ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 440, № 1, с. 11–14

МАТЕМАТИКА

УДК 517.938

СИСТЕМЫ МОРСА–СМЕЙЛА С ТРЕМЯ НЕБЛУЖДАЮЩИМИ ТОЧКАМИ

© 2011 г. Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Представлено академиком Д.В. Аносовым 30.03.2011 г.

Поступило 13.04.3011 г.

Важный класс, рассматриваемый в теории динамических систем, образуют системы Морса–Смейла, которые существуют на любом замкнутом многообразии и структурно устойчивы (грубые). Кроме того, имеются глубокие связи между динамикой систем и структурой несущего многообразия (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1, 2]; по системам Морса–Смейла см. обзор [3]). Известно, что любая система Морса–Смейла имеет хотя бы одну источниковую и хотя бы одну стоковую орбиту. Если неблуждающее множество диффеоморфизма Морса–Смейла состоит ровно из двух точек (источника и стока), то несущее многообразие является сферой соответствующей размерности и любые два сохраняющие ориентацию диффеоморфизма сопряжены. Аналогичный результат имеет место и для потоков Морса–Смейла. В [9] было доказано существование замкнутых n-многообразий, допускающих функции Морса ровно с тремя критическими точками. Отсюда и работы [12] вытекает существование систем Морса–Смейла ровно с тремя неподвижными точками: седло, источник и сток. Настоящая работа посвящена исследованию систем Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек. Следующая теорема дает описание несущего многообразия.

Т е о р е м а 1. *Пусть на замкнутом многообразии M^n задана система (диффеоморфизм или поток) Морса–Смейла, неблуждающее множество которой состоит из трех точек. Тогда*:

1) *размерность* $\dim M^n$ *многообразия может принимать только одно из следующих значений* $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;

2) M^2 *есть проективная плоскость*;

3) *при* $n \geq 4$ *группы* $\pi_1(M^n) = \pi_2(M^n) = \pi_{\frac{n}{2}-1}(M^n) = 0$ *и, следовательно,* M^n *ориентируемое*;

4) M^n *гомеоморфно компактификации евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$ *с помощью* $\frac{n}{2}$*-мерной сферы.*

Доказательство четности размерности многообразия основано на применении неравенств Морса [12]. Поскольку система имеет единственное седло, то из неравенств Морса вытекает равенство размерностей устойчивой и неустойчивой сепаратрис, что влечет четность размерности $\dim M^n$. Подсчет эйлеровой характеристики в двумерном случае показывает, что M^2 есть проективная плоскость. Далее рассматривается случай $n \geq 4$. Можно считать, что система является диффеоморфизмом $f\colon M^n \to M^n$ Морса–Смейла, так как сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока Морса–Смейла без периодических траекторий является диффеоморфизмом Морса–Смейла. Дадим необходимые определения.

Пусть $f\colon M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутого n-мерного ($n \geq 3$) многообразия M^n, σ – седловая периодическая точка диффеоморфизма f с k-мерным ($1 \leq k \leq n-1$) устойчивым $W^s(\sigma)$ или неустойчивым многообразием $W^u(\sigma)$. Множество $\mathrm{Sep}^\tau(\sigma) = W^\tau(\sigma)\setminus\{\sigma\}$ называется сепаратрисой (τ либо s, либо u). Если $\mathrm{Sep}^\tau(\sigma)$ не пересекается с сепаратрисами других седловых периодических точек, то $\mathrm{Sep}^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (если $\tau = s$) или устойчивому (если $\tau = u$) многообразию некоторой стоковой периодической точки, скажем N. Тогда топологическое замыкание сепаратрисы $\mathrm{Sep}^\tau(\sigma)$ равно $W^\tau(\sigma) \cup \{N\}$ и является топологически вложенной в M^n k-сферой.

Возможность дикого вложения топологического замыкания сепаратрис седловых периодических точек была открыта Пикстоном [11] для диффеоморфизмов Морса–Смейла трехмерной сферы. При решении проблемы классификации возможность дикого вложения была также независимо открыта Бонатти и Гринесом [8]. Анализ

Нижегородский государственный педагогический университет

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского

возможности диких вложений замыканий сепаратрис (упрощая текст, будем писать дико вложенные сепаратрисы) для простейших градиентных потоков и градиентно-подобных диффеоморфизмов Морса–Смейла на замкнутых многообразиях размерности $n \geq 4$ до настоящего времени не проводился. Дальнейшее доказательство теоремы 1 основано на следующей теореме, которая имеет самостоятельный интерес и относится к случаю $n \geq 4$.

Теорема 2. *Пусть на замкнутом многообразии M^n размерности $n \geq 4$ задана система Морса–Смейла $\mathcal{U}$, неблуждающее множество которой состоит из трех точек: стока ω, источника α и седла σ. Тогда*:

1) *замыкания неустойчивой* $\mathrm{Sep}^u(\sigma)$ *и устойчивой* $\mathrm{Sep}^s(\sigma)$ *сепаратрис седла σ являются топологически вложенными $\frac{n}{2}$-мерными сферами $W^u(\sigma) \cup \{\omega\} = S_\omega$, $W^s(\sigma) \cup \{\alpha\} = S_\alpha$ соответственно*;

2) *при $n \in \{8, 16\}$ сферы S_ω, S_α локально плоские*;

3) *при $n = 4$ если система $\mathcal{U}$ есть поток, то сферы S_ω, S_α также локально плоские, а если система $\mathcal{U}$ есть диффеоморфизм f, то существует f: $M^4 \to M^4$, такой что сферы S_ω и S_α дико вложены.*

Доказательство теоремы 2 проводится по следующей схеме. При $n \geq 6$ сферы S_ω и S_α имеют коразмерность не менее трех. Из [6] следует, что S_ω и S_α локально плоские. Возьмем трубчатую окрестность T одной из них, например S_ω, которая гомеоморфна локально тривиальному расслоению (обозначим его через $\mathcal{B}$) над сферой S_ω со слоем $D^{\frac{n}{2}}$. Поскольку неблуждающее множество состоит ровно из трех точек, то граница ∂T принадлежит неустойчивому многообразию источника α, которое гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Из односвязности сферы S_ω следует, что расслоение $\mathcal{B}$ ориентируемое. Поэтому на ∂T существует векторное поле, трансверсальное ∂T и направленного в каждом слое $D^{\frac{n}{2}}$ расслоения $\mathcal{B}$ к центру $D^{\frac{n}{2}}$. Отсюда вытекает, что ∂T гомеоморфно $(n-1)$-сфере S^{n-1} [4]. Расслоение $\mathcal{B}$ индуцирует расслоение сферы S^{n-1} над $\frac{n}{2}$-сферой со слоем, гомеоморфным $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$-сфере. Согласно [5], такие расслоения при $n \geq 4$ существуют только при $n - 1 = 7$, $n - 1 = 15$ и являются расслоениями хопфова типа $S^7 \to S^4$, $S^{15} \to S^8$ соответственно. Из приведенного рассуждения также вытекает, что после удаления одной точки многообразие M^n имеет гомотопический тип $\frac{n}{2}$-сферы. Поэтому $\pi_1(M^n) = \pi_2(M^n) = \ldots = \pi_{\frac{n}{2}-1}(M^n) = 0$ при $n \geq 8$. Конструкция диффеоморфизма f: $M^4 \to M^4$ с дико вложенными сферами S_ω и S_α следует работам [8, 11] (и будет представлена в отдельной работе). Непосредственно из условия следует, что при любом $n \geq 4$ многообразие M^n является объединением неустойчивого многообразия источника α, которое гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, и $\frac{n}{2}$-мерной сферы S_ω. Отсюда вытекает, что $\pi_1(M^4) = 0$. Это завершает доказательство теоремы 1. Для завершения доказательства теоремы 2 осталось рассмотреть случай потока $\mathcal{U} = f^t$ на M^4.

Окружим узлы потока f^t четырехмерными шарами B_1, B_2, такими что их границы ∂B_1, ∂B_2 трансверсальны потоку, а седло σ принадлежит $M^4 \backslash (B_1 \cup B_2)$. Тогда сепаратрисы $\mathrm{Sep}^u(\sigma)$, $\mathrm{Sep}^s(\sigma)$ пересекают ∂B_1, ∂B_2 по замкнутым простым кривым C^u, C^s соответственно. Отметим, что поток индуцирует отображения последования Пуанкаре ψ: $\partial B_2 \backslash C^s \to \partial B_1 \backslash C^u$, и 3-сфера ∂B_1 получается из 3-сферы ∂B_2 в результате перестройки ∂B_2 по узлу C^s с помощью отображения, которое индуцирует ψ на границе трубчатой окрестности узла C^s. Предположим, что одна из кривых, скажем C^s, заузлена в ∂B_2. Поскольку узлы C^u, C^s являются пересечениями сепаратрис седла типа (2; 2), то указанная выше перестройка нетривиальна. С другой стороны, согласно [10], нетривиальная перестройка трехмерной сферы по заузленной кривой всегда дает многообразие, отличное от 3-сферы. Полученное противоречие показывает, что C^u, C^s являются тривиальными узлами в ∂B_1, ∂B_2 соответственно. Отсюда вытекает, что сферы S_ω и S_α локально плоские.

Одной из причин отсутствия полной классификации систем Морса–Смейла на замкнутых многообразиях размерности большей двух является возможность дикого вложения сепаратрис седловых периодических точек. Для некоторых классов систем Морса–Смейла, не имеющих диких вложений сепаратрис, получена полная классификация, см. обзор результатов в [3]. При наличии диких вложений сепаратрис классификация значительно усложняется. Например, Бонатти и Гринес [8] доказали, что на трехмерной сфере существует счетное семейство попарно не сопряженных диффеоморфизмов Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит их трех узлов и седла. Классификационным инвариантом таких систем оказался тип узла в специальном 3-многообразии. Учитывая эти результаты, а также используя теорему 2 и конструкцию построения диффеоморфизмов $f\colon M^4 \to M^4$ с дико вложенными сепаратрисами, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Любые потоки Морса–Смейла f^t, g^t, неблуждающее множество которых состоит из трех точек, на замкнутом четырехмерном многообразии M^4 топологически эквивалентны. Однако на замкнутых четырехмерных многообразиях существует счетное семейство попарно не сопряженных диффеоморфизмов Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек.*

Следующая теорема показывает, что дикие вложения сепаратрис возможны у градиентных потоков Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из четырех неподвижных точек.

Теорема 4. *Для любого $n \geq 4$ существуют замкнутое многообразие M^n и градиентный полярный поток Морса–Смейла f^t на M^n, такие что f^t не имеет гетероклинических пересечений, неблуждающее множество f^t состоит из четырех неподвижных точек, и замыкание одной из сепаратрис потока f^t является дико вложенной сферой коразмерности два.*

Идея построения следующая. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ линейное векторное поле $\mathbf{V}_n$, определяемое системой $\dot{x}_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что начало координат $O = (0, 0, \ldots, 0)$ является отталкивающим узлом, а $(n-1)$-мерная сфера $S_1^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ – трансверсальной сферой поля $\mathbf{V}_n$. Отметим, что каждая траектория поля $\mathbf{V}_n$ пересекает S_1^{n-1} ровно в одной точке. Пусть S_1^{n-3} – гладко вложенная в S_1^{n-1} $(n-3)$-мерная сфера, заузленная в S_1^{n-1} (это означает, что дополнение к S_1^{n-3} в S_1^{n-1} не имеет гомотопического типа окружности; известно, что такие сферы коразмерности 2 существуют). Пусть $T(S_1^{n-3}) \subset S_1^{n-1}$ – замкнутая трубчатая окрестность сферы S_1^{n-3}, диффеоморфная $S_1^{n-3} \leq D^2$. Обозначим через Q^n множество, образованное лучами, выходящими из начала координат O, которые пересекают $T(S_1^{n-3})$. Поскольку граница $T(S_1^{n-3})$ диффеоморфна $S^{n-3} \times S^1$, а S_1^{n-1} трансверсальна полю $\mathbf{V}_n$, то граница множества Q^n диффеоморфна $S^{n-3} \times S^1 \times \mathbb{R}$. Следовательно, если удалить из $\mathbb{R}^n$ внутренность множества Q^n, то получим множество R, граница которого диффеоморфна $S^{n-3} \times S^1 \times \mathbb{R}$. Возьмем инвариантную окрестность U_0 линейного седла типа $(n-2, 2)$ с границей H^{n-1}, диффеоморфной $S^{n-3} \times S^1 \times \mathbb{R}$, и склеим U_0 с R с помощью естественного диффеоморфизма η: $H^{n-1} \to \partial R$. Обозначим через R_n (открытое) многообразие $U_0 \cup_\eta R$. Векторные поля на границах R и U_0 согласованы и образуют гладкое векторное поле $\mathbf{v}$ на R_n с источником и седлом типа $(n-2, 2)$. Возьмем часть B_n многообразия R_n, содержащую состояния равновесия и ограниченную замкнутым подмногообразием ∂B_n, таким что $\mathbf{v}$ трансверсально ∂B_n и направлено наружу B_n. Возьмем копию B_n' многообразия B_n с векторным полем $-\mathbf{v}$. Рассмотрим многообразие $B_n \cup_\psi B_n' \overset{\text{def}}{=} M^n$, полученное из B_n, B_n' после отождествления их границ посредством естественного диффеоморфизма ψ. Ясно, что ψ можно взять таким, чтобы сепаратрисы седел не пересекались. Из свойств векторных полей $\mathbf{v}$, $-\mathbf{v}$ вблизи границ ∂B_n, $\partial B_n'$ соответственно следует, что они задают на M^n векторное поле $\mathbf{V}$, которое индуцирует полярный градиентный поток $f_{2,\,n-2}^t$ Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит из четырех неподвижных точек: двух узлов O, O' и двух седел s_0, s_0'. В силу построения неустойчивый узел O и часть сепаратрисы $W^s(s_0) - s_0$, лежащая в $\mathbb{B}^n$, является топологической надстройкой над S_1^{n-3}. Согласно [7], дополнение к $W^s(s_0) \cup O$ в $\mathbb{B}^n$ также не имеет гомотопического типа окружности (фундаментальные группы указанных дополнений изоморфны). Из теоремы 1 из [6] следует, что сфера $W^s(s_0) \cup O$ не является локально плоской в O.

Авторы благодарят Д.В. Аносова и В.З. Гринеса за полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В.* В сб.: Современные проблемы математики. М., 1985. Т. 1. С. 156–204.
2. *Аносов Д.В., Солодов В.В.* В сб.: Современные проблемы математики. М., 1991. Т. 66. С. 12–99.
3. *Жужома Е.В., Медведев В.С.* // Тр. Мат. ин-та РАН. 2008. Т. 261. С. 1–25.
4. *Медведев В.С., Уманский Я.Л.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38. С. 1324–1342.

5. *Новиков С.П.* Топология. М.: Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
6. *Чернавский А.В.* // ДАН. 1966. Т. 167. № 3. С. 528–530.
7. *Andrews J., Curtis M.* // Ann. Math. 1959. V. 70. № 3. P. 565–571.
8. *Bonatti Ch., Grines V.* // J. Dyn. and Control Syst. 2000. V. 6. P. 579–602.
9. *Eells J., Kuiper N.* // Publ. Math. IHES. 1962. V. 14. P. 5–46.
10. *Gordon C. McA., Luecke J.* // J. Amer. Math. Soc. 1989. V. 2. P. 371–415.
11. *Pixton D.* // Topology. 1977. V. 16. P. 167–172.
12. *Smale S.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 43–49.