

Аннотация. В работе рассмотрен достаточно широкий класс матриц устойчивых по Важевскому, т. е. устойчивых матриц P для которых симметрическая матрица $P + P^T$ также устойчива. Для этого семейства матриц показано, что их вещественным радиусом устойчивости является наименьшее собственное число матрицы $-(P + P^T)/2$. Этот результат позволяет определить вещественный радиус устойчивости «сверхустойчивых» матриц, т. к. они являются матрицами устойчивыми по Важевскому.

Ключевые слова: матрица, устойчивость, вещественный радиус, спектральная норма, нестационарная система

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем называть матрицу P устойчивой по Важевскому, если матрица $H = \frac{P+P^T}{2}$ является устойчивой.

Введение подобного определения связано с тем, что Важевский, используя свойства дифференциальных уравнений, показал, что нестационарная система первого приближения $\dot{X} = P(t)X$ будет устойчива, если все собственные числа $\lambda_i(t)$ симметрической матрицы $H(t) = \frac{P(t)+P(t)^T}{2}$ удовлетворяют условию $\forall t \quad \lambda_i(t) \leq \lambda < 0$.

Очевидно, что если матрица P устойчива по Важевскому, то она устойчива [1]. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем называть вещественным радиусом устойчивости по Важевскому матрицы P наибольшее из чисел γ , при котором, матрица $P + \Delta$ - устойчива по Важевскому, где матрица Δ , удовлетворяет условию $\|\Delta\| < \gamma$. Здесь $\|\Delta\|$ - спектральная норма.

Задача определения вещественного радиуса устойчивости является весьма сложной и совсем недавно решена только для стационарных матриц, причем полученные оценки являются весьма трудно проверяемыми [3]. Вопрос заключается в исследовании устойчивости матрицы $P + \Delta$, где матрица P - устойчива, а вещественная матрица Δ , удовлетворяет условию $\|\Delta\| < \gamma$. Наибольшее из чисел γ , при котором матрица $P + \Delta$ - устойчива и называется вещественным радиусом устойчивости.

Справедливы теоремы.

Т е о р е м а 1.1. Если матрица P - устойчива по Важевскому, то вещественный радиус устойчивости по Важевскому можно определить по формуле $\gamma = \min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i$, где λ_i , $i = \overline{1,n}$ - собственные числа симметрической матрицы $H = \frac{P+P^T}{2}$.

¹ Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

² Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрица P - устойчива по Важевскому. Для того чтобы матрица $P + \Delta$ была также устойчива по Важевскому необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства

$$\forall X \neq 0 \quad X^T \left(\frac{P^T + P}{2} + \frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X < 0. \quad (1.1)$$

Заметим, что имеют место два очевидных неравенства

$$X^T \left(\frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X \leq \|\Delta\| \cdot \|X\|^2, \quad \|X\|^2 \min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i \leq X^T H X \leq \max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i \|X\|^2,$$

где $H = \frac{P+P^T}{2}$, а λ_i , $(\overline{1,n})$ ее собственные числа. Из этих неравенств вытекает, что при выполнении неравенства $\max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i + \|\Delta\| < 0$ выполняется и неравенство (1.1). Так как справедливо равенство - $\max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i = \min_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$, то одна из нижних оценок величины γ получена.

Для того чтобы убедиться в том, что найденное число γ , является наибольшим достаточно подобрать матрицу Δ так, что $\|\Delta\| = \min_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$, но при этом матрица $P + \Delta$ была неустойчива по Важевскому. Известно, что матрицу H можно привести к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования Q так, что $H = Q_1 \Lambda Q_1^T$. Для простоты будем считать, что диагональные элементы матрицы Λ расположены в порядке убывания. Возьмем матрицу $\Delta = Q_1 \Lambda_1 Q_1^T$, где Λ_1 - диагональная матрица с диагональными элементами равными $\min_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$. Тогда с одной стороны $\|\Delta\| = \min_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$, т. к. $\Delta = \Lambda_1$, а с другой если в качестве вектора X выбрать первый столбец матрицы Q_1 , то получим равенство

$$X^T \left(\frac{P + P^T}{2} + \frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X = 0.$$

Это показывает, что величина $\gamma = \min_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$ является вещественным радиусом устойчивости по Важевскому для матрицы P .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 1.1. Нетрудно видеть, что вещественный радиус устойчивости $\gamma = \min_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$ совпадает с минимальным собственным числом матрицы $-(P+P^T)/2$.

Т е о р е м а 1.2. Пусть матрицы $P_1, P_2, \dots, P_m$ устойчивы по Важевскому, тогда их любая выпуклая линейная комбинация

$$P = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

также устойчива по Важевскому.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрицы $P_1, P_2, \dots, P_m$ устойчивы по Важевскому, тогда $\forall X \quad X^T P_i X < 0, \quad i = \overline{1,m}$. Суммируя, получим

$$P = X^T \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i P_i \right) X = \sum_{i=1}^m \alpha_i X^T P_i X < 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Это означает, что матрица P устойчива по Важевскому. Кроме того, условие нормировки $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, является излишним. Можно заменить в этом равенстве единицу на любое положительное число.

Доказательство закончено.

З а м е ч а н и е 1.2. Полученный результат справедлив и для нестационарных матриц $P_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ для которых, собственные числа $\lambda_{ji}(t)$ симметрических матриц $H_j(t) = \frac{P_j(t) + P_j(t)^T}{2}$ удовлетворяют условиям $\forall t \quad \lambda_{ji}(t) \leq \lambda_j < 0$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 10-08-000624.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fan Ky, "On a Theorem of Weyl Concerning the Eigenvalues of Linear Transformation", . Nat. Acad. Sci. U.S.A., **35:1** (1949), 652 -655.
2. В.В. Дикусар Г.А. Зеленков Н.В. Zubov, *Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости*, Изд. ВЦ РАН, М., 2007, 234 с.
3. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М., 2002.
4. В.И. Zubov, *Введение в теорию устойчивости*, Наука, М., 1967, 223 с.
5. Л.Д. Блистанова и др., *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.
6. Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, Ил, М., 1954.
7. Н.М. Гюнтер, *Курс вариационного исчисления*, Гостехиздат, М., 1941.
8. В.Ф. Демьянов, *Условия экстремума и вариационные задачи*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, С.-Петербург, 2000.
9. В.И. Zubov, *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*, Судпромгиз, Л, 1959.
10. Н.Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1968.
11. Ж. Лагранж, *Аналитическая динамика*, Гостехиздат, М., 1950.
12. А.И. Лурье, *Аналитическая механика*, Физматгиз, М., 1961.
13. И.Г. Малкин, *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, М., 1949.

The material radius of stability of matrix system

© A. V. Zubov³, S. V. Zubov⁴

Abstract. In this work is looking off sufficiently classes of matrixes stability on Vagevsky, i. e. stability matrixes P for that symmetrical matrix $P + P^T$ also stability. For this family of matrixes is describes, that they material radius of stability is appears smaller own number of matrix - $(P + P^T)/2$. This result is allows to define material radius of stability «over stability» matrixes, i. e. they ia appears the matrixes stability on Vashevskiy.

Key Words: matrix, stability, material radius, spectral norma, in stationary system

³ Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁴ Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневожского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании. Объем рукописи не должен превышать 12 страниц для статьи, 20 страниц для обзорной статьи и 3-4 страницы для краткого сообщения. Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX. Компиляцию статьи необходимо производить с помощью MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте — <http://www.miktex.org>. В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF). Статья должна содержать следующие разделы:

- коды УДК;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО, e-mail, должность и место работы (официальное название организации);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи;
- список литературы.

Если статья на русском языке, то название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова необходимо так же предоставить и на английском языке. Если статья написана на английском языке, то отдельно представляются коды УДК, название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова на русском языке. Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок. Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, тему, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы. Объем аннотации должен быть в среднем от 100 до 250 слов.

Особое внимание необходимо уделить оформлению аннотаций на английском языке. Рекомендации по оформлению аннотаций на английском языке будут размещены на сайте журнала «Журнал Средневожского математического общества».

Раздел Ключевые слова должен содержать от 5 до 15 слов и четко указывать на основное содержание статьи. Не следует приводить в качестве ключевых слов общие понятия, так как поиск по ключевому слову не приведет читателя к нахождению интересующей его информации. Однако данное слово может входить в значимое словосочетание.

Авторам статей необходимо придерживаться следующей структуры статей:

- Введение - краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье.
- Материалы и методы решения задачи и принятые допущения.
- Результаты – основное содержание статьи.
- Обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.
- Заключение – выводы и рекомендации.

Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB (см. Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX). Список литературы

должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье. В оригинальных статьях допускается до 20, в обзорных – до 60 источников.

Подробные Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX содержатся на сайте журнала.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе TeX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\ footnote { Долж-
ность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\ footnote {Должность, место ра-
боты, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать ко-манду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место рабо-
ты, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-
mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , $\mathcal{D}_i$ в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}` {подпись_под_рисунком}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия}` {подпись_под_рисунком}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение `thebibliography`. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле `atmbib.pdf`. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл `svtobib.sty` (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\RBibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку `'ivanovb7'`. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Афонин В. В.	7	Кузнецов Ю. А.	58
Бурлакова Д. А.	58	Куренков Е.Д.	15
Гринес В. З.	27	Малкин М. И.	66
Гуревич Е.Я.	15	Мурюмин С. М.	7
Захаров В. К.	34	Мускатиный А. В.	7
Зубов А. В.	96	Мустафина С. А.	39
Зубов С. В.	96	Никишин Е. В.	76
Икрамов Р. Д.	39	Овсяников С. М.	85
Коледин С. Н.	43	Павлов А. Ю.	81
Коледина К. Ф.	43	Пескова Е. Е.	76
Коломиец М. Л.	51	Починка О. В.	27
Круглов Е. В.	58	Шиловская А. А.	27
Кузенков О. А.	34	Сахаров А. Н.	51

Юлдашев Т. К. 85

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.

Для заметок

Для заметок

Для заметок