ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

*А.С. Шведов*

# БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ МАТРИЦЫ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В МОДЕЛИ СОСТОЯНИЕ-НАБЛЮДЕНИЕ

Препринт WP2/2009/01
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва
Государственный университет – Высшая школа экономики
2009

УДК 519.246
ББК 22.172
Ш34

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
*В.А. Бессонов*

Ш 34 **Шведов А.С. Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение**. Препринт WP2/2009/01. — М.: Государственный университет — Высшая школа экономики, 2009. — 36 с.

В работе изучаются случайные матрицы, имеющие бета-распределение, задаваемое двумя векторными параметрами. Показана возможность использования таких случайных матриц в эконометрических моделях состояние-наблюдение.

УДК 519.246
ББК 22.172

*Классификация JEL:* C14, C32.

*Ключевые слова:* бета-распределение случайной матрицы; модели состояние-наблюдение.

**Shvedov A.S. Matrix Variate Beta Distribution with Application to State Space Models.** Working paper WP2/2009/01. — Moscow: State University — Higher School of Economics, 2009. – 36 p. (in Russian).

This paper is concerned with a matrix variate beta distribution. Two vector parameters determine the distribution. It is applied to state space models.

*JEL Classification*: C14, C32.

*Key phrases*: matrix variate beta distribution; state space models.

**Препринты Государственного университета – Высшей школы экономики размещаются на сайте http://new.hse.ru/C3/C18/preprintsID/default.aspx**

## 1. Введение

Первая часть данной работы содержит ряд новых теорем про бета-распределение случайной матрицы. Во второй части работы изучается модель состояние-наблюдение, при этом используются некоторые теоремы из первой части работы. Частные случаи этой модели были известны и раньше, и применяются в прикладных исследованиях. Одна из областей таких исследований – портфельная теория. Роль эконометрической модели для доходностей активов при решении многопериодной портфельной задачи объясняется, например, в [12]. Полученные теоремы про бета-распределение позволяют построить модель, которая обладает определенными теоретическими преимуществами.

И по тому, и по другому направлению к настоящему времени опубликовано значительное количество научных работ. Из приведенных в библиографическом списке к первому направлению, то есть к теории бета-распределения случайной матрицы, относятся работы [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]. Ко второму направлению, то есть к моделям состояние-наблюдение, относятся работы [1], [9], [10], [11]. Подробное соотнесение результатов, полученных в настоящей работе, с результатами, полученными ранее другими авторами, дается в разделах 2 и 4 после доказательства каждого результата. Результаты из раздела 3 соотносятся с результатами, полученными другими авторами, в заключительной части введения.

В работе существенно используется гамма-распределение случайной матрицы, основанное на одном кратном интеграле, принадлежащем Беллману. Дадим определение этого распределения (см. [2], [3, с. 122 – 123]).

Рассмотрим симметричную $d \times d$ матрицу

$$s = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1d} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1d} & s_{2d} & \dots & s_{dd} \end{pmatrix}.$$

Область, состоящую из точек $d(d+1)/2$-мерного евклидова пространства $(s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1d}, s_{22}, \dots, s_{2d}, \dots, s_{dd})$, для которых матрица $s$ является положительно определенной, обозначим $s > 0$.

Для $d \times d$ матрицы $C$, не обязательно симметричной,

$$C = \{c_{ij}\}, \quad 1 \le i, j \le d,$$

рассмотрим подматрицы

$$C^{[k]} = \left\{c_{ij}\right\}, \quad 1 \le i, j \le k ,$$

и

$$C_{[k]} = \left\{c_{ij}\right\}, \quad d-k+1 \le i, j \le d ,$$

где $k = 1,...,d$ .

Рассмотрим вектор $a = \left(a_1,...,a_d\right)$ такой, что

$$a_j > \frac{j-1}{2}, \qquad j = 1,...,d . \tag{1}$$

Дополнительно положим $a_0 = 0,\ a_{d+1} = \left(d+1\right)/2$ .

Введем обозначение

$$\Gamma_d^*\left(a\right) = \pi^{d(d-1)/4} \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(a_j - \frac{j-1}{2}\right), \tag{2}$$

где $\Gamma\left(\cdot\right)$ – гамма-функция.

Для вектора $a$ , удовлетворяющего условию (1), и для положительно определенной $d \times d$ матрицы $A$ введем обозначение

$$\gamma_{a,A} = \left(\Gamma_d^*\left(a\right)\prod_{j=0}^{d-1}\left|A^{[d-j]}\right|^{a_j - a_{j+1}}\right)^{-1} , \tag{3}$$

где через $\left|C\right|$ обозначается определитель матрицы $C$ . Будем использовать обозначение $etr\left(C\right)$ для $\exp\left(tr\left(C\right)\right)$. В области $s > 0$ рассмотрим функцию

$$f_G\left(s\right) = \gamma_{a,A}\ etr\left(-As\right)\prod_{j=1}^{d}\left|s_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}} . \tag{4}$$

<u>Теорема 1.</u> Для любого вектора $a$ , удовлетворяющего условию (1), и для положительно определенной $d \times d$ матрицы $A$

$$\int\limits_{s>0} f_G(s)\, ds = 1 ,$$

где $ds = ds_{11}ds_{12}...ds_{1d}ds_{22}...ds_{2d}...ds_{dd}$ .

Теорема 1 доказана в работе [2]. Другое доказательство этой теоремы дается в [7].

Теорема 1 показывает, что функция $f_G\left(s\right)$ является функцией плотности. (Положительность функции $f_G\left(s\right)$ в области $s > 0$ следует из леммы 2 раздела 5.) Распределение вероятностей положительно определенной $d \times d$ случайной матрицы, отвечающее этой функции плотности, будем обозначать $G_d(a, A)$ и называть гамма-распределением, задаваемым векторным параметром $a$ и положительно определенной матрицей $A$. Если $a_1 = ... = a_d$, то данное гамма-распределение совпадает с обычным гамма-распределением случайной матрицы, задаваемым скалярным параметром $a$ и положительно определенной матрицей $A$. Если $a_1 = ... = a_d = \frac{\nu}{2}$, где $\nu$ – натуральное число, то рассматриваемое гамма-распределение совпадает с распределением Уишарта.

Методика построения случайной матрицы, имеющей бета-распределение, при помощи двух независимых случайных матриц, имеющих обычные гамма-распределения, хорошо известна. В разделе 2 настоящей работы эта же методика применяется, когда независимые случайные матрицы имеют гамма-распределения, задаваемые не скалярными, а векторными параметрами. Таким образом строится случайная матрица, имеющая бета-распределение, задаваемое двумя векторными параметрами.

В разделе 3 данной работы изучается многомерная модель состояние-наблюдение. Чтобы сделать изложение более наглядным, здесь, во введении, дается описание одномерного аналога данной модели.

Напомним, что совместное распределение двух случайных величин $\mu$ и $\Theta$ называется нормальным-гамма с параметрами $m, \kappa, a, A$, где $m$ – действительное число, $\kappa, a, A$ – положительные числа, если совместная функция плотности этих случайных величин имеет вид

$$f_{NG}(x,s) = (2\pi)^{-1/2} (\kappa s)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\kappa s (x-m)^2\right) \cdot \\ \cdot \frac{A^a}{\Gamma(a)} \exp(-As) s^{a-1}, \tag{5}$$

где $x$ принимает действительные значения, $s$ принимает положительные значения. Маргинальной функцией распределения случайной величины $\Theta$ является функция распределения $G(a, A)$. (При рассмотрении одномерных распределений используется обозначение $G(a, A)$ вместо $G_1(a, A)$.) Условной функцией распределения случайной величины $\mu$ при условии $\Theta = s$ является функция распределения $N\left(m, (\kappa s)^{-1}\right)$. Через $N$ обозначается одномерное нормальное распределение.

Пусть $\lambda$ – фиксированное положительное число. Предположим, что априорное распределение случайных величин $\mu_0$ и $\Theta_0$ – это нормальное-гамма распределение с параметрами $m_0, 1+\lambda, a_0, A_0$.

Уравнение для состояния имеет вид

$$\Theta_t = \Theta_{t-1} L_{t-1}^2 \mathrm{H}_t, \quad \text{где} \quad \mathrm{H}_t \sim B(c_{t-1}, b_{t-1}),$$
$$\mu_t = m_{t-1} + \zeta_t, \quad \text{где} \quad \zeta_t \sim N\left(0, \left(\lambda\Theta_t\right)^{-1}\right). \tag{6}$$

Через $B$ обозначается одномерное бета-распределение.

Уравнение для наблюдения имеет вид

$$y_t = \mu_t + \xi_t, \quad \text{где} \quad \xi_t \sim N\left(0, \Theta_t^{-1}\right). \tag{7}$$

Случайные величины $\mathrm{H}_t$, $\zeta_t$, $\xi_t$ независимы. Поясним сначала значение величины $L_{t-1}^2$, а затем значение других входящих в модель величин. Из первого уравнения состояния имеем

$$\log\Theta_t = \log\Theta_{t-1} + \log L_{t-1}^2 + \log\mathrm{H}_t.$$

Чтобы процесс для $\log\Theta_t$ был процессом случайного блуждания, должно выполняться условие

$$\log L_{t-1}^2 = -E\left(\log\mathrm{H}_t\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что $L_{t-1}^2 > 1$.

Обозначим через $Y_t$ набор наблюдений $y_1, \ldots, y_t$. Предположим, что условное распределение $\mu_{t-1}, \Theta_{t-1} \middle| Y_{t-1}$ – это нормальное-гамма распределение с параметрами $m_{t-1}, 1+\lambda, a_{t-1}, A_{t-1}$. Используя уравнение для состояния, можно показать, что условное распределение $\mu_t, \Theta_t \middle| Y_{t-1}$ – это нормальное-гамма распределение с параметрами $m_{t|t-1}, \lambda, a_{t|t-1}, A_{t|t-1}$. В многомерном случае выражения для параметров $m_{t|t-1}, a_{t|t-1}, A_{t|t-1}$ даются теоремой 6, и здесь мы эти выражения не повторяем. Единственное условие, которому должны удовлетворять величины $c_{t-1}$ и $b_{t-1}$ состоит в том, что $c_{t-1} + b_{t-1} = a_{t-1}$.

Затем, используя уравнение для наблюдения, можно показать, что условное распределение $\mu_t, \Theta_t \middle| Y_t$ – это нормальное-гамма распределение с параметрами $m_t, 1+\lambda, a_t, A_t$. В многомерном случае выражения для параметров $m_t, a_t, A_t$ даются теоремой 7, и здесь мы эти выражения не повторяем.

Если в какой-то момент времени $t$ дисперсия случайной величины $\xi_t$ оказалась большой, то есть величина $\Theta_t$ оказалась малой, то, согласно первому из уравнений состояния, величина $\Theta_t$ будет продолжать оставаться достаточно малой и для последующих моментов времени $t$, а значит и дисперсия случайных величин $\xi_t$ для этих моментов времени будет достаточно большой. Таким образом, в рассмотренной модели состояние-наблюдение достигается тот же эффект, что и в моделях GARCH, но другими средствами.

Не пытаясь дать полный список, назовем несколько работ, где изучается модель состояние-наблюдение представленного типа. Одномерная модель несколько иной формы, но при изучении которой выводятся соотношения, являющиеся основными для описанной выше модели, содержится в [1]. Одномерная модель (6), (7) (с нулевыми $\mu_t$) в современной форме сходной с фильтром Калмана дается в [10], и там же доказываются одномерные аналоги теорем 6 и 7 из настоящей работы. Также в [10] рассматривается и случай ненулевых $\mu_t$, но с несколько других позиций. Многомерные аналоги данной модели состояние-наблюдение рассматриваются в работах [9], [11], но там используется лишь бета-распределение случайной матрицы, задаваемое двумя скалярными параметрами, хотя в работе [11] и сингулярное. Модели данного типа, в которых используется бета-распределение случайной матрицы, задаваемое двумя векторными параметрами, впервые рассматриваются в настоящей работе. Некоторые соображения о преимуществе такого подхода высказываются после теоремы 2.

В разделе 4 строится прогнозное распределение для изучаемой многомерной модели состояние-наблюдение.

## 2. Бета-распределение случайной матрицы, задаваемое двумя векторными параметрами

Пусть вектор $a = (a_1, \ldots, a_d)$ удовлетворяет условиям (1), и таким же условиям удовлетворяет вектор $b = (b_1, \ldots, b_d)$, то есть $b_j > \frac{j-1}{2}$, $j = 1, \ldots, d$, $b_0 = 0,\ b_{d+1} = (d+1)/2$. Введем обозначение

$$\mathrm{B}_d^*(a,b) = \frac{\Gamma_d^*(a)\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a+b)}, \tag{8}$$

где функция $\Gamma_d^*(\cdot)$ задается формулой (2). Координаты вектора $a+b$ определяются следующим образом: $(a+b)_j = a_j + b_j$ при $j = 0,...,d$, $(a+b)_{d+1} = (d+1)/2$.

Пусть $A$ – положительно определенная $d \times d$ матрица.

Рассмотрим положительно определенные $d \times d$ случайные матрицы $X$ и $Y$, $X \sim G_d(a, A)$, $Y \sim G_d(b, A)$, $X$ и $Y$ независимы. Положим $Z = X + Y$ и пусть

$$Z = L'L,$$

где $L$ – нижняя треугольная $d \times d$ случайная матрица с положительными диагональными элементами (см. лемма 4, раздел 5). Определим случайную матрицу

$$W = L'^{-1} X L^{-1}.$$

<u>Теорема 2.</u> Функция плотности случайной матрицы $W$ имеет вид

$$f_W(w) = \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b)} \prod_{j=1}^{d} \left| w_{[j]} \right|^{a_j - a_{j+1}} \prod_{j=1}^{d} \left| (I-w)_{[j]} \right|^{b_j - b_{j+1}}$$

при $0 < w < I$.

Условие $0 < w < I$ означает, что матрица $w$ положительно определенная, и матрица $I - w$ положительно определенная; здесь $I$ – единичная $d \times d$ матрица.

<u>Доказательство.</u> Пусть $x$ и $y$ – положительно определенные $d \times d$ матрицы, $z = x + y$ и $z = l'l$, где $l$ – нижняя треугольная $d \times d$ матрица с положительными диагональными элементами, $w = l'^{-1} x l^{-1}$.

Найдем $J(x, y; l, w)$ (см. определение в разделе 5 перед формулировкой леммы 10). Заметим, что

$$x = l'wl, \qquad y = l'(I-w)l,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial(y)}{\partial(w)} = -\frac{\partial(x)}{\partial(w)}. \tag{9}$$

По лемме 10 определитель матрицы $\dfrac{\partial(x)}{\partial(w)}$ ненулевой. Следовательно, и определитель матрицы $\dfrac{\partial(y)}{\partial(w)}$ ненулевой. Поэтому можно применить лемму 3, согласно которой для определителя матрицы

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(l,w)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(x)}{\partial(l)} & \dfrac{\partial(y)}{\partial(l)}\\ \dfrac{\partial(x)}{\partial(w)} & \dfrac{\partial(y)}{\partial(w)}\end{pmatrix}$$

имеет место выражение

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(l,w)}\right|=\left|\frac{\partial(x)}{\partial(l)}-\frac{\partial(y)}{\partial(l)}\left(\frac{\partial(y)}{\partial(w)}\right)^{-1}\frac{\partial(x)}{\partial(w)}\right|\cdot\left|\frac{\partial(y)}{\partial(w)}\right|=\left|\frac{\partial(z)}{\partial(l)}\right|\cdot\left|\frac{\partial(y)}{\partial(w)}\right|,$$

при последнем переходе использовано соотношение (9). По лемме 11

$$J(z;l)=2^d\prod_{j=1}^{d}l_{jj}^{j}$$

и по лемме 10

$$J(y;w)=J(x;w)=|l|^{d+1}.$$

Таким образом,

$$J(x,y;l,w)=2^d|l|^{d+1}\prod_{j=1}^{d}l_{jj}^{j}.$$

Пусть $f_{X,Y}(x,y)$ – совместная функция плотности случайных матриц $X$ и $Y$. Тогда совместная функция плотности случайных матриц $L$ и $W$ имеет вид

$$f_{L,W}(l,w)=f_{X,Y}(x,y)\ J(x,y;l,w).$$

Поэтому согласно (4)

$$f_{L,W}(l,w)=\gamma_{a,A}\ etr(-Ax)\prod_{j=1}^{d}\left|x_{[j]}\right|^{a_j-a_{j+1}}\ \gamma_{b,A}\ etr(-Ay)\prod_{j=1}^{d}\left|y_{[j]}\right|^{b_j-b_{j+1}}$$

$$2^d|l|^{d+1}\prod_{j=1}^{d}l_{jj}^{j}.$$

С помощью леммы 6 раздела 5 при $j=1,\dots,d$ получаем

$$x_{[j]}=l'_{[j]}w_{[j]}l_{[j]},\qquad y_{[j]}=l'_{[j]}(I-w)_{[j]}l_{[j]},$$

откуда

$$\left|x_{[j]}\right|=\left|w_{[j]}\right|\prod_{i=d-j+1}^{d}l_{ii}^2,\qquad \left|y_{[j]}\right|=\left|(I-w)_{[j]}\right|\prod_{i=d-j+1}^{d}l_{ii}^2.$$

Введем обозначение

$$R=\prod_{j=1}^{d}\left|w_{[j]}\right|^{a_j-a_{j+1}}\ \prod_{j=1}^{d}\left|(I-w)_{[j]}\right|^{b_j-b_{j+1}}.$$

Тогда

$$f_{L,W}(l,w) = \gamma_{a,A}\ \gamma_{b,A}\ R\cdot etr(-Al'l)\cdot$$
$$\cdot\left\{\prod_{j=1}^{d}\ \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{2(a_j+b_j-a_{j+1}-b_{j+1})} 2^d |l|^{d+1} \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{i}\right\}.$$

Положим $c_j = a_j + b_j$ при $j = 1,...,d$, $c_0 = 0, c_{d+1} = (d+1)/2$. Тогда выражение, стоящее в фигурных скобках, оказывается равным

$$2^d \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{2(c_{d-i+1}-(d+1))} \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{d+1} \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{i} = 2^d \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{2(c_{d-i+1}-(d-i+1)/2)}.$$

Перейдем от переменных $l, w$ к переменным $z, w$. По лемме 11

$$J(z,w;l,w) = J(z;l) = 2^d \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^{j}.$$

Поэтому

$$J(l,w;z,w) = 2^{-d} \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^{-j},$$

откуда

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{L,W}(l,w) J(l,w;z,w) = \gamma_{a,A}\ \gamma_{b,A}\ R\cdot etr(-Al'l) \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{2(c_{d-i+1}-(d+1)/2)}.$$

С помощью леммы 6 при $j = 1,...,d$ получаем

$$z_{[j]} = l'_{[j]} l_{[j]},$$

откуда

$$|z_{[j]}| = \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{2}.$$

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{d} |z_{[j]}|^{c_j-c_{j+1}} = \prod_{i=1}^{d}\ \prod_{j=d-i+1}^{d} l_{ii}^{2(c_j-c_{j+1})} = \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{2(c_{d-i+1}-(d+1)/2)}.$$

Воспользовавшись (3) и (8), нетрудно заметить, что

$$\gamma_{a,A}\ \gamma_{b,A} = \gamma_{c,A}\ \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b)}.$$

Таким образом,

$$f_{Z,W}(z,w) = \gamma_{c,A}\ etr(-Az) \prod_{j=1}^{d} |z_{[j]}|^{c_j-c_{j+1}}\ \frac{R}{\mathrm{B}_d^*(a,b)}.$$

Из (4) и теоремы 1 следует, что маргинальная функция плотности случайной матрицы $W$ имеет тот вид, который дается в формулировке доказываемой теоремы.

Теорема 2 доказана.

Функция $f_W(w)$ из формулировки теоремы 2 рассматривается в работах [3, с. 24 – 25] и [7], и там доказывается, что $\int\limits_{0<w<I} f_W(w)\,dw = 1$.

Распределение вероятностей положительно определенной $d \times d$ случайной матрицы $W$, отвечающее функции плотности $f_W(w)$, которая приведена в формулировке теоремы 2, будем называть бета-распределением, задаваемым двумя векторными параметрами $a$ и $b$, и обозначать $B_d(a,b)$. Если выполняется условие

$$a_1 = \ldots = a_d, \qquad b_1 = \ldots = b_d,$$

то бета-распределение случайной матрицы, задаваемое двумя векторными параметрами, совпадает с хорошо известным бета-распределением случайной матрицы, задаваемым двумя скалярными параметрами. Бета-распределение случайной матрицы, задаваемое двумя скалярными параметрами, подробно изучается, например, в книгах [3], [4], [6].

Может быть названо следующее преимущество бета-распределения случайной матрицы, задаваемого двумя векторными параметрами, перед бета-распределением случайной матрицы, задаваемым двумя скалярными параметрами. Это более широкие возможности выбора распределения при моделировании многомерных наблюдений. В каких-то случаях двух скалярных параметров может оказаться недостаточно.

Из полученной в доказательстве теоремы 2 формулы для совместной функции плотности $f_{Z,W}(z,w)$ следует, что $Z \sim G_d(c,A)$ и случайные матрицы $Z$ и $W$ независимы.

Пусть $W \sim B_d(a,b)$, $\psi_1$ и $\psi_2$ – две $d \times d$ матрицы такие, что матрица $\psi_2 - \psi_1$ положительно определенная, и пусть

$$\psi_2 - \psi_1 = l'l,$$

где $l$ – нижняя треугольная $d \times d$ матрица с положительными диагональными элементами. Определим случайную матрицу

$$X = l'Wl + \psi_1.$$

<u>Теорема 3.</u> Функция плотности случайной матрицы $X$ имеет вид

$$f_X(x) = \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b)} \prod_{j=1}^{d} \left|(x-\psi_1)_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}} \prod_{j=1}^{d} \left|(\psi_2 - x)_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d} \left|(\psi_2 - \psi_1)_{[j]}\right|^{-(c_j - c_{j+1})}$$

при $\psi_1 < x < \psi_2$. Здесь $c_j = a_j + b_j$ при $j = 1,...,d$, $c_{d+1} = (d+1)/2$.

Условие $\psi_1 < x < \psi_2$ означает, что матрица $x - \psi_1$ положительно определенная и матрица $\psi_2 - x$ положительно определенная.

Доказательство. Пусть $w$ – положительно определенная $d \times d$ матрица, $x = l' w l + \psi_1$. По лемме 10 из раздела 5

$$J(w;x) = |l|^{-(d+1)} = |\psi_2 - \psi_1|^{-(d+1)/2}.$$

Функция плотности случайной матрицы $X$ имеет вид

$$f_X(x) = f_W\left(l'^{-1}(x - \psi_1)l^{-1}\right) J(w;x).$$

С помощью леммы 6 при $j = 1,...,d$ получаем

$$(x - \psi_1)_{[j]} = l'_{[j]} w_{[j]} l_{[j]}, \qquad (\psi_2 - x)_{[j]} = l'_{[j]} (I - w)_{[j]} l_{[j]},$$

$$(\psi_2 - \psi_1)_{[j]} = l'_{[j]} l_{[j]},$$

откуда

$$\left|w_{[j]}\right| = \left|(x - \psi_1)_{[j]}\right| \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{-2}, \quad \left|(I - w)_{[j]}\right| = \left|(\psi_2 - x)_{[j]}\right| \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{-2},$$

$$\left|(\psi_2 - \psi_1)_{[j]}\right| = \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{2}.$$

Используя выражение для функции $f_W$, полученное в теореме 2, находим

$$f_X(x) = \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b)} \prod_{j=1}^{d} \left|(x - \psi_1)_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}} \prod_{j=1}^{d} \left|(\psi_2 - x)_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d} \left|(\psi_2 - \psi_1)_{[j]}\right|^{-(a_j - a_{j+1})} \prod_{j=1}^{d} \left|(\psi_2 - \psi_1)_{[j]}\right|^{-(b_j - b_{j+1})} \cdot$$

$$\cdot \left|\psi_2 - \psi_1\right|^{-(d+1)/2}.$$

Теорема 3 доказана.

Распределение вероятностей положительно определенной случайной матрицы $X$, отвечающее функции плотности, которая приведена в формулировке теоремы 3, будем называть обобщенным бета-распределением, задаваемым векторными параметрами $a$ и $b$ и матричными параметрами $\psi_1$ и $\psi_2$, и обозначать $B_d(a,b,\psi_1,\psi_2)$. В случае, когда параметры $a$ и $b$ являются скалярными, обобщенное бета-распределение изучается, например, в [3].

Пусть вектор $a = (a_1,...,a_d)$ удовлетворяет условиям (1), и таким же условиям удовлетворяют вектора $b = (b_1,...,b_d)$ и $c = (c_1,...,c_d)$, то есть

$$b_j > \frac{j-1}{2}, \qquad c_j > \frac{j-1}{2}, \qquad j = 1,\dots,d,$$

$b_0 = 0, b_{d+1} = (d+1)/2$, $c_0 = 0, c_{d+1} = (d+1)/2$. Определим $d$-мерные вектора $a+b$, $b+c$ соотношениями

$$(a+b)_j = a_j + b_j, \quad (b+c)_j = b_j + c_j, \quad j = 0,\dots,d,$$

и дополнительно положим $(a+b)_{d+1} = (d+1)/2$, $(b+c)_{d+1} = (d+1)/2$.

Рассмотрим положительно определенные $d \times d$ случайные матрицы $S$ и $U$, $S \sim B_d(a,b)$, $U \sim B_d(a+b,c)$, $S$ и $U$ независимы. Пусть

$$U = L'L,$$

где $L$ – нижняя треугольная $d \times d$ случайная матрица с положительными диагональными элементами. Определим случайную матрицу

$$W = L'SL.$$

<u>Теорема 4.</u> $W \sim B_d(a, b+c)$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $s$ и $u$ – положительно определенные $d \times d$ матрицы, $u = l'l$, где $l$ – нижняя треугольная $d \times d$ матрица с положительными диагональными элементами, $w = l'sl$.

По теореме 2 совместная функция плотности случайных матриц $S$ и $U$ имеет вид

$$f_{S,U}(s,u) = \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b)} \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a+b,c)} \prod_{j=1}^{d} \left|s_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d} \left|(I-s)_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}}$$

$$\prod_{j=1}^{d} \left|u_{[j]}\right|^{(a+b)_j - (a+b)_{j+1}} \prod_{j=1}^{d} \left|(I-u)_{[j]}\right|^{c_j - c_{j+1}}.$$

Согласно лемме 10

$$J(s;w) = J(w;s)^{-1} = |l|^{-(d+1)} = |u|^{-(d+1)/2}.$$

Совместная функция плотности случайных матриц $W$ и $U$ имеет вид

$$f_{W,U}(w,u) = f_{S,U}(s,u)\, J(s;w), \qquad 0 < w < u < I.$$

По лемме 6 при $j = 1,\dots,d$

$$w_{[j]} = l'_{[j]} s_{[j]} l_{[j]},$$

откуда

$$\left|s_{[j]}\right| = \left|w_{[j]}\right| \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{-2} .$$

Маргинальная функция плотности случайной матрицы $W$

$$f_W(w) = \int\limits_{w<u<I} f_{W,U}(w,u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b)} \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a+b,c)} \prod_{j=1}^{d} \left|w_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}} Q ,$$

где

$$Q = \int\limits_{w<u<I} \prod_{j=1}^{d} \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{-2\left(a_j - a_{j+1}\right)} \cdot \prod_{j=1}^{d} \left|\left(I - l'^{-1} w l^{-1}\right)_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d} \left|u_{[j]}\right|^{(a+b)_j - (a+b)_{j+1}} \cdot \prod_{j=1}^{d} \left|(I-u)_{[j]}\right|^{c_j - c_{j+1}} \left|u\right|^{-(d+1)/2} du .$$

Воспользовавшись леммой 6, получаем при $j = 1,\ldots,d$

$$\left(I - l'^{-1} w l^{-1}\right)_{[j]} = \left(l'^{-1}(u-w) l^{-1}\right)_{[j]} = \left(l'^{-1}\right)_{[j]} (u-w)_{[j]} \left(l^{-1}\right)_{[j]} , \qquad u_{[j]} = l'_{[j]} l_{[j]} ,$$

откуда

$$\left|\left(I - l'^{-1} w l^{-1}\right)_{[j]}\right| = \left|(u-w)_{[j]}\right| \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{-2} , \qquad \left|u_{[j]}\right| = \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{2} .$$

С учетом того, что $|u| = \left|u_{[d]}\right|$, получаем

$$Q = \int\limits_{w<u<I} \prod_{j=1}^{d} \left|(u-w)_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}} \prod_{j=1}^{d} \left|(I-u)_{[j]}\right|^{c_j - c_{j+1}} du .$$

Воспользовавшись теоремой 3, находим

$$Q = \mathrm{B}_d^*(b,c) \prod_{j=1}^{d} \left|(I-w)_{[j]}\right|^{(b+c)_j - (b+c)_{j+1}} .$$

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что

$$\frac{\mathrm{B}_d^*(b,c)}{\mathrm{B}_d^*(a,b)\,\mathrm{B}_d^*(a+b,c)} = \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b+c)} .$$

Теорема 4 доказана.

Для случая, когда $a_1 = \ldots = a_d$, $b_1 = \ldots = b_d$, $c_1 = \ldots = c_d$, результат, соответствующий теореме 4, доказывается в [3, с. 182], что, в свою очередь, является обобщением известного одномерного результата.

Пусть $X$, $Y$ и $Z$ – те же случайные матрицы, что и в начале данного раздела, перед формулировкой теоремы 2. Пусть

$$X = L'L ,$$

где $L$ – нижняя треугольная $d \times d$ случайная матрица с положительными диагональными элементами. Определим случайную матрицу

$$W = LZ^{-1}L'.$$

Теорема 5. Функция плотности случайной матрицы $W$ имеет вид

$$f_W(w) = \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b)} \prod_{j=1}^{d} \left| \left(w^{-1}\right)_{[j]} \right|^{-\left((a+b)_j - (a+b)_{j+1}\right)} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d} \left| \left(w^{-1} - I\right)_{[j]} \right|^{b_j - b_{j+1}}$$

$$\left( \prod_{j=1}^{d} \left| w^{[j]} \right| \right)^{-1}$$

при $0 < w < I$. Здесь, как обычно, $(a+b)_j = a_j + b_j$ при $j = 0,1,...,d$, $(a+b)_{d+1} = (d+1)/2$.

Доказательство. Пусть $x$ и $y$ – положительно определенные $d \times d$ матрицы, $z = x + y$ и $x = l'l$, где $l$ – нижняя треугольная $d \times d$ матрица с положительными диагональными элементами, $w = lz^{-1}l'$.

По леммам 11 и 3 раздела 5 из формул $x = l'l$, $y = z - l'l$, получаем

$$J(x,y;z,l) = 2^d \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^j .$$

Поэтому совместная функция плотности случайных матриц $Z$ и $L$ выражается через совместную функцию плотности случайных матриц $X$ и $Y$ в соответствии с (4) следующим образом:

$$f_{Z,L}(z,l) = f_{X,Y}(l'l, z - l'l)\ 2^d \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^j =$$

$$= \gamma_{a,A}\ etr\left(-Al'l\right) \prod_{j=1}^{d} \left| (l'l)_{[j]} \right|^{a_j - a_{j+1}} \cdot$$

$$\cdot \gamma_{b,A}\ etr\left(-A\left(z - l'l\right)\right) \prod_{j=1}^{d} \left| (z - l'l)_{[j]} \right|^{b_j - b_{j+1}}\ 2^d \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^j .$$

Используя лемму 6 для преобразования $\left| (l'l)_{[j]} \right|$, получаем

$$f_{Z,L}(z,l) = \gamma_{a,A}\ \gamma_{b,A}\ etr(-Az)\cdot \prod_{j=1}^{d}\ \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{2\left(a_j-a_{j+1}\right)}\ \cdot 2^d \cdot \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{i}\ \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d}\left|\left(z-l'l\right)_{[j]}\right|^{b_j-b_{j+1}} =$$

$$=\gamma_{a,A}\ \gamma_{b,A}\ etr(-Az)\cdot\ 2^d \cdot \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{2\left(a_{d-i+1}-(d-i+1)/2\right)} \cdot \cdot \prod_{j=1}^{d}\left|\left(z-l'l\right)_{[j]}\right|^{b_j-b_{j+1}}\ .$$

Чтобы найти совместную функцию плотности случайных матриц $Z$ и $W$, заметим, что по лемме 14 раздела 5 из формулы $w = lz^{-1}l'$ следует, что

$$J(w;l) = 2^d \prod_{j=1}^{d}\left(l_{jj}^{d-j+1}\left|\left(z^{-1}\right)^{[j]}\right|\right).$$

Из леммы 3 следует, что $J(z,w;z,l) = J(w;l)$. Поэтому

$$J(z,l;z,w) = \left(2^d \prod_{j=1}^{d}\left(l_{jj}^{d-j+1}\left|\left(z^{-1}\right)^{[j]}\right|\right)\right)^{-1}.$$

В соответствии с леммой 6 при $j = 1,\dots,d$

$$w^{[j]} = l^{[j]}\left(z^{-1}\right)^{[j]} l'^{[j]},$$

откуда следует, что

$$\left|\left(z^{-1}\right)^{[j]}\right| = \left|w^{[j]}\right|\prod_{i=1}^{j} l_{ii}^{-2}\ .$$

Поэтому

$$J(z,l;z,w) = \left(2^d \prod_{j=1}^{d}\left(l_{jj}^{-(d-j+1)}\left|w^{[j]}\right|\right)\right)^{-1}.$$

Для совместной функции плотности случайных матриц $Z$ и $W$ имеет место выражение

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{Z,L}(z,l)\,J(z,l;z,w) =$$

$$= \gamma_{a,A}\ \gamma_{b,A}\ etr(-Az)\cdot \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{2a_{d-i+1}}\ \prod_{j=1}^{d}\left|\left(z-l'l\right)_{[j]}\right|^{b_j-b_{j+1}}\ \left(\prod_{j=1}^{d}\left|w^{[j]}\right|\right)^{-1}.$$

Чтобы выразить матрицу $l$ и произведение, содержащее элементы этой матрицы, через матрицы $z$ и $w$, заметим, что

$$z - l'l = l'\left(w^{-1} - I\right)l\ .$$

По лемме 6 при $j = 1,\dots,d$ получаем

$$\left(z - l'l\right)_{[j]} = l'_{[j]}\left(w^{-1} - I\right)_{[j]} l_{[j]},$$

откуда

$$\left|\left(z - l'l\right)_{[j]}\right| = \left|\left(w^{-1} - I\right)_{[j]}\right| \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^2 .$$

Таким образом,

$$f_{Z,W}(z,w) = \gamma_{a,A}\ \gamma_{b,A}\ etr\left(-Az\right)\cdot \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{2\left(a_{d-i+1}+b_{d-i+1}-(d+1)/2\right)} \cdot \cdot \prod_{j=1}^{d}\left|\left(w^{-1} - I\right)_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}}$$

$$\left(\prod_{j=1}^{d}\left|w^{[j]}\right|\right)^{-1} .$$

По лемме 6 при $j = 1,...,d$ получаем

$$z_{[j]} = l'_{[j]}\left(w^{-1}\right)_{[j]} l_{[j]},$$

откуда

$$\left|z_{[j]}\right| = \left|\left(w^{-1}\right)_{[j]}\right| \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^2 .$$

Поэтому

$$\prod_{j=1}^{d}\left|z_{[j]}\right|^{(a+b)_j - (a+b)_{j+1}} = \prod_{j=1}^{d}\left|\left(w^{-1}\right)_{[j]}\right|^{(a+b)_j - (a+b)_{j+1}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d}\ \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{2\left((a+b)_j - (a+b)_{j+1}\right)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d}\left|\left(w^{-1}\right)_{[j]}\right|^{(a+b)_j - (a+b)_{j+1}} \prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{2\left((a+b)_{d-i+1} - (d+1)/2\right)} .$$

Таким образом,

$$f_{Z,W}(z,w) = \gamma_{a,A}\ \gamma_{b,A}\ etr\left(-Az\right)\cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d}\left|z_{[j]}\right|^{(a+b)_j - (a+b)_{j+1}} \prod_{j=1}^{d}\left|\left(w^{-1}\right)_{[j]}\right|^{-\left((a+b)_j - (a+b)_{j+1}\right)} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{d}\left|\left(w^{-1} - I\right)_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}} \left(\prod_{j=1}^{d}\left|w^{[j]}\right|\right)^{-1} .$$

Из (3) и (8) следует, что

$$\gamma_{a,A}\ \gamma_{b,A} = \gamma_{a+b,A}\ \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b)} .$$

Применение теоремы 1 дает маргинальную функцию плотности случайной матрицы $W$.

Теорема 5 доказана.

Задача, сходная с задачей, решение которой дается теоремой 5, рассматривается при $a_1 = ... = a_d$, $b_1 = ... = b_d$ в работе [8]. В [8] получена следующая формула для функции плотности случайной матрицы $W$,

$$f_W(w) = \frac{1}{\mathrm{B}_d^*(a,b)} |w|^{a_1} |I-w|^{b_1-(d+1)/2} \left( \prod_{j=1}^{d} \left| w^{[j]} \right| \right)^{-1},$$

которая является частным случаем формулы, дающейся в формулировке теоремы 5.

Из полученной в доказательстве теоремы 5 формулы для совместной функции плотности $f_{Z,W}(z,w)$ следует, что случайные матрицы $Z$ и $W$ независимы.

## 3. Модель состояние-наблюдение

Пусть $m$ – $d$-мерный вектор, $\kappa$ – положительное число, $a$ – $d$-мерный вектор, удовлетворяющий условию (1), $A$ – положительно определенная $d \times d$ матрица. Определим совместную функцию плотности $d$-мерного случайного вектора $X$ и положительно определенной $d \times d$ случайной матрицы $S$. Данная совместная функция плотности является многомерным аналогом совместной функции плотности двух случайных величин (5).

Положим (ср. (3), (4), (5))

$$f_{NG}(x,s) = (2\pi)^{-d/2} |\kappa s|^{1/2} \, etr\left( -\frac{1}{2} \kappa (x-m)(x-m)' s \right) \cdot$$
$$\cdot \gamma_{a,A} \, etr(-As) \prod_{j=1}^{d} \left| s_{[j]} \right|^{a_j - a_{j+1}}. \tag{10}$$

Распределение вероятностей, отвечающее этой совместной функции плотности, называется многомерным нормальным-гамма распределением с параметрами $m, \kappa, a, A$ и обозначается $NG_d(m, \kappa, a, A)$.

Пусть $\lambda$ – фиксированное положительное число. Условные распределения для состояния, аналогичные распределениям, задаваемым уравнениями (6), следующие:

$$\Theta_t \left| \mu_{t-1}, \Theta_{t-1} \sim B_d \left( c_{t-1}, b_{t-1}, 0, L'_{t-1}\Theta_{t-1}L_{t-1} \right), \right. \tag{11}$$

$$\mu_t \left| \Theta_t, \mu_{t-1}, \Theta_{t-1} \sim N_d \left( m_{t-1}, \left(\lambda\Theta_t\right)^{-1} \right). \right. \tag{12}$$

Здесь $L_{t-1}$ – нижняя треугольная $d \times d$ матрица с положительными диагональными элементами. Из анализа, проведенного после записи модели (6), (7), видно, что матрица $L_{t-1}$ должна зависеть от векторов $c_{t-1}$ и $b_{t-1}$. Уравнение для $\Theta_t$ аналогичное первому из уравнений (6) легко может быть получено из (11) при помощи теоремы 3. Через $N_d$ обозначается $d$ -мерное нормальное распределение.

Условное распределение для наблюдения, аналогичное распределению, задаваемому уравнением (7), следующее:

$$y_t \left| \mu_t, \Theta_t \sim N_d \left( \mu_t, \Theta_t^{-1} \right). \right. \tag{13}$$

Возмущения, как и в одномерном случае, считаются независимыми.

Аналогично тому, как это сделано во Введении, через $Y_t$ обозначается набор наблюдений $y_1, ..., y_t$ и рассматриваются распределения

$$\mu_t, \Theta_t \left| Y_t \sim NG_d \left( m_t, 1+\lambda, a_t, A_t \right), \right. \tag{14}$$

$$\mu_t, \Theta_t \left| Y_{t-1} \sim NG_d \left( m_{t|t-1}, \lambda, a_{t|t-1}, A_{t|t-1} \right). \right. \tag{15}$$

Координаты векторов $a_t, a_{t|t-1}, c_{t-1}, b_{t-1}$ будем обозначать $a_{t,j}, a_{t|t-1,j}, c_{t-1,j}, b_{t-1,j}$, соответственно. Здесь $j = 1,...,d$. Пока утверждения (14) и (15) никак не обосновываются. Обоснованиями этих утверждений являются теоремы 6 и 7.

Функции плотности условных распределений (11) и (12) обозначим $p\left(\Theta_t \middle| \mu_{t-1}, \Theta_{t-1}\right)$ и $p\left(\mu_t \middle| \Theta_t, \mu_{t-1}, \Theta_{t-1}\right)$, соответственно, и положим

$$p\left(\mu_t, \Theta_t \middle| \mu_{t-1}, \Theta_{t-1}\right) = p\left(\mu_t \middle| \Theta_t, \mu_{t-1}, \Theta_{t-1}\right) \, p\left(\Theta_t \middle| \mu_{t-1}, \Theta_{t-1}\right). \tag{16}$$

Функцию плотности условного распределения (13) обозначим $f\left(y_t \middle| \mu_t, \Theta_t\right)$. Функции плотности условных распределений (14) и (15) обозначим $g\left(\mu_t, \Theta_t \middle| Y_t\right)$ и $h\left(\mu_t, \Theta_t \middle| Y_{t-1}\right)$, соответственно.

Имеют место соотношения (ср. [1])

$$\begin{aligned} &h\left(\mu_t, \Theta_t \middle| Y_{t-1}\right) = \\ &= \int\limits_{\mu_{t-1}} \int\limits_{\Theta_{t-1}>0} p\left(\mu_t, \Theta_t \middle| \mu_{t-1}, \Theta_{t-1}\right) g\left(\mu_{t-1}, \Theta_{t-1} \middle| Y_{t-1}\right) \, d\Theta_{t-1} \, d\mu_{t-1}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$g\left(\mu_t,\Theta_t\middle|Y_t\right)=\frac{f\left(y_t\middle|\mu_t,\Theta_t\right)h\left(\mu_t,\Theta_t\middle|Y_{t-1}\right)}{\int\limits_{\mu_t}\int\limits_{\Theta_t>0}f\left(y_t\middle|\mu_t,\Theta_t\right)h\left(\mu_t,\Theta_t\middle|Y_{t-1}\right)d\Theta_t\,d\mu_t}. \qquad (18)$$

Теорема 6. Пусть условное распределение $\mu_{t-1},\Theta_{t-1}\left|Y_{t-1}\right.$ задается формулой (14) (с заменой в правой части индекса $t$ на индекс $t-1$), условные распределения $\Theta_t\left|\mu_{t-1},\Theta_{t-1}\right.$ и $\mu_t\left|\Theta_t,\mu_{t-1},\Theta_{t-1}\right.$ задаются формулами (11) и (12), соответственно, причем $a_{t-1,j}=c_{t-1,j}+b_{t-1,j}$ при $j=1,...,d$. Тогда условное распределение $\mu_t,\Theta_t\left|Y_{t-1}\right.$, задаваемое формулами (17) и (16), имеет вид (15), где

$$m_{t|t-1}=m_{t-1}, \qquad a_{t|t-1}=c_{t-1}, \qquad A_{t|t-1}=L_{t-1}^{-1}A_{t-1}L'^{-1}_{t-1}.$$

Доказательство. Будем использовать обозначение $x$ вместо $\mu_t$, обозначение $s$ – вместо $\Theta_t$, и будем опускать индекс $t-1$ у $m_{t-1},a_{t-1},A_{t-1},\mu_{t-1},\Theta_{t-1},c_{t-1},b_{t-1},L_{t-1}$. Тогда в соответствии с (10), (11), (12), (14), (16) и (17) и теоремой 3

$$h\left(x,s\middle|Y_{t-1}\right)=\int\limits_{\mu}\int\limits_{\Theta>0}p\left(x\middle|S,\mu,\Theta\right)\,p\left(S\middle|\mu,\Theta\right)\,g\left(\mu,\Theta\middle|Y_{t-1}\right)\,d\Theta\,d\mu=$$

$$=\int\limits_{\mu}\int\limits_{\Theta>L'^{-1}SL^{-1}}\left\{(2\pi)^{-d/2}\left|\lambda s\right|^{1/2}etr\left(-\frac{1}{2}\lambda(x-m)(x-m)'\,s\right)\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{B_d^*(c,b)}\prod_{j=1}^{d}\left|s_{[j]}\right|^{c_j-c_{j+1}}\prod_{j=1}^{d}\left|\left(L'\Theta L-s\right)_{[j]}\right|^{b_j-b_{j+1}}\prod_{j=1}^{d}\left|\left(L'\Theta L\right)_{[j]}\right|^{-((c+b)_j-(c+b)_{j+1})}\right\}$$

$$\left\{(2\pi)^{-d/2}\left|(1+\lambda)\Theta\right|^{1/2}etr\left(-\frac{1}{2}(1+\lambda)(\mu-m)(\mu-m)'\,\Theta\right)\right.$$

$$\left.\gamma_{a,A}\,etr(-A\Theta)\prod_{j=1}^{d}\left|\Theta_{[j]}\right|^{a_j-a_{j+1}}\right\}\,d\Theta\,d\mu$$

По лемме 6 раздела 5 при $j=1,...,d$

$$\left(L'\Theta L\right)_{[j]}=L'_{[j]}\Theta_{[j]}L_{[j]}.$$

Изменим порядок интегрирования и воспользуемся тем, что при любых $\lambda$, $\Theta$ и $m$

$$\int\limits_{\mu}(2\pi)^{-d/2}\left|(1+\lambda)\Theta\right|^{1/2}etr\left(-\frac{1}{2}(1+\lambda)(\mu-m)(\mu-m)'\,\Theta\right)\,d\mu=1.$$

Тогда

$$h\left(x,s\,\middle|\,Y_{t-1}\right)=\;(2\pi)^{-d/2}\,|\lambda s|^{1/2}\,etr\left(-\frac{1}{2}\lambda(x-m)(x-m)'\,s\right)$$

$$\frac{1}{\mathrm{B}_d^*(c,b)}\prod_{j=1}^{d}\left|s_{[j]}\right|^{c_j-c_{j+1}}\;\prod_{j=1}^{d}\left(\left|L'_{[j]}\right|\left|L_{[j]}\right|\right)^{-((c+b)_j-(c+b)_{j+1})}$$

$$\gamma_{a,A}\int\limits_{\Theta>L'^{-1}SL^{-1}} etr(-A\Theta)\prod_{j=1}^{d}\left|\left(L'\Theta L-s\right)_{[j]}\right|^{b_j-b_{j+1}}\;d\Theta\;.$$

Рассмотрим матрицу $\Psi=\Theta-L'^{-1}sL^{-1}$. Тогда $L'\Theta L-s=L'\Psi L$, и по лемме 6 при $j=1,\ldots,d$

$$\left(L'\Psi L\right)_{[j]}=L'_{[j]}\Psi_{[j]}L_{[j]}\,.$$

Тогда для интеграла получаем выражение

$$\prod_{j=1}^{d}\left(\left|L'_{[j]}\right|\left|L_{[j]}\right|\right)^{b_j-b_{j+1}}etr\left(-AL'^{-1}sL^{-1}\right)\cdot\cdot\int\limits_{\Psi>0}etr(-A\Psi)\prod_{j=1}^{d}\left|\Psi_{[j]}\right|^{b_j-b_{j+1}}\;d\Psi\;.$$

На основании (4), теоремы 1 и соотношения

$$etr\left(-AL'^{-1}sL^{-1}\right)=etr\left(-L^{-1}AL'^{-1}s\right)$$

находим

$$h\left(x,s\,\middle|\,Y_{t-1}\right)=\frac{\gamma_{a,A}\gamma_{b,A}^{-1}}{\mathrm{B}_d^*(c,b)}\,(2\pi)^{-d/2}\,|\lambda s|^{1/2}\,etr\left(-\frac{1}{2}\lambda(x-m)(x-m)'\,s\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{d}\left|s_{[j]}\right|^{c_j-c_{j+1}}\;\cdot\prod_{j=1}^{d}\left(\left|L'_{[j]}\right|\left|L_{[j]}\right|\right)^{-((c+b)_j-(c+b)_{j+1})}\cdot\qquad(19)$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{d}\left(\left|L'_{[j]}\right|\left|L_{[j]}\right|\right)^{b_j-b_{j+1}}\,etr\left(-L^{-1}AL'^{-1}s\right).$$

Из замечания, сделанного после окончания доказательства теоремы, следует, что с получением формулы (19) доказательство теоремы можно считать завершенным. Вывод точной формулы для функции $h\left(x,s\,\middle|\,Y_{t-1}\right)$ дается ниже, как представляющий определенный методический интерес.

Воспользовавшись (3), (8) и связью между векторами $a$, $c$ и $b$, получаем

$$\frac{\gamma_{a,A}\gamma_{b,A}^{-1}}{\mathrm{B}_d^*(c,b)}=\gamma_{c,A}\,.$$

Обозначив через $l_{ii}$ диагональные элементы матрицы $L$, находим

$$\prod_{j=1}^{d}\left(\left|L'_{[j]}\right|\left|L_{[j]}\right|\right)^{-((c+b)_j-(c+b)_{j+1})}\ \prod_{j=1}^{d}\left(\left|L'_{[j]}\right|\left|L_{[j]}\right|\right)^{b_j-b_{j+1}} =$$

$$=\prod_{j=1}^{d}\left(\left|L'_{[j]}\right|\left|L_{[j]}\right|\right)^{-(c_j-c_{j+1})}\left(\left|L'_{[d]}\right|\left|L_{[d]}\right|\right)^{-c_d} =$$

$$=\prod_{j=1}^{d-1}\ \prod_{i=d-j+1}^{d} l_{ii}^{-2(c_j-c_{j+1})}\cdot\prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{-2c_d} = =\prod_{i=2}^{d}\ \prod_{j=d-i+1}^{d-1} l_{ii}^{-2(c_j-c_{j+1})}\cdot\prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{-2c_d} =$$

$$=\prod_{i=2}^{d} l_{ii}^{-2(c_{d-i+1}-c_d)}\cdot\prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{-2c_d} =\prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{-2c_{d-i+1}} .$$

С другой стороны, воспользовавшись леммой 6 , получаем

$$\prod_{j=0}^{d-1}\left|\left(L^{-1}AL'^{-1}\right)^{[d-j]}\right|^{c_j-c_{j+1}} =\prod_{j=0}^{d-1}\left(\left|\left(L^{-1}\right)^{[d-j]}\right|\left|A^{[d-j]}\right|\left|\left(L'^{-1}\right)^{[d-j]}\right|\right)^{c_j-c_{j+1}} =$$

$$=\prod_{j=0}^{d-1}\left|A^{[d-j]}\right|^{c_j-c_{j+1}}\prod_{j=0}^{d-1}\prod_{i=1}^{d-j} l_{ii}^{-2(c_j-c_{j+1})} = =\prod_{j=0}^{d-1}\left|A^{[d-j]}\right|^{c_j-c_{j+1}}\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=0}^{d-i} l_{ii}^{-2(c_j-c_{j+1})}$$

$$=\prod_{j=0}^{d-1}\left|A^{[d-j]}\right|^{c_j-c_{j+1}}\prod_{i=1}^{d} l_{ii}^{2c_{d-i+1}} .$$

Поэтому

$$\gamma_{c,A}\prod_{j=1}^{d}\left(\left|L'_{[j]}\right|\left|L_{[j]}\right|\right)^{-((c+b)_j-(c+b)_{j+1})}\ \prod_{j=1}^{d}\left(\left|L'_{[j]}\right|\left|L_{[j]}\right|\right)^{b_j-b_{j+1}} =\gamma_{c,L^{-1}AL'^{-1}} .$$

Таким образом,

$$h\left(x,s\,\middle|\,Y_{t-1}\right)=(2\pi)^{-d/2}\left|\lambda s\right|^{1/2} etr\left(-\frac{1}{2}\lambda(x-m)(x-m)' s\right)\cdot$$

$$\cdot\gamma_{c,L^{-1}AL'^{-1}}\ etr\left(-L^{-1}AL'^{-1}s\right)\prod_{j=1}^{d}\left|s_{[j]}\right|^{c_j-c_{j+1}} .$$

Теорема 6 доказана.

Заметим, что доказательство теоремы 6 можно сократить, поскольку из (19) следует, что

$$h\left(x,s\,\middle|\,Y_{t-1}\right)\propto\left|\lambda s\right|^{1/2} etr\left(-\frac{1}{2}\lambda(x-m)(x-m)' s\right)\cdot$$

$$\cdot etr\left(-L^{-1}AL'^{-1}s\right)\prod_{j=1}^{d}\left|s_{[j]}\right|^{c_j-c_{j+1}} .$$

Этот прием используется при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 7. Пусть условное распределение $\mu_t,\Theta_t\,\middle|\,Y_{t-1}$ задается формулой (15), условное распределение $y_t\,\middle|\,\mu_t,\Theta_t$ задается формулой (13).

Тогда условное распределение $\mu_t, \Theta_t \mid Y_t$, задаваемое формулой (18), имеет вид (14), где

$$m_t = \frac{1}{1+\lambda}\left(y_t + \lambda m_{t|t-1}\right), \qquad a_{t,j} = a_{t|t-1,j} + \frac{1}{2} \quad \text{при } j = 1,\dots,d,$$

$$A_t = A_{t|t-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(y_t - m_{t|t-1}\right)\left(y_t - m_{t|t-1}\right)'.$$

<u>Доказательство.</u> Будем опускать индекс $t$ у $y_t$, $\mu_t$, $\Theta_t$ и будем опускать индекс $t\,|\,t-1$ у $m_{t|t-1}$, $a_{t|t-1}$, $A_{t|t-1}$. Тогда

$$g\left(\mu,\Theta \mid Y_t\right) \propto f\left(y \mid \mu,\Theta\right) h\left(\mu,\Theta \mid Y_{t-1}\right) \propto$$

$$\propto |\Theta|^{1/2}\, etr\left(-\frac{1}{2}(y-\mu)(y-\mu)'\,\Theta\right) |\Theta|^{1/2}\, etr\left(-\frac{1}{2}\lambda(\mu-m)(\mu-m)'\,\Theta\right)$$

$$etr(-A\Theta)\prod_{j=1}^{d}\left|\Theta_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}}.$$

По лемме 9 раздела 5

$$etr\left(-\frac{1}{2}(y-\mu)(y-\mu)'\,\Theta\right) etr\left(-\frac{1}{2}\lambda(\mu-m)(\mu-m)'\,\Theta\right) =$$

$$= etr\left(-\frac{1}{2}(1+\lambda)(\mu-z)(\mu-z)'\,\Theta\right)\cdot \cdot etr\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)(y-m)'\,\Theta\right),$$

где

$$z = \frac{1}{1+\lambda}\left(y + \lambda m\right). \tag{20}$$

Поэтому

$$g\left(\mu,\Theta \mid Y_t\right) \propto |\Theta|^{1/2}\, etr\left(-\frac{1}{2}(1+\lambda)(\mu-z)(\mu-z)'\,\Theta\right)\cdot$$

$$\cdot|\Theta|^{1/2}\, etr\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)(y-m)'\,\Theta\right)\cdot \cdot etr(-A\Theta)\prod_{j=1}^{d}\left|\Theta_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}} =$$

$$= |\Theta|^{1/2}\, etr\left(-\frac{1}{2}(1+\lambda)(\mu-z)(\mu-z)'\,\Theta\right)\cdot$$

$$\cdot etr\left(-\left(A + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)(y-m)'\right)\Theta\right) \prod_{j=1}^{d}\left|\Theta_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}},$$

где

$$b_j = a_j + \frac{1}{2} \quad \text{при } j = 1,\dots,d,$$

$b_{d+1} = (d+1)/2$.

Теорема 7 доказана.

Прогнозная плотность определяется по формуле

$$q\left(y_{t+1} \middle| Y_t\right) =$$

$$= \int\limits_{\mu_{t+1}} \int\limits_{\Theta_{t+1}>0} f\left(y_{t+1} \middle| \mu_{t+1}, \Theta_{t+1}\right) \, h\left(\mu_{t+1}, \Theta_{t+1} \middle| Y_t\right) \, d\Theta_{t+1} d\mu_{t+1} .$$

Значение интеграла в правой части дается теоремой 8.

## 4. Многомерное *t*-распределение

Обозначим через $h(x,s)$ совместную функцию плотности $d$-мерного случайного вектора $X$ и положительно определенной $d \times d$ случайной матрицы $S$. Предположим, что функция $h(x,s)$ имеет вид

$$h(x,s) = (2\pi)^{-d/2} \, |\lambda s|^{1/2} \; etr\left(-\frac{1}{2}\lambda(x-m)(x-m)' \, s\right) \cdot$$

$$\cdot \gamma_{a,A} \; etr(-As) \prod_{j=1}^{d} \left|s_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}} ,$$

то есть совместное распределение вероятностей $X$ и $S$ – это $NG_d(m, \lambda, a, A)$, см. (10). Обозначим через $f\left(y \middle| x,s\right)$ условную функцию плотности $d$-мерного случайного вектора $Y$ при условии $X = x, S = s$. Предположим, что функция $f\left(y \middle| x,s\right)$ имеет вид

$$f\left(y \middle| x,s\right) = (2\pi)^{-d/2} \, |s|^{1/2} \; etr\left(-\frac{1}{2}(y-x)(y-x)' \, s\right),$$

то есть условное распределение вероятностей $Y$ при условии $X = x, S = s$ – это $N_d\left(x, s^{-1}\right)$. Рассмотрим функцию плотности

$$q(y) = \int\limits_{x} \int\limits_{s>0} f\left(y \middle| x,s\right) \, h(x,s) \, ds \, dx .$$

Для $d$-мерного вектора $c$ через $c^{[k]}$ будем обозначать $k$-мерный вектор, состоящий из первых $k$ координат вектора $c$, $k = 1,...,d$.

<u>Теорема 8.</u> Пусть $b_0 = 0$, $b_j = a_j + \dfrac{1}{2}$ при $j = 1,...,d$, $b_{d+1} = (d+1)/2$.

Тогда

$$q(y) = (2\pi)^{-d/2}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{d/2} |A|^{-1/2} \; \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \cdot$$

$$\cdot\prod_{j=0}^{d-1} \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)^{[d-j]'}\left(A^{[d-j]}\right)^{-1}(y-m)^{[d-j]}\right)^{b_j-b_{j+1}} .$$

Доказательство. По лемме 9 раздела 5, получаем

$$q(y) = \int_x \int_{s>0} (2\pi)^{-d/2} |s|^{1/2} \; (2\pi)^{-d/2} |\lambda s|^{1/2} \; etr\left(-\frac{1}{2}(1+\lambda)(x-z)(x-z)' \, s\right)$$

$$etr\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)(y-m)' \, s\right) \gamma_{a,A} \; etr(-As)\prod_{j=1}^{d}\left|s_{[j]}\right|^{a_j-a_{j+1}} \; ds\,dx ,$$

где вектор $z$ определяется по формуле (20). Воспользуемся тем, что при любых $z$ и $s$

$$\int_x (2\pi)^{-d/2} |(1+\lambda)s|^{1/2} \, etr\left(-\frac{1}{2}(1+\lambda)(x-z)(x-z)' \, s\right) \; dx = 1 .$$

Тогда

$$q(y) = (2\pi)^{-d/2}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{d/2} \gamma_{a,A} \cdot$$

$$\cdot\int_{s>0} |s|^{1/2} \; etr\left(-\left(A+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)(y-m)'\right)s\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{d}\left|s_{[j]}\right|^{a_j-a_{j+1}} \; ds \; .$$

Согласно (3), (4) и теореме 1 для интеграла из правой части находим

$$\int_{s>0} etr\left(-\left(A+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)(y-m)'\right)s\right) \; \prod_{j=1}^{d}\left|s_{[j]}\right|^{b_j-b_{j+1}} \; ds =$$

$$= \Gamma_d^*(b)\prod_{j=0}^{d-1} \; \left|\left(A+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)(y-m)'\right)^{[d-j]}\right|^{b_j-b_{j+1}} .$$

При $k = 1,...,d$

$$\left(A+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)(y-m)'\right)^{[k]} = = A^{[k]} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)^{[k]}(y-m)^{[k]} .$$

По лемме 5 раздела 5

$$\left|\left(A+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}(y-m)(y-m)'\right)^{[d-j]}\right| =$$

$$= \left| A^{[d-j]} \right| \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \left( y - m \right)^{[d-j]\prime} \left( A^{[d-j]} \right)^{-1} \left( y - m \right)^{[d-j]} \right).$$

Для завершения доказательства теоремы остается применить (3).

Теорема 8 доказана.

Теорему, аналогичную теореме 8, можно доказать и в несколько более простой ситуации. Пусть распределение вероятностей положительно определенной $d \times d$ случайной матрицы $S$ – это $G_d\left(a, A\right)$, см. (3), (4). Пусть условное распределение вероятностей $d$-мерного случайного вектора $Y$ при условии $S = s$ – это $N_d\left(0, s^{-1}\right)$. Обозначим через $h(s)$ функцию плотности случайной матрицы $S$ и через $f\left(y \middle| s\right)$ – условную функцию плотности случайного вектора $Y$ при условии $S = s$. Рассмотрим функцию плотности

$$q\left(y\right) = \int\limits_{s>0} f\left(y \middle| s\right) \, h\left(s\right) \, ds \; .$$

Тогда

$$q(y) = \left(2\pi\right)^{-d/2} \left| A \right|^{-1/2} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=0}^{d-1} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot y^{[d-j]\prime} \left( A^{[d-j]} \right)^{-1} y^{[d-j]} \right)^{b_j - b_{j+1}},$$

где вектор $b$ определяется так же, как в формулировке теоремы 8. Доказательство последнего соотношения аналогично доказательству теоремы 8.

Нетрудно увидеть, что если $b_1 = \ldots = b_d = \dfrac{\nu + d}{2}$, где $\nu$ – натуральное число, $\Sigma^{-1} = \dfrac{\nu}{2} A^{-1}$, то функция $q(y)$ принимает вид

$$q(y) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu + d}{2}\right)}{\left(\pi\nu\right)^{d/2} \Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)} \left|\Sigma\right|^{-1/2} \left( 1 + \frac{1}{\nu} y' \Sigma^{-1} y \right)^{-(\nu+d)/2},$$

то есть является функцией плотности $d$-мерного $t$-распределения с $\nu$ степенями свободы (см. [4]).

## 5. Леммы

Все леммы из этого раздела являются известными результатами из теории матриц, но не все эти результаты одинаково легко найти в широко доступных источниках. Поэтому в ряде случаев приводится не только формулировка леммы, но и намечается ее доказательство.

Лемма 1. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ – перестановка натуральных чисел $1, \dots, d$, матрица

$$P = \left\{ p_{ij} \right\}, \quad 1 \le i, j \le d ,$$

определяется условием

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } j = \alpha_i \\ 0 \text{ при остальных } j \end{cases},$$

$C = \left\{ c_{ij} \right\}$ – произвольная $d \times d$ матрица. Тогда $(i, j)$-й элемент матрицы $PCP'$ – это $c_{\alpha_i \alpha_j}$.

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой.

Матрица $P$ называется перестановочной матрицей. Лемма 1 при $C = I$ показывает, что перестановочная матрица является ортогональной.

Лемма 2. Пусть $C$ – положительно определенная $d \times d$ матрица. Тогда при $k = 1, \dots, d$

$$\left| C^{[k]} \right| > 0 , \qquad \left| C_{[k]} \right| > 0 .$$

(Определение матриц $C^{[k]}$ и $C_{[k]}$ см. во введении.)

Положительная определенность матриц $C^{[k]}$ следует из критерия Сильвестра. Для доказательства второй части леммы рассмотрим перестановку, у которой $\alpha_i = d - k + i$ при $i = 1, \dots, k$ и $\alpha_i$ выбирается произвольно при $i > k$. Применим лемму 1. Если $P$ – соответствующая перестановочная матрица, то

$$C_{[k]} = \left( PCP' \right)^{[k]} ,$$

и вторая часть леммы следует из положительной определенности матрицы $PCP'$ и критерия Сильвестра.

Лемма 3. Пусть произвольная $N \times N$ матрица $A$ разбита на блоки

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11}$ и $A_{22}$ – квадратные матрицы, и матрица $A_{22}$ невырожденная.

Тогда

$$|A| = \left|A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right| \cdot \left|A_{22}\right| .$$

Для доказательства леммы используется правило умножения блочных матриц. Имеем

$$\begin{pmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Из полученного соотношения следует утверждение леммы.

<u>Лемма 4.</u> Пусть $C$ – положительно определенная $N \times N$ матрица. Тогда существует единственная нижняя треугольная $N \times N$ матрица $L$ с положительными диагональными элементами такая, что

$$C = L'L .$$

Доказательство леммы проведем индукцией по $N$. При $N = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть утверждение леммы верно при $N-1$. Представим матрицу $C$ в блочном виде

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}' & C_{22} \end{pmatrix},$$

где $C_{11}$ – $1 \times 1$ матрица и $C_{22}$ – $(N-1)\times(N-1)$ матрица. Применяя метод, использованный при доказательстве леммы 2, и критерий Сильвестра, нетрудно убедиться, что матрица $C_{22}$ положительно определенная. Тогда по предположению индукции существует нижняя треугольная $(N-1)\times(N-1)$ матрица $L_0$ с положительными диагональными элементами такая, что $C_{22} = L_0'L_0$. Из леммы 3 следует, что

$$C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{12}' > 0 .$$

Положим $x = \left(C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{12}'\right)^{1/2}$ и $y = C_{12}L_0^{-1}$. Применив правило умножения блочных матриц, легко убедиться, что матрица

$$L = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y' & L_0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию леммы. Нетрудно также увидеть, что эта матрица является единственной, удовлетворяющей условию леммы.

Заметим, что аналогично тому, как это сделано при доказательстве леммы 4, можно доказать, что для любой положительно определенной $N \times N$ матрицы $C$ существует единственная нижняя треугольная $N \times N$ матрица $L$ с положительными диагональными элементами такая, что $C = LL'$.

Лемма 5. Пусть $A$ – невырожденная $N \times N$ матрица и $x$ – $N$-мерный вектор. Тогда

$$|A + xx'| = |A|\left(1 + x'A^{-1}x\right).$$

Для доказательства леммы рассмотрим $(N+1)\times(N+1)$ матрицу

$$B = \begin{pmatrix} I & x \\ -x'A^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь правилом умножения блочных матриц, нетрудно увидеть, что

$$\begin{pmatrix} A + xx' & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} A & 0 \\ x' & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I & x \\ 0 & 1 + x'A^{-1}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ x'A^{-1} & 1 \end{pmatrix} B.$$

Из этих соотношений следует, что

$$|A + xx'| = |B||A|, \qquad 1 + x'A^{-1}x = |B|,$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 6. Пусть $A$ – произвольная $d \times d$ матрица, $L$ – нижняя треугольная $d \times d$ матрица, $U$ – верхняя треугольная $d \times d$ матрица. Тогда при $k = 1, \ldots, d$

$$(LA)^{[k]} = L^{[k]}A^{[k]}, \quad (AU)^{[k]} = A^{[k]}U^{[k]}, \quad (AL)_{[k]} = A_{[k]}L_{[k]},$$

$$(UA)_{[k]} = U_{[k]}A_{[k]}.$$

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой.

Лемма 7. Пусть $A$ – произвольная $d \times d$ матрица, $x$ – $d$-мерный вектор. Тогда

$$x'Ax = tr\left(xx'A\right).$$

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой.

Лемма 8. Пусть $A$ – произвольная $d \times d$ матрица, $\mu, x, y$ – $d$-мерные вектора, $\alpha$ и $\beta$ – действительные числа, сумма которых не равна 0. Тогда

$$\alpha(\mu - x)' A(\mu - x) + \beta(\mu - y)' A(\mu - y) =$$

$$= (\alpha + \beta)(\mu - z)' A(\mu - z) + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}(x - y)' A(x - y),$$

где

$$z = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha x + \beta y). \tag{21}$$

Для доказательства леммы рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\left(\alpha(\mu-x)+\beta(\mu-y)\right)' A\left(\alpha(\mu-x)+\beta(\mu-y)\right)\right)+$$

$$+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\left(\left((\mu-y)-(\mu-x)\right)' A\left((\mu-y)-(\mu-x)\right)\right).$$

Нетрудно убедиться, что данное выражение совпадает и с левой, и с правой частью доказываемой формулы, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 9. Пусть $A$ – произвольная $d\times d$ матрица, $\mu, x, y$ – $d$-мерные вектора, $\alpha$ и $\beta$ – действительные числа, сумма которых не равна 0. Тогда

$$etr\left(-\frac{1}{2}\alpha(\mu-x)(\mu-x)' A\right) etr\left(-\frac{1}{2}\beta(\mu-y)(\mu-y)' A\right)=$$

$$=etr\left(-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\mu-z)(\mu-z)' A\right)\cdot$$

$$\cdot etr\left(-\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(x-y)(x-y)' A\right),$$

где $z$ определяется формулой (21).

Доказательство леммы легко проводится при помощи лемм 7 и 8.

Оставшиеся леммы содержат выражения для величин $J(t;s)$, модулей якобианов некоторых преобразований. Пусть $\Phi$ – взаимнооднозначное гладкое отображение некоторой области $N$-мерного евклидова пространства на область другого $N$-мерного евклидова пространства,

$$t=\Phi(s),$$

где через $s$ и $t$ обозначены точки, соответственно, первого и второго евклидова пространства.

Рассмотрим $N$-мерные случайные вектора $S$ и $T$, принимающие значения в соответствующих областях, и связанные соотношением

$$T=\Phi(S).$$

Если функция плотности случайного вектора $T$ известна и равна $f_T(t)$, то функция плотности случайного вектора $S$ определяется при помощи формулы

$$f_S(s)=f_T(\Phi(s))J(t;s),$$

где $J(t;s)$ – абсолютная величина определителя матрицы

$$\frac{\partial(t)}{\partial(s)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial t_1}{\partial s_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial t_N}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial t_N}{\partial s_N} \end{pmatrix},$$

то есть якобиана отображения $\Phi$.

В частности, как это делается во введении перед формулировкой теоремы 1, симметричные $d \times d$ матрицы можно отождествлять с векторами в $d(d+1)/2$-мерном евклидовом пространстве.

Лемма 10. Пусть $X$ – симметричная $d \times d$ матрица, $A$ – невырожденная $d \times d$ матрица, $Y = AXA'$. Тогда $J(Y;X) = \left\| A \right|^{d+1} \right|$.

Доказательство леммы 10 дается, например, в [5, с. 32].

В леммах 11 – 14 $X$ – нижняя треугольная $d \times d$ матрица с положительными диагональными элементами $x_{jj}$.

Лемма 11. Пусть $Y = X'X$. Тогда $J(Y;X) = 2^d \prod_{j=1}^{d} x_{jj}^{j}$.

Лемма 12. Пусть $Y = XX'$. Тогда $J(Y;X) = 2^d \prod_{j=1}^{d} x_{jj}^{d-j+1}$.

Доказательство лемм 11, 12 дается, например, в [5, с. 56].

Лемма 13. Пусть $L$ – нижняя треугольная $d \times d$ матрица с положительными диагональными элементами $l_{jj}$, $Y = XL$. Тогда $J(Y;X) = \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^{d-j+1}$.

Доказательство леммы 13 дается, например, в [5, с. 27].

Лемма 14. Пусть $C$ – положительно определенная $d \times d$ матрица, $Y = XCX'$. Тогда

$$J(Y;X) = 2^d \prod_{j=1}^{d} \left( x_{jj}^{d-j+1} \left| C^{[j]} \right| \right).$$

Для доказательства леммы 14 воспользуемся замечанием после леммы 4, что существует нижняя треугольная $d \times d$ матрица $L$ с положительными диагональными элементами $l_{jj}$ такая, что $C = LL'$. Рассмотрим нижнюю треугольную $d \times d$ матрицу $B = XL$ с положительными диагональными элементами $b_{jj}$. Тогда

$$Y = XLL'X' = BB'$$

и, воспользовавшись леммами 12 и 13, получаем

$$J(Y;X) = J(Y;B)J(B;X) = 2^d \prod_{j=1}^{d} b_{jj}^{d-j+1} \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^{d-j+1} = = 2^d \prod_{j=1}^{d} \left(x_{jj} l_{jj}\right)^{d-j+1} \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^{d-j+1} .$$

Утверждение леммы 14 следует из леммы 6, поскольку $\left|C^{[j]}\right| = \left|L^{[j]}\right|\left|L'^{[j]}\right| = \prod_{i=1}^{j} l_{ii}^2$ .

## Библиографический список


[1] Bather J. Invariant Conditional Distributions // Ann. Math. Stat., 36 (1965), 829 – 846.

[2] Bellman R. A Generalization of Some Integral Identities due to Ingham and Siegel // Duke Math. J., 23 (1956), 571 – 577.

[3] Gupta A.K., Nagar D.K. Matrix Variate Distributions. N.Y.: Chapman & Hall, 1999.

[4] Johnson N.L., Kotz S. Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. N.Y.: Wiley, 1972.

[5] Mathai A.M. Jacobians of Matrix Transformations and Functions of Matrix Argument. L.: World Scientific, 1997.

[6] Muirhead R.J. Aspects of Multivariate Statistical Theory. Wiley-Interscience, 2005.

[7] Olkin I. A Class of Integral Identities with Matrix Argument // Duke Math. J., 26 (1959), 207 – 213.

[8] Olkin I., Rubin H. Multivariate Beta Distributions and Independence Properties of the Wishart Distribution // Ann. Math. Statist., 35 (1964), 261 – 269. (Correction: 37 (1966), 297)

[9] Quintana J.M., Lourdes V., Aguilar O., Liu J. Global Gambling // Bayesian Statistics 7 / Bernardo J.M., Bayarri M.J., Berger J.O., Dawid A.P., Heckerman D., Smith A.F.M., West M. (eds). N.Y.: Oxford Univ. Press, 2003, 349 – 367.

[10] Shephard N. Local Scale Models: State Space Alternative to Integrated GARCH Processes // J. of Econometrics, 60 (1994), 181 – 202.

[11] Uhlig H. Bayesian Vector Autoregressions with Stochastic Volatility // Econometrica, 65 (1997), 59 – 73.

[12] Шведов А.С. Интерполяция сплайнами в многопериодной портфельной задаче. Препринт WP2/2007/02. М.: Изд. дом Государственного университета – Высшей школы экономики, 2007.

*Препринт WP2/2009/01*
*Серия WP2*
*Количественный анализ в экономике*

А.С. Шведов

**Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение**

Публикуется в авторской редакции

Выпускающий редактор *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Отпечатано в типографии Государственного университета – Высшей школы экономики с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 2,2.
Усл. печ. л. 2,09. Заказ № . Изд. № 892

Государственный университет – Высшая школа экономики.
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Государственного университета – Высшей школы экономики.
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73

Для заметок

Для заметок

Для заметок