М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.925

О ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ С ВЫРОЖДЕННОЙ БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ. II

М.В. Долов, С.А. Чистякова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

svchistyakova@mail.ru

Поступила в редакцию 16.09.2010

Доказывается, что полиномиальное векторное поле четвертой степени с вырожденной бесконечностью имеет не более 9 линейных частных интегралов, в том числе и с комплексными коэффициентами.

Ключевые слова: полиномиальные векторные поля, алгебраические дифференциальные уравнения, частные интегралы, инвариантные множества, вырожденная бесконечность.

Введение

Работа является непосредственным продолжением статьи [1]. Нумерация пунктов и формул сквозная.

Как и в [1], рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \qquad (1.1)$$

где P и Q – взаимно простые полиномы, $\max(\deg P, \deg Q) = n$.

По определению, система (1.1) вырождена на бесконечности, если

$$xQ_n(x,y)-yP_n(x,y)\equiv 0,$$

где P_n и Q_n – однородные полиномы степени n, содержащиеся в P и Q соответственно; A_n – совокупность систем (1.1) с вырожденной бесконечностью.

В настоящей работе (часть II) рассматриваются системы из A_4 такие, что наибольшее число инвариантных множеств

$$\Phi_j(x,y)=a_jx+b_jy+c_j=0\,, \qquad (2.1)$$

где a_j, b_j, $c_j \in \boldsymbol{C}$, и для любых двух множеств $\Phi_s = 0$ и $\Phi_v = 0$
выполнено условие

$$D(\Phi_s,\Phi_v)/D(x,y)=0, \qquad (2.3)$$

равно 3 и 2.

В этих случаях доказывается утверждение теоремы 1.1 [1].

4. Системы из A_4 с инвариантным множеством, содержащим три инвариантных множества (2.1) с условием (2.3)

В настоящем пункте рассматриваются системы (1.1) из A_4, у которых нет четырех инвариантных множеств (2.1), удовлетворяющих условию (2.3).

Лемма 4.1. *Если система* (*1.1*) *из* A_4 *имеет инвариантное множество* L_1*, являющееся объединением трех инвариантных множеств* (*2.1*) *с условием* (*2.3*)*, то всякое другое инвариантное множество* L_2*, пересечение которого с* L_1 *не содержит инвариантных множеств* (*2.1*)*, является объединением не более двух инвариантных множеств* (*2.1*) *с условием* (*2.3*).

Доказательство. Допустим противное. Тогда без ограничения общности считаем $L_1 = \{y = \alpha_1\}\cup\{y = \alpha_2\}\cup\{y = \alpha_3\}$, $L_2 = \{x = \beta_1\}\cup\{x = \beta_2\}\cup\{x = \beta_3\}$. Система (1.1) линейной невырожденной заменой приводится к виду

$$\frac{dx}{dt}=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)(ax+by+c),$$

$$\frac{dy}{dt}=(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_3)(Ax+By+C),$$

где $|a|+|b|+|A|+|B|>0$. Так как эта система из A_4, то, в силу условия (1.2),

$$xy^3(Ax+By)\equiv yx^3(ax+by).$$

Отсюда следует $A = B = a = b = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть система* (*1.1*) *из* A_4 *имеет два инвариантных множества* L_1 *и* L_2, *при этом* L_1 *содержит три, а* L_2 – *два инвариантных множества* (*2.1*) *с условиями* (*2.3*) *и пересечение* L_1 *и* L_2 *не содержит инвариантных множеств* (*2.1*). *Тогда линейной невырожденной заменой переменных с точностью до обозначений система* (*1.1*) *приводится к виду*

$$\frac{dx}{dt} = (x-\beta_1)(x-\beta_2)(y^2+ax+by+c) \equiv P,$$
$$\frac{dy}{dt} = x(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_3) \equiv Q, \tag{4.1}$$

где α_j *попарно различны;* $\beta_1 \neq \beta_2$, $\beta_1\beta_2 \neq 0$; a, b, $c \in C$; P *и* Q *взаимно просты*.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $L_1 = \{y = \alpha_1\}\cup\{y = \alpha_2\}\cup\{y = \alpha_3\}$, $L_2 = \{x = \beta_1\}\cup\{x = \beta_2\}$. Так как множества L_1 и L_2 инвариантны для системы (1.1) при $n = 4$, то система (1.1) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\times$$
$$\times(a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x +$$
$$+a_{01}y + a_{00}), \tag{4.2}$$
$$\frac{dy}{dt} = (y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\times$$
$$\times(y-\alpha_3)(b_{10}x + b_{01}y + b_{00}),$$

при этом, в силу (1.2), выполнено тождество

$$y^2(b_{10}x + b_{01}y) \equiv x(a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2). \tag{4.3}$$

Из соотношения (4.3) вытекает, что $a_{20} = a_{11} = b_{01} = 0$, $b_{10} = a_{02} \neq 0$. Разделим обе части (4.2) на $a_{02} = b_{10} \neq 0$ и положим $x + b_{00}/b_{10} = x_1$. Вводя новые обозначения для коэффициентов, в том числе для β_1 и β_2, получим систему вида (4.1). Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Система* (*4.1*) *имеет частный интеграл* $y = kx + l$, $k \neq 0$, *тогда и только тогда, когда для всех* x

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x+(2kl+bk+a)k^{-2}) \equiv$$
$$\equiv \left(x+(l-\alpha_1)/k\right)\left(x+(l-\alpha_2)/k\right)\times \tag{4.4}$$
$$\times\left(x+(l-\alpha_3)/k\right),$$

при этом

$$l^2 + bl + c = 0 \text{ и } 2k\alpha_j + bk + a = 0 \text{ при } l = \alpha_j. \tag{4.5}$$

Доказательство. Система (4.1) допускает частный интеграл $y = kx + l$, $k \neq 0$, в том и только том случае, если для любых x

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\times$$
$$\times\left(x^2+(2kl+bk+a)k^{-2}x+(l^2+bl+c)k^{-2}\right)\equiv$$
$$\equiv\left(x+(l-\alpha_1)/k\right)\left(x+(l-\alpha_2)/k\right)\times \tag{4.6}$$
$$\times\left(x+(l-\alpha_3)/k\right)x.$$

Так как $\beta_1\beta_2 \neq 0$, то, в силу (4.6), x является делителем квадратного трехчлена в левой части (4.6). Поэтому $l^2 + bl + c = 0$. В случае $l = \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$, квадратный трехчлен в левой части (4.6) тождествен x^2. Следовательно, имеет место второе равенство (4.5). Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Система* (*4.1*) *не имеет частных интегралов 1*) $y = k_1x + \alpha_s$, $y = k_2x + \alpha_s$, $k_1k_2 \neq 0$, $k_1 \neq k_2$, $s \in \{1, 2, 3\}$; *2*) $y = kx + \alpha_s$, $y = kx + \alpha_j$, $k \neq 0$, $\alpha_j \neq \alpha_s$.

Доказательство. Допустим противное. В первом случае без ограничения общности полагаем $s = 1$. В силу леммы 4.3, имеем

$$\alpha_1^2 + b\alpha_1 + c = 0,$$
$$(b+2\alpha_1)k_1 + a = (b+2\alpha_1)k_2 + a = 0.$$

Поэтому при $k_1 \neq k_2$ получим $b + 2\alpha_1 = a = 0$ и $c = \alpha_1^2$. Отсюда следует, что правые части (4.1) имеют общий делитель $y - \alpha_1$. Во втором случае, согласно (4.5), будем иметь $\alpha_j = \alpha_s$. Таким образом, получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Если корни уравнения* $l^2 + bl + c = 0$ *принадлежат множеству* $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, *то число линейных частных интегралов системы* (*4.1*) *с взаимно простыми правыми частями и попарно различными* α_j, $\beta_1 \neq \beta_2$, $\beta_1\beta_2 \neq 0$, *не более 7*.

Доказательство. Заметим, что если уравнение $l^2 + bl + c = 0$ имеет кратный корень $l = -b/2 = \alpha_j$, то, согласно (4.5), $a = 0$, $c = \alpha_j^2$, и правые части (4.1) содержат общий делитель $y - \alpha_j$. Поэтому решения l_1, l_2 уравнения $l^2 + bl + c = 0$ различны. Отсюда и из лемм 4.3 и 4.4 следует, что система (4.1), кроме $y = \alpha_1$, $y = \alpha_2$, $y = \alpha_3$, $x = \beta_1$, $x = \beta_2$, может иметь не более двух частных интегралов $y = k_jx + \alpha_s$, $k_j \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 4.6. *Система* (*4.1*) *не имеет инвариантных множеств* $y = kx + l_1$, $y = kx + l_2$, $k \neq 0$, $l_1 \neq l_2$, $l_1, l_2 \notin \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, согласно (4.6), при $l = l_1$, $\beta_1\beta_2 \neq 0$, без ограничения общности можно считать

$$\beta_1 = (\alpha_1 - l_1)/k,\ \beta_2 = (\alpha_2 - l_1)/k,$$
$$k(\alpha_3 - l_1 + b) + a = 0. \tag{4.7}$$

Полагая в (4.6) $l = l_2$, будем иметь

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\left(x+(2kl_2+bk+a)/k^2\right)\equiv$$
$$\equiv\left(x+(l_2-\alpha_1)/k\right)\left(x+(l_2-\alpha_2)/k\right)\times \quad (4.8)$$
$$\times\left(x+(l_2-\alpha_3)/k\right).$$

Так как α_j попарно различны и $\beta_1\neq\beta_2$, то, согласно (4.7) и (4.8),

$$\beta_1\neq(\alpha_1-l_2)/k,\ \beta_2\neq(\alpha_2-l_2)/k. \quad (4.9)$$

Поэтому, в силу (4.7) и (4.8), имеются две возможности: а) $\beta_1=(\alpha_2-l_2)/k$; б) $\beta_1=(\alpha_3-l_2)/k$. Пусть реализуется случай а). Тогда в тождестве (4.8) $\beta_2\neq(\alpha_1-l_2)/k$, ибо в противном случае $\alpha_1-l_1=\alpha_2-l_2$ и $\alpha_2-l_1=\alpha_1-l_2$. Следовательно, $l_1=l_2$. Последнее противоречит условию $l_1\neq l_2$. Таким образом,

$$\beta_2=(\alpha_3-l_2)/k,\quad k(\alpha_1+l_2+b)+a=0. \quad (4.10)$$

При $\beta_1=(\alpha_2-l_2)/k$ из равенств (4.7) и (4.10) получаем

$$\alpha_1-\alpha_2=\alpha_2-\alpha_3=\alpha_1-\alpha_3=l_1-l_2.$$

Последнее невозможно, так как α_j попарно различны. Следовательно, случай а) не реализуется.

Пусть имеет место случай б) $\beta_1=(\alpha_3-l_2)/k$, тогда, в силу (4.7) и (4.8),

$$\beta_2=(\alpha_1-l_2)/k,\quad k(\alpha_2+l_2+b)+a=0. \quad (4.11)$$

Из равенств (4.7) и (4.11) вытекает, что

$$\alpha_1-\alpha_3=\alpha_2-\alpha_1=\alpha_2-\alpha_3=l_1-l_2.$$

Снова получили противоречие с тем, что α_j попарно различны. Лемма доказана.

Лемма 4.7. *Пусть система* (4.1) *имеет различные частные интегралы* $y=k_1x+l$, $y=k_2x+l$, $y=k_3x+l$, *где* $k_j\neq 0$, $l\notin\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$. *Тогда с точностью до обозначений выполнена одна из серий равенств*

$$\beta_1=\frac{\alpha_1-l}{k_1}=\frac{\alpha_2-l}{k_2}=\frac{\alpha_3-l}{k_3},$$
$$\beta_2=\frac{\alpha_2-l}{k_1}=\frac{\alpha_3-l}{k_2}=\frac{\alpha_1-l}{k_3}, \quad (4.12)$$

где

$$a+(\alpha_3+b+l)k_1=a+(\alpha_1+b+l)k_2=$$
$$=a+(\alpha_2+b+l)k_3=0, \quad (4.13)$$

или соответственно

$$\beta_1=\frac{\alpha_1-l}{k_1}=\frac{\alpha_3-l}{k_2}=\frac{\alpha_2-l}{k_3},$$
$$\beta_2=\frac{\alpha_2-l}{k_1}=\frac{\alpha_1-l}{k_2}=\frac{\alpha_3-l}{k_3}, \quad (4.14)$$

где

$$a+(\alpha_3+b+l)k_1=$$
$$=a+(\alpha_2+b+l)k_2= \quad (4.15)$$
$$=a+(\alpha_1+b+l)k_3=0,$$

при этом $a\neq 0$.

Доказательство. В силу леммы 4.3 выполнены тождества

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\left(x+(2k_1l+bk_1+a)k_1^{-2}\right)\equiv$$
$$\equiv\left(x+(l-\alpha_1)k_1^{-1}\right)\left(x+(l-\alpha_2)k_1^{-1}\right)\times \quad (4.16)$$
$$\times\left(x+(l-\alpha_3)k_1^{-1}\right),$$

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\left(x+(2k_2l+bk_2+a)k_2^{-2}\right)\equiv$$
$$\equiv\left(x+(l-\alpha_1)k_2^{-1}\right)\left(x+(l-\alpha_2)k_2^{-1}\right)\times \quad (4.17)$$
$$\times\left(x+(l-\alpha_3)k_2^{-1}\right),$$

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\left(x+(2k_3l+bk_3+a)k_3^{-2}\right)\equiv$$
$$\equiv\left(x+(l-\alpha_1)k_3^{-1}\right)\left(x+(l-\alpha_2)k_3^{-1}\right)\times \quad (4.18)$$
$$\times\left(x+(l-\alpha_3)k_3^{-1}\right).$$

Без ограничения общности считаем, что в (4.16)

$$\beta_1=(\alpha_1-l)/k_1,\ \beta_2=(\alpha_2-l)/k_1,$$
$$a+(\alpha_3+l+b)k_1=0. \quad (4.19)$$

Так как α_j и k_j попарно различны и $k_j\neq 0$ при $\beta_1\neq\beta_2$, $\beta_1\beta_2\neq 0$, то

$$\beta_1\neq(\alpha_1-l)/k_2,\ \beta_1\neq(\alpha_1-l)/k_3,$$
$$\beta_2\neq(\alpha_2-l)/k_2,\ \beta_2\neq(\alpha_2-l)/k_3. \quad (4.20)$$

Рассматривая тождество (4.17) с учетом (4.19), видим, что могут быть две возможности: а) $\beta_1=(\alpha_2-l)/k_2$, б) $\beta_1=(\alpha_3-l)/k_2$. Пусть реализуется случай а) $\beta_1=(\alpha_1-l)/k_1=$ $=(\alpha_2-l)/k_2$. Тогда $\beta_2=(\alpha_2-l)/k_1$ $=$ $=(\alpha_3-l)/k_2$ и $a+(\alpha_1+l+b)k_2=0$. В самом деле, пусть при $\beta_1=(\alpha_1-l)/k_1$ $=$ $(\alpha_2-l)/k_2$ значение $\beta_2=(\alpha_2-l)/k_1$ $=$ $(\alpha_1-l)/k_2$. Тогда, в силу (4.17), имеем $a+(\alpha_3+l+b)k_2=0$. Отсюда и из последнего равенства (4.19) с учетом неравенства $k_1\neq k_2$ следует, что $a=\alpha_3+b+l=0$. Полагая в (4.16) и (4.18) $a=0$, $\alpha_3+b+l=0$, получим

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\equiv$$
$$\equiv\left(x+(l-\alpha_1)k_1^{-1}\right)\left(x+(l-\alpha_2)k_1^{-1}\right),$$
$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\equiv$$
$$\equiv\left(x+(l-\alpha_1)k_3^{-1}\right)\left(x+(l-\alpha_2)k_3^{-1}\right).$$

Отсюда с учетом ограничений на k_j имеем $(l-\alpha_1)k_1^{-1}=(l-\alpha_2)k_3^{-1}$, $(l-\alpha_2)k_1^{-1}=(l-\alpha_1)k_3^{-1}$. Так как в случае а) $(\alpha_1-l)/(\alpha_2-l)=k_1/k_2=$

$= k_2/k_1$, то $k_1 = -k_2$. Отсюда и из предыдущих равенств находим $k_3 = -k_1 = k_2$. Последнее противоречит условию леммы. Следовательно, $\beta_2 = (\alpha_3 - l)/k_2$ и, в силу (4.17), $a + (\alpha_1 + l + b)k_2 = 0$.

Для $\beta_1 = (\alpha_1 - l)/k_1 = (\alpha_2 - l)/k_2, \beta_2 = (\alpha_2 - l)/k_1 = (\alpha_3 - l)/k_2$, в силу неравенств (4.20) и условий на k_j, из тождества (4.18) находим $\beta_1 = (\alpha_3 - l)/k_3$, $\beta_2 = (\alpha_1 - l)/k_3$, $a + (\alpha_2 + l + b)k_3 = 0$. Таким образом, в случае а) имеют место соотношения (4.12) и (4.13).

В случае б) аналогично доказывается, что справедливы равенства (4.14) и (4.15).

Согласно (4.13) и (4.15), при $a = 0$ среди α_j есть равные. Так как это противоречит условию леммы, то $a \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 4.8. *Система (4.1) не может иметь четырех частных интегралов* $y = k_j x + l$, $j = \overline{1,4}$, *где* $k_j \neq 0$ *и попарно различны,* $l \notin \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда наряду с (4.16)–(4.18) для всех x, в силу леммы 4.3, имеет место тождество

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\left(x+(2k_4 l + bk_4 + a)k_4^{-2}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(x + \frac{l-\alpha_1}{k_4}\right)\left(x + \frac{l-\alpha_2}{k_4}\right)\left(x + \frac{l-\alpha_3}{k_4}\right).$$

Отсюда следует, что β_1 совпадает с одной из величин $(l-\alpha_1)/k_4$, $(l-\alpha_2)/k_4$, $(l-\alpha_3)/k_4$. С другой стороны, в силу леммы 4.7, выполнена одна из серий равенств (4.12) или (4.14). Следовательно, среди k_j есть равные. Из противоречия вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 4.9. *Если при* $b^2 \neq 4c$ *один корень уравнения* $l^2 + bl + c = 0$ *принадлежит множеству* $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, *а другой не является элементом этого множества, то число линейных частных интегралов системы* (*4.1*) *не более 9*.

Доказательство. Система (4.1), кроме $x = \beta_1$, $x = \beta_2$, $y = \alpha_1$, $y = \alpha_2$, $y = \alpha_3$, согласно лемме 4.3, может иметь инвариантное множество $y = kx + l$, $k \neq 0$, где l – корень уравнения $l^2 + bl + c = 0$. Пусть l_1 и l_2 – корни этого уравнения и $l_1 = \alpha_s$, $l_2 \neq \alpha_j$. Тогда по лемме 4.4. система (4.1) может иметь только один частный интеграл $y = kx + l_1$, $k \neq 0$, и, в силу леммы 4.8, не более трех частных интегралов $y = k_1x + l_2$, $y = k_2x + l_2$, $y = k_3x + l_2$, $k_1k_2k_3 \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 4.10. *Пусть* $b^2 = 4c$. *Тогда число линейных частных интегралов системы* (*4.1*) *при* $-b/2 \neq \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$, *не более 8*.

Доказательство. При $b^2 = 4c$ уравнение $l^2 + bl + c = 0$ имеет кратный корень $l = -b/2$. Для $-b/2 = l \neq \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$, в силу леммы 4.8, кроме $y = \alpha_1$, $y = \alpha_2$, $y = \alpha_3$, $x = \beta_1$, $x = \beta_2$, система (4.1) может иметь не более трех частных интегралов $y = k_jx - b/2$, $k_j \neq 0$. Отсюда и из леммы 4.3 вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Замечание 4.1. *Если* $b^2 = 4c$, $l = -b/2 \in \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, *то* $a = 0$, $c = \alpha_j^2$ *и правые части системы* (*4.1*) *имеют общий делитель* $y - \alpha_j$.

Лемма 4.11. *Пусть система* (*4.1*) *имеет инвариантные множества*

$$L = \bigcup_{j=1}^{m}\{y = k_j x + l\},\ L_1 = \bigcup_{j=1}^{v}\{y = k_j^1 x + l_1\},$$

где $k_j k_j^1 \neq 0$, $l \neq l_1$ *и* l, l_1 *отличны от* $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$. *Тогда* $m + v \leq 4$ *и* $m \leq 2$, $v \leq 2$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда с точностью до обозначений L, в силу леммы 4.8, содержит три различных линейных частных интеграла $y = k_1x + l$, $y = k_2x + l$, $y = k_3x + l$. Согласно лемме 4.7, выполнены равенства (4.12), (4.13) либо (4.14), (4.15). Из этих равенств следует, что

$$a\beta_1 = (\alpha_1 - l)(l_1 - \alpha_3) = (\alpha_2 - l)(l_1 - \alpha_1) = (\alpha_3 - l)(l_1 - \alpha_2),$$
$$a\beta_2 = (\alpha_2 - l)(l_1 - \alpha_3) = (\alpha_3 - l)(l_1 - \alpha_1) = (\alpha_1 - l)(l_1 - \alpha_2).$$

Отсюда имеем

$$a(\beta_1 - \beta_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)(l_1 - \alpha_3) = (\alpha_2 - \alpha_3)(l_1 - \alpha_1) = (\alpha_3 - \alpha_1)(l_1 - \alpha_2), \tag{4.21}$$

$$\beta_1/\beta_2 = (\alpha_1 - l)/(\alpha_2 - l) = (\alpha_2 - l)/(\alpha_3 - l) = (\alpha_3 - l)/(\alpha_1 - l). \tag{4.22}$$

Из равенств (4.22) следует, что

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_3} = \frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_3-\alpha_1} = \frac{\alpha_1-l}{\alpha_2-l} = \frac{\alpha_2-l}{\alpha_3-l} = \frac{\alpha_3-l}{\alpha_1-l}. \tag{4.23}$$

Согласно (4.21) и (4.23), имеем

$$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_3} = \frac{l_1-\alpha_1}{l_1-\alpha_3} = \frac{\alpha_3-l}{\alpha_1-l}, \tag{4.24}$$

$$\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_3-\alpha_1} = \frac{l_1-\alpha_2}{l_1-\alpha_1} = \frac{\alpha_1-l}{\alpha_2-l}. \tag{4.25}$$

Из равенств (4.24), (4.25) получаем

$$(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3+\alpha_1-l-l_1)=0,$$
$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2-l-l_1)=0.$$

Отсюда вытекает, что среди α_1, α_2, α_3 есть равные. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

Контрпример к работе [5], содержащийся во введении [1], является примером к лемме 4.11.

Теорема 4.1. *Максимальное число линейных частных интегралов системы* (*4.1*) *равно 9*.

Доказательство. Во введении [1] содержится пример системы (4.1) с 9 различными линейными частными интегралами. Если система (4.1), кроме $x=\beta_1$, $x=\beta_2$, $y=\alpha_1$, $y=\alpha_2$, $y=\alpha_3$, имеет инвариантные множества $y=kx+l$, $k\neq 0$, то в силу леммы 4.3, l является решением уравнения $l^2+bl+c=0$. Число таких множеств, согласно леммам 4.4–4.6, 4.9–4.11, не более 4. Теорема доказана.

5. Системы из A_4 с инвариантным множеством, являющимся объединением трех инвариантных множеств (2.1) с условием (2.3) и не допускающих других инвариантных множеств с условием (2.3)

В этом пункте рассматриваются системы (1.1) из A_4, у которых с точностью до обозначений, кроме $\Phi_1=0$, $\Phi_2=0$, $\Phi_3=0$, где $a_1=a_2=a_3$, $b_1=b_2=b_3$, c_j, $j=\overline{1,3}$, попарно различны, нет других инвариантных множеств (2.1) с условием (2.3).

Лемма 5.1. *Пусть система* (*1.1*) *из* A_4 *имеет не менее четырех инвариантных множеств* (*2.1*), *при этом только три из них удовлетворяют условию* (*2.3*), *и кроме этих трех инвариантных множеств, нет других инвариантны множеств* (*2.1*) *с условием* (*2.3*).

Тогда линейной невырожденной заменой с точностью до обозначений система (*1.1*) *с вырожденной бесконечностью при n = 4 приводится к виду*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x\Big((ax+by)y^2+p_{20}x^2+p_{11}xy+\\&\quad+p_{02}y^2+p_{10}x+p_{01}y+p_{00}\Big)\equiv P,\\ \frac{dy}{dt}&=(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_3)\times\\&\quad\times(ax+by+c)\equiv Q,\end{aligned}\qquad(5.1)$$

где $|a|+|b|>0$, $c\neq 0$ *при* $b=0$, α_j – *попарно различны и у системы* (*5.1*) *нет инвариантных множеств* $y=kx+l$, $y=kx+l_1$, $k\neq 0$, $l\neq l_1$, P *и* Q – *взаимно просты*.

Лемма 5.2. *Система* (*5.1*) *имеет частный интеграл* $y=kx+l$, $k\neq 0$ *тогда и только тогда, когда для всех* x

$$\begin{aligned}&kx\Big((kx+l)^2((a+bk)x+bl+p_{02})+\\&+(kx+l)(p_{11}x+p_{01})+p_{20}x^2+p_{10}x+p_{00}\Big)\equiv\\&\equiv(kx+l-\alpha_1)(kx+l-\alpha_2)(kx+l-\alpha_3)\times\\&\times\big((a+bk)x+bl+c\big),\end{aligned}\qquad(5.2)$$

при этом $l\in\{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\}\cup\{-c/b\}$ *и для* $l=\alpha_j=-c/b$ *выполнено равенство*

$$(p_{02}-c)c^2-bcp_{01}+b^2p_{00}=0 \text{ при } b\neq 0.\qquad(5.3)$$

Доказательство. Подставляя $y=kx+l$ в дифференциальное уравнение, эквивалентное системе (5.1), получим тождество (5.2).

Так как левая часть (5.2) равна нулю при $x=0$, то l совпадает с одним из чисел $\alpha_1,\alpha_2\alpha_3,-c/b$. При $l=\alpha_j=-c/b$ правая часть (5.2) имеет $x=0$ корнем кратности два. Поэтому $l^2(bl+p_{02})+lp_{01}+p_{00}=0$. Отсюда для $l=-c/b$ получаем (5.3). Лемма доказана.

Лемма 5.3. *1. Система* (*5.1*) *имеет частный интеграл* $y=kx+\alpha_1$, $k\neq 0$ *в том и только том случае, когда*

$$A_1k^2+B_1k+p_{20}=0,\qquad(5.4)$$
$$(2\alpha_1A_1+C_1)k+B_1\alpha_1+p_{10}-a\alpha_2\alpha_3=0,\qquad(5.5)$$
$$\alpha_1^2A_1+\alpha_1C_1+p_{00}-c\alpha_2\alpha_3=0,\qquad(5.6)$$

где

$$\begin{aligned}A_1&=p_{02}+(\alpha_2+\alpha_3)b-c,\\ B_1&=p_{11}+a(\alpha_2+\alpha_3),\end{aligned}\qquad(5.7)$$
$$C_1=p_{01}-\alpha_2\alpha_3b+(\alpha_2+\alpha_3)c.\qquad(5.8)$$

2. Система (*5.1*) *допускает частный интеграл* $y=kx+\alpha_2$, $k\neq 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$A_2k^2+B_2k+p_{20}=0,\qquad(5.9)$$
$$(2\alpha_2A_2+C_2)k+B_2\alpha_2+p_{10}-a\alpha_1\alpha_3=0,\qquad(5.10)$$
$$\alpha_2^2A_2+\alpha_2C_2+p_{00}-c\alpha_1\alpha_3=0,\qquad(5.11)$$

где

$$\begin{aligned}A_2&=p_{02}+(\alpha_1+\alpha_3)b-c,\\ B_2&=p_{11}+a(\alpha_1+\alpha_3),\\ C_2&=p_{01}-\alpha_1\alpha_3b+(\alpha_1+\alpha_3)c.\end{aligned}\qquad(5.12)$$

3. Система (*5.1*) *имеет частный интеграл* $y=kx+\alpha_3$, $k\neq 0$ *в том и только том случае, если*

$$A_3k^2+B_3k+p_{20}=0,\qquad(5.13)$$
$$(2\alpha_3A_3+C_3)k+B_3\alpha_3+p_{10}-a\alpha_1\alpha_2=0,\qquad(5.14)$$

$$\alpha_3^2 A_3 + \alpha_3 C_3 + p_{00} - c\alpha_1\alpha_2 = 0, \qquad (5.15)$$

где

$$A_3 = p_{02} + (\alpha_1 + \alpha_2)b - c,$$
$$B_3 = p_{11} + a(\alpha_1 + \alpha_2), \qquad (5.16)$$
$$C_3 = p_{01} - \alpha_1\alpha_2 b + (\alpha_1 + \alpha_2)c.$$

Доказательство. Соотношения (5.4)–(5.6), (5.9)–(5.11) и (5.13)–(5.15) получаются из тождеств (5.2) при $l = \alpha_1$, $l = \alpha_2$, $l = \alpha_3$ соответственно, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *1. Если система* (*5.1*) *имеет инвариантные множества* $y = k_1x + \alpha_1$, $y = k_2x + \alpha_1$, $k_1 \neq k_2$, $k_1k_2 \neq 0$, *то*

$$A_1(k_1 + k_2) + B_1 = 0,\ 2\alpha_1 A_1 + C_1 = 0,$$
$$\alpha_1 B_1 = a\alpha_2\alpha_3 - p_{10},\ \alpha_1^2 A_1 = p_{00} - c\alpha_2\alpha_3, \qquad (5.17)$$

где A_1, B_1, C_1 *имеют вид* (*5.7*), (*5.8*).

2. Если система (*5.1*) *имеет инвариантные множества* $y = k_3x + \alpha_2$, $y = k_4x + \alpha_2$, $k_3 \neq k_4$, $k_3k_4 \neq 0$, *то*

$$A_2(k_3 + k_4) + B_2 = 0,\ 2\alpha_2 A_2 + C_2 = 0,$$
$$\alpha_2 B_2 = a\alpha_1\alpha_3 - p_{10},\ \alpha_2^2 A_2 = p_{00} - c\alpha_1\alpha_3, \qquad (5.18)$$

где A_2, B_2, C_2 *имеют вид* (*5.12*).

3. Если система (*5.1*) *имеет инвариантные множества* $y = k_5x + \alpha_3$, $y = k_6x + \alpha_3$, $k_5 \neq k_6$, $k_5k_6 \neq 0$, *то*

$$A_3(k_5 + k_6) + B_3 = 0,\ 2\alpha_3 A_3 + C_3 = 0,$$
$$\alpha_3 B_3 = a\alpha_1\alpha_2 - p_{10},\ \alpha_3^2 A_3 = p_{00} - c\alpha_1\alpha_2, \qquad (5.19)$$

где A_3, B_3, C_3 *имеют вид* (*5.16*).

Доказательство. Равенства (5.17)–(5.19) получаются соответственно из соотношений (5.4)–(5.6) при $k = k_1$, $k = k_2$; (5.9)–(5.11) при $k = k_3$, $k = k_4$ и (5.13)–(5.15) при $k = k_5$, $k = k_6$ и условий $k_1 \neq k_2$, $k_3 \neq k_4$, $k_5 \neq k_6$. Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Система* (*5.1*) *не может иметь инвариантных множеств* $y = k_1x + \alpha_j$, $y = k_2x + \alpha_j$, $y = k_3x + \alpha_j$, *где* k_1, k_2, k_3 *отличны от нуля и попарно различны*, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. Допустим противное, считая $j = 1$. Тогда, в силу леммы 5.3, $A_1 = B_1 = p_{20} = C_1 = 0$. Отсюда с учетом (5.6)–(5.8) имеем $p_{02} = c - b(\alpha_2 + \alpha_3)$, $p_{11} = -a(\alpha_2 + \alpha_3)$, $p_{01} = \alpha_2\alpha_3 b - (\alpha_2 + \alpha_3)c$, $p_{10} = a\alpha_2\alpha_3$, $p_{00} = c\alpha_2\alpha_3$. Для таких значений коэффициентов в (5.1) $P \equiv x(ax + by + c)(y - \alpha_2)(y - \alpha_3)$. Следовательно, P и Q имеют общий делитель, тождественно не равный постоянной. Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Если система* (*5.1*) *имеет инвариантные множества* $y = k_1x + \alpha_1$, $y = k_2x + \alpha_1$, $y = k_3x + \alpha_2$, $y = k_4x + \alpha_2$, $k_j \neq 0$, $k_1 \neq k_2$, $k_3 \neq k_4$, *то*

$$2p_{02} + 3b\alpha_3 - 3c = 0,\ \ p_{11} + 2a\alpha_3 = 0,$$
$$c(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = \qquad (5.20)$$
$$= b(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2).$$

Доказательство. В силу леммы 5.4 имеем

$$2\alpha_1 A_1 + C_1 = 2\alpha_2 A_2 + C_2.$$

Подставляя в это равенство вместо A_1, C_1, A_2, C_2 их выражения из (5.7), (5.8) и (5.12), получим первое равенство (5.20). Согласно (5.17) и (5.18), имеем

$$\alpha_1 B_1 - \alpha_2 B_2 = a\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Заменяя в левой части этого равенства B_1, B_2 из формул (5.7) и (5.12), получим $p_{11} + 2a\alpha_3 = 0$. Из леммы 5.4 следует, что $\alpha_1^2 A_1 - \alpha_2^2 A_2 = c\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)$. Подставляя в левую часть этого соотношения вместо A_1 и A_2 их значения из (5.7) и (5.12), получим

$$p_{02}(\alpha_1 + \alpha_2) + b(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) =$$
$$= c(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Если здесь p_{02} заменить из первого равенства (5.20), то будем иметь последнее равенство (5.20). Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Система* (*5.1*) *не имеет линейных частных интегралов вида* $y = k_1x + \alpha_1$, $y = k_2x + \alpha_1$, $y = k_3x + \alpha_2$, $y = k_4x + \alpha_2$, $y = k_5x + \alpha_3$, $y = k_6x + \alpha_3$, *где* $k_j \neq 0$ *и попарно различны*.

Доказательство. Допустим противное. В силу леммы 5.4 имеем

$$2\alpha_1 A_1 + C_1 = 2\alpha_3 A_3 + C_3,$$

где A_3, C_3 определяются из (5.16). Отсюда после замены A_1, C_1 из (5.7), (5.8), A_3, C_3 из (5.16) получим $2p_{02} + 3b\alpha_2 - 3c = 0$. Из этого равенства и первого соотношения (5.20) вытекает, что $b = 0$, ибо $\alpha_2 \neq \alpha_3$.

В силу леммы 5.4 $B_1\alpha_1 = a\alpha_2\alpha_3 - p_{10}$, $B_3\alpha_3 = a\alpha_1\alpha_2 - p_{10}$. Отсюда, как и при доказательстве леммы 5.6, следует, что $p_{11} + 2a\alpha_2 = 0$. Из этого равенства и второго соотношения (5.20) вытекает, что $a = 0$. Получили противоречие с тем, что в (5.1) $|a| + |b| > 0$. Лемма доказана.

Лемма 5.8. *Если состояние покоя* $(0, -c/b)$ *при* $-c/b \neq \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$, *не принадлежит инвариантным множествам* $y = kx + l$, $k \neq 0$, *то число линейных частных интегралов системы* (*5.1*) *не более 9*.

Доказательство. Так как состояние покоя $(0, -c/b)$ не принадлежит инвариантным множе-

ствам вида $y = kx + l$, $k \neq 0$, то для всякого частного интеграла $y = kx + l$, $k \neq 0$, параметр l, в силу леммы 5.2, принадлежит $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. По лемме 5.5 состояние покоя $(0,\alpha_j)$ может принадлежать не более чем двум инвариантным множествам
$y = kx + \alpha_j$, $k \neq 0$. С другой стороны, в силу леммы 5.7, невозможна ситуация, когда точки $(0,\alpha_1)$, $(0,\alpha_2)$, $(0,\alpha_3)$ одновременно принадлежат инвариантным множествам $y = k_{1s}x + \alpha_s$, $y = k_{2s}x + \alpha_s$, $k_{1s} \neq k_{2s}$, $k_{1s}k_{2s} \neq 0$, $s = 1, 2, 3$. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Изучим случаи, когда система (5.1) имеет частные интегралы $y = kx - c/b$, $c + \alpha_j b \neq 0$, $j = 1, 2, 3$.

Лемма 5.9. *Система* (*5.1*) *имеет линейный частный интеграл* $y = kx - c/b$, $kb \neq 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$
\begin{gathered}
k^2 A_4 + kB_4 + p_{20} = 0,\\
k\big(-2lA_4 + b(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - p_{01}\big) + \\
+\big(2l^2 - 2l(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \\
+\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\big)a - lp_{11} - p_{10} = 0, \quad (5.21)\\
k\big((p_{02} - c)l^2 + p_{01}l + p_{00} - \\
- b(l-\alpha_1)(l-\alpha_2)(l-\alpha_3)\big) - \\
- a(l-\alpha_1)(l-\alpha_2)(l-\alpha_3) = 0,
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
A_4 = p_{02} + b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),\\
B_4 = p_{11} + a(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - l),\\
bl + c = 0.
\end{gathered} \tag{5.22}
$$

Доказательство. Соотношения (5.20) и (5.21) получаются из тождества (5.2) при $bl + c = 0$ путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях в правой и левой частях. Лемма доказана.

Лемма 5.10. *Если* $-c/b \neq \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$, $b \neq 0$, *то система* (*5.1*) *не имеет частных интегралов* $y = k_1x - c/b$, $y = k_2x - c/b$, $k_1k_2 \neq 0$, $k_1 \neq k_2$.

Доказательство. Допустим противное. Полагая в (5.21) $k = k_1$, $k = k_2$ и используя условия $l = -c/b \neq \alpha_j$, $k_1 \neq k_2$, согласно последнему равенству (5.21), найдем, что $a = 0$. При $a = 0$ система (5.1) наряду с $y = \alpha_1$, $y = \alpha_2$, $y = \alpha_3$ имеет частный интеграл $by + c = 0$. Таким образом, у системы (5.1) есть инвариантное множество, содержащее 4 инвариантных множества (2.1) с условием (2.3). Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

Лемма 5.11. *Пусть система* (*5.1*) *допускает частный интеграл* $y = kx - c/b$ *и при этом* $k \neq 0$, $l = -c/b \neq \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$. *Тогда число линейных частных интегралов системы* (*5.1*) *не более 9*.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу лемм 5.2, 5.5, 5.7 и 5.10, с точностью до обозначений система (5.1) имеет частные интегралы $y = k_1x + \alpha_1$, $y = k_2x + \alpha_1$, $k_1k_2 \neq 0$, $k_1 \neq k_2$, $y = k_3x + \alpha_2$, $y = k_4x + \alpha_2$, $k_3k_4 \neq 0$, $k_3 \neq k_4$, $y = k_5x + \alpha_3$, $k_5 \neq 0$. Отсюда и из леммы 5.6 следует, что выполнены соотношения (5.20), где $bl = -c$. По лемме 5.4 $2\alpha_1 A_1 + C_1 = 0$, где A_1 и C_1 определяются формулами (5.7), (5.8). Заменяя A_1 и C_1 их выражениями из (5.7), (5.8), с учетом последнего равенства (5.20) при $bl = -c$ получим $p_{01} = 3bl\alpha_3$. Согласно (5.7) и (5.20), $B_1 = a(\alpha_2 - \alpha_3)$. Отсюда и из (5.17) следует $p_{10} = a(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2)$. В силу леммы 5.4, с учетом (5.17), (5.20) при $bl = -c$ имеем

$$
p_{00} = b\left(\alpha_1^2\alpha_2 - l\alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_3 - \frac{l}{2}\alpha_1^2\right).
$$

Так как система (5.1) допускает частный интеграл $y = kx - c/b$, $l = -c/b$, $k \neq 0$, $b \neq 0$, то по лемме 5.9 выполнены равенства (5.21). Заменяя в левой части второго уравнения (5.21) p_{02}, p_{01}, p_{11}, p_{10} найденными выражениями и используя последнее соотношение (5.20) при $bl = -c$, получим

$$
(3bk + 2a)\big(l^2 - l(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2\big) = 0.
$$

Поскольку $l = -c/b \neq \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$, то $3bk + 2a = 0$. Таким образом, система (5.1) имеет частный интеграл $y = -\dfrac{2a}{3b}x - \dfrac{c}{b}$. Так как $y = k_5x + \alpha_3$, $k_5 \neq 0$, является инвариантным множеством для (5.1), то, в силу леммы 5.3, выполнены равенства (5.13)–(5.16), где $k = k_5$. Подставляя найденные выше значения p_{02}, p_{01}, p_{11} в (5.16), будем иметь

$$
\begin{gathered}
A_3 = (2\alpha_1 + 2\alpha_2 - l - 3\alpha_3)b/2,\\
B_3 = a(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3),\\
C_3 = \big((3\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2)l - \alpha_1\alpha_2\big)b.
\end{gathered} \tag{5.23}
$$

Полагая в (5.14) $k = k_5$ и заменяя A_3, B_3, C_3 из (5.23) и используя найденное выражение для p_{10}, с учетом последнего равенства (5.20) при $bl = -c$ получим

$$
\begin{gathered}
(3bk_5 + 2a)\times\\
\times\big(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 - l(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)\big) = 0.
\end{gathered} \tag{5.24}
$$

Пусть $l(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2$, тогда, в силу последнего равенства (5.20) при $bl = -c$, имеем $(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)=0$. Так как это невозможно, то $3bk_5+2a=0$. Таким образом, система (5.1) допускает частный интеграл $y=-\dfrac{2a}{3b}x+\alpha_3$. Следовательно, система (5.1), кроме $y=\alpha_1$, $y=\alpha_2$, $y=\alpha_3$, имеет по крайней мере еще два частных интеграла с условием (2.3). Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

Из доказанных выше лемм вытекает

Теорема 5.1. *Пусть система* (*1.1*) *с взаимно простыми правыми частями вырождена на бесконечности, имеет только три инвариантных множества* (*2.1*) *с условием* (*2.3*) *и не имеет других инвариантных множеств* (*2.1*) *с условием* (*2.3*). *Тогда число линейных частных интегралов не более 9*.

6. Системы, вырожденные на бесконечности, с двумя инвариантными множествами, являющимися объединениями только двух инвариантных множеств (2.1) с условием (2.3)

В отличие от п. 3–5, будем рассматривать системы (1.1), вырожденные на бесконечности, такие, что наибольшее число инвариантных множеств (2.1), содержащихся в объединении инвариантных множеств (2.1) с условием (2.3), равно двум.

Лемма 6.1. *Если система* (*1.1*) *из* A_4 *имеет два инвариантных множества* L_1 *и* L_2, *каждое из которых является объединением инвариантных множеств* (*2.1*) *с условием* (*2.3*), *при этом пересечение* L_1 *и* L_2 *не содержит инвариантных множеств* (*2.1*) *и максимальное число множеств* (*2.1*), *содержащихся в объединении и удовлетворяющих условию* (*2.3*), *равно двум, то линейной невырожденной заменой с точностью до обозначений система* (*1.1*) *приводится к виду*

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=x(x-\beta)\times\\&\times\big((ax+by)y+p_{10}x+p_{01}y+p_{00}\big)\equiv P(x,y),\\&\frac{dy}{dt}=y(y-\alpha)\times\\&\times\big((ax+by)x+q_{10}x+q_{01}y+q_{00}\big)\equiv Q(x,y),\end{aligned}\tag{6.1}$$

где $|a|+|b|>0$, $\alpha\beta\neq 0$, P *и* Q *– взаимно просты*.

Доказательство. Поскольку каждое из инвариантных множеств L_1 и L_2 содержит два инвариантных множества (2.1) с условием (2.3), то без ограничения общности считаем $L_1=\{y=0\}\cup\{y=\alpha\}$, $L_2=\{x=0\}\cup\{x=\beta\}$, $\alpha\beta\neq 0$. Так как $y=0$, $y=\alpha$, $x=0$, $x=\beta$ – инвариантные множества для (1.1), то Q делится на $y(y-\alpha)$ и P делится на $x(x-\beta)$. По условию леммы система (1.1) при $n=4$ вырождена на бесконечности. Поэтому в силу (1.2) однородные полиномы $p_4(x, y)$ и $q_4(x, y)$, содержащиеся в P и Q, такие, что

$$p_4(x,y)=x\varphi_3(x,y)=x^2\psi_2(x,y),$$

$$q_4(x,y)=y\varphi_3(x,y)=y^2\omega_2(x,y),$$

где φ_j, ψ_j, ω_j – однородные полиномы степени j. Так как

$$\varphi_3(x,y)\equiv x\psi_2(x,y)\equiv y\omega_2(x,y),$$

то ψ_2 делится на y, а ω_2 делится на x. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Система* (*6.1*) *имеет частный интеграл* $y=kx+l$, $k\neq 0$, *тогда и только тогда, когда для всех* x

$$\begin{aligned}&kx(x-\beta)\big(((a+bk)x+bl)\,(kx+l)+\\&+(p_{10}+p_{01}k)x+p_{01}l+p_{00}\big)\equiv\\&\equiv(kx+l)(kx+l-\alpha)\big((bl+(a+bk)x)x+\\&+(q_{10}+q_{01}k)x+q_{01}l+q_{00}\big),\end{aligned}\tag{6.2}$$

при этом $l\in\{0,\alpha,-q_{00}/q_{01}\}$, *причем при* $l=0$ *и* $q_{00}=0$ *значение* $p_{00}=0$, *а при* $l=\alpha\neq 0$ *и* $q_{01}\alpha+q_{00}=0$

$$bl^2+p_{01}l+p_{00}=0.\tag{6.3}$$

Доказательство. Подставляя в дифференциальное уравнение, эквивалентное системе (6.1), $y=kx+l$, получим тождество (6.2). Так как левая часть (6.2) равна нулю для $x=0$, то $l\in\{0,\alpha,-q_{00}/q_{01}\}$. Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Система (6.1) имеет частный интеграл* $y=kx$, $k\neq 0$, *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned}&(b\beta+q_{01})k^2+k(a\beta+q_{10}-p_{01}-\alpha b)-\\&-p_{10}-a\alpha=0,\\&k(\alpha q_{01}-\beta p_{01}-q_{00})+p_{00}-\\&-\beta p_{10}+\alpha q_{10}=0,\\&\alpha q_{00}-\beta p_{00}=0.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Доказательство. Полагая в (6.2) $l=0$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях (6.2), получаем равенства (6.4). Лемма доказана.

Лемма 6.4. *Система* (*6.1*) *не имеет инвариантных множеств* $y=k_1x$, $y=k_2x$, $y=k_3x$, $k_j\neq 0$ *и попарно различны*.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 6.3, выполнены равенства

$$\begin{gathered}\beta b+q_{01}=0,\ a\beta+q_{10}-p_{01}-\alpha b=0,\\ p_{10}+a\alpha=0,\\ \alpha q_{01}-\beta p_{01}-q_{00}=0,\ \ p_{00}-\beta p_{10}+\alpha q_{10}=0,\\ \alpha q_{00}-\beta p_{00}=0.\end{gathered}\tag{6.5}$$

Из соотношений (6.5) имеем

$$\begin{gathered}p_{10}=-\alpha a,\ \ p_{01}=q_{10}-a\beta-\alpha b,\\ p_{00}=-\alpha q_{10}-a\alpha\beta,\\ q_{01}=-b\beta,\ \ q_{00}=-\beta q_{10}-a\beta^2.\end{gathered}\tag{6.6}$$

Подставляя p_{10}, p_{01}, p_{00} из (6.6) в (6.1), будем иметь

$$\frac{dx}{dt}=x(x-\beta)\big(ax+by+q_{10}+a\beta\big)(y-\alpha)\equiv P.$$

Отсюда и из (6.1) следует, что P и Q имеют общий делитель $y-\alpha$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Полагая в тождестве (6.2) $l=\alpha$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, можно показать, что справедлива

Лемма 6.5. *Система* (*6.1*) *имеет линейный частный интеграл* $y=kx+\alpha$, $k\alpha\neq 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}(b\beta+q_{01})k^2+k(a\beta+q_{10}-p_{01})-p_{10}=0,\\ k(2\alpha\beta b+2q_{01}\alpha+\beta p_{01}+q_{00})-\\ -2\alpha^2 b-p_{01}\alpha-p_{00}+\alpha\beta a+\beta p_{10}-\alpha q_{10}=0,\\ \alpha^2 b\beta+\beta(p_{01}\alpha+p_{00})+\alpha(\alpha q_{01}+q_{00})=0.\end{gathered}\tag{6.7}$$

Лемма 6.6. *Система* (*6.1*) *не имеет частных интегралов* $y=k_1x+\alpha$, $y=k_2x+\alpha$, $y=k_3x+\alpha$, $k_j\neq 0$ *и попарно различны*.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 6.5, имеем

$$\begin{gathered}q_{01}=-\beta b,\ \ p_{10}=0,\ \ p_{01}-q_{10}=a\beta,\\ 2\alpha q_{01}+\beta p_{01}+q_{00}=-2\alpha\beta b,\\ \alpha p_{01}+p_{00}-\beta p_{10}+\alpha q_{10}=\alpha\beta a-2\alpha^2 b,\\ \alpha\beta p_{01}+\beta p_{00}+\alpha^2 q_{01}+\alpha q_{00}=-\alpha^2\beta b.\end{gathered}$$

Отсюда получим

$$\begin{gathered}\beta p_{01}+q_{00}=0,\ \alpha\beta p_{01}+\beta p_{00}+\alpha q_{00}=0,\\ \alpha p_{01}+p_{00}+\alpha q_{10}=\alpha\beta a-2\alpha^2 b.\end{gathered}$$

Из первого и второго только что полученных равенств следует, что $p_{00}=0$. При $p_{00}=p_{10}=0$ полиномы P и Q в (6.1) имеют общий делитель y. Из полученного противоречия вытекает утверждение леммы.

Лемма 6.7. *Система* (*6.1*) *имеет частный интеграл* $y=kx+l$, *где* $k\neq 0$, $lq_{01}+q_{00}=0$, *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}k^2(\beta b+q_{01})+k(q_{10}+a\beta+bl-p_{01}-\alpha b)+\\ +al-p_{10}-\alpha a=0,\\ k^2(2\beta bl+\beta p_{01}+q_{01}(2l-\alpha))+\\ +k(\beta p_{10}+q_{10}(2l-\alpha)-\\ -p_{01}l-p_{00}-2\alpha bl+a\beta l+2bl^2)+\\ +al(l-\alpha)=0,\\ k(\beta(bl^2+p_{01}l+p_{00})+l(l-\alpha)q_{01})+\\ +(bl+q_{10})(l-\alpha)l=0.\end{gathered}\tag{6.8}$$

Доказательство. Равенства (6.8) получаются из тождества (6.2), если сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях. Лемма доказана.

Лемма 6.8. *Система* (*6.1*) *не имеет частных интегралов* $y=k_1x+l$, $y=k_2x+l$, $y=k_3x+l$, *где* $l\neq 0$, $l\neq\alpha$, $\alpha\neq 0$, $k_j\neq 0$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу (6.8) и леммы 6.7, выполнены равенства

$$\begin{gathered}q_{01}=-\beta b,\ \ p_{01}-q_{10}=a\beta+bl-\alpha b,\\ p_{10}=al-a\alpha,\\ \beta p_{01}+q_{01}(2l-\alpha)=-2l\beta b,\\ lp_{01}+p_{00}-\beta p_{10}-q_{10}(2l-\alpha)=\\ =l\beta a+2bl^2-2b\alpha l,\\ al(l-\alpha)=0,\ (bl^2+p_{01}l+p_{00})\beta+\\ +l(l-\alpha)q_{01}=0,\\ l(l-\alpha)(bl+q_{10})=0.\end{gathered}\tag{6.9}$$

Так как $l(l-\alpha)\neq 0$, то $a=0$. Поэтому $p_{10}=0$, $q_{10}=-bl$, $p_{01}=-\alpha b$, $p_{00}=0$. При $p_{10}=p_{00}=0$ полиномы P и Q в (6.1) имеют общий делитель y. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 6.9. *Если состояние покоя* $(0,-q_{00}/q_{01})$ *не принадлежит инвариантным множествам* $y=kx+l$, $k\neq 0$, *то число линейных частных интегралов системы* (*6.1*) *не более 8*.

Доказательство. Так как $l\neq -q_{00}/q_{01}$, то, в силу леммы 6.2, $l\in\{0,\alpha\}$. Кроме $x=0$, $x=\beta$, $y=0$, $y=\alpha$, система (6.1), согласно леммам 6.4, 6.6, может иметь еще не более 4 частных интегралов $y=k_1x$, $y=k_2x$, $k_1k_2\neq 0$, $k_1\neq k_2$, $y=k_3x+\alpha$, $y=k_4x+\alpha$, $k_3k_4\neq 0$, $k_3\neq k_4$. Лемма доказана

Лемма 6.10. *Система* (*6.1*) *при* $\alpha\beta\neq 0$ *не может иметь шести линейных частных интегралов вида* $y=k_1x$, $y=k_2x$, $k_1k_2\neq 0$, $k_1\neq k_2$, $y=k_3x+\alpha$, $y=k_4x+\alpha$, $k_3k_4\neq 0$, $k_3\neq k_4$, $y=k_5x+l$, $y=k_6x+l$, *где* $l=-q_{00}/q_{01}$, $l\neq 0$, $l\neq\alpha$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 6.3, выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\alpha q_{01} - \beta p_{01} - q_{00} = 0, \\ &p_{00} - \beta p_{10} + \alpha q_{10} = 0, \\ &\alpha q_{00} - \beta p_{00} = 0. \end{aligned} \qquad (6.10)$$

Согласно леммам 6.5 и 6.7, аналогично получим, что

$$\begin{aligned} &2\alpha q_{01} + \beta p_{01} + q_{00} = -2b\alpha\beta, \\ &\alpha q_{10} + \alpha p_{01} + p_{00} - \beta p_{10} = \alpha\beta a - 2\alpha^2 b, \\ &\alpha^2 q_{01} + \beta p_{00} + \alpha q_{00} + \alpha\beta p_{01} = -\alpha^2\beta b, \\ &l(l-\alpha)q_{01} + \beta l p_{01} + \beta p_{00} = -\beta b l^2, \\ &l(l-\alpha)(bl + q_{10}) = 0. \end{aligned} \qquad (6.11)$$

Так как $l(l-\alpha) \neq 0$, то из последнего уравнения (6.11) находим $q_{10} = -bl$. Отсюда и из (6.10), (6.11) следует, что

$$\begin{aligned} &\alpha q_{01} - \beta p_{01} - q_{00} = 0, \\ &2\alpha q_{01} + \beta p_{01} + q_{00} = -2b\alpha\beta, \\ &\alpha q_{01} + \beta p_{01} + 2q_{00} = -\alpha\beta b, \\ &-\beta p_{10} + (\alpha/\beta)q_{00} = \alpha b l, \\ &l(l-\alpha)q_{01} + \beta l p_{01} + \alpha q_{00} = -\beta b l^2, \\ &p_{01} = \beta a - 2\alpha b. \end{aligned} \qquad (6.12)$$

Из первых трех уравнений (6.12) находим $q_{01} = -2b\beta/3$, $p_{01} = -\alpha b$, $q_{00} = \alpha b\beta/3$. Отсюда и трех последних равенств (6.12) следует, что

$$\begin{aligned} &p_{00} = \alpha^2 b/3, \; p_{10} = a(\alpha - 3l)/3, \\ &a\beta = \alpha b, \; \beta b(l^2 - \alpha l + \alpha^2) = 0. \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Поскольку система (6.1) допускает частные интегралы $y = k_5 x + l$, $y = k_6 x + l$, *где* $lq_{10} + q_{00} = 0$, $l \neq 0$, $l \neq \alpha$, $k_5 k_6 \neq 0$, $k_5 \neq k_6$, то k_5 и k_6 удовлетворяют первым двум уравнениям (6.8). Поэтому

$$\begin{aligned} &-\frac{p_{10} + a(\alpha - l)}{b\beta + q_{01}} = \\ &= \frac{al(l-\alpha)}{2\beta bl + \beta p_{01} + q_{01}(2l - \alpha)}. \end{aligned} \qquad (6.14)$$

Заменяя в (6.14) p_{10}, q_{01} и p_{01} найденными выше значениями, находим

$$9l^2 - 11\alpha l + 4\alpha^2 = 0, \qquad (6.15)$$

т.к. $|a| + |b| > 0$, $\alpha\beta \neq 0$. Из (6.15) и последнего равенства (6.13) вытекает, что $\alpha = l = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 6.1. *Система* (*6.1*) *при* $\alpha\beta \neq 0$ *может иметь не более 9 различных линейных частных интегралов*.

Доказательство. Класс систем (6.1) такой, что всякий частный линейный интеграл, отличный от $x = 0$, $x = \beta$, $y = 0$, $y = \alpha$, имеет вид $y = kx + l$, где $k \neq 0$, $k \neq \infty$. По лемме 6.2 $l \in \{0, \alpha, -q_{00}/q_{01}\}$. В силу лемм 6.4, 6.6, 6.8, 6.10, инвариантных множеств $y = kx + l$ для $k \neq 0$ не более 5. Теорема доказана.

Работа поддержана грантом НК-13П-13.

Список литературы

1. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. I // Вестник ННГУ. 2010. № 6. С. 131–136.

ON LINEAR PARTICULAR INTEGRALS OF POLYNOMIAL VECTOR FIELDS OF FOURTH DEGREE WITH DEGENERATE INFINITY. II

M.V. Dolov, S.A. Chistyakova

A polynomial vector field of fourth degree with degenerate infinity is proved to have no more than nine linear particular integrals including those with complex coefficients.

Keywords: polynomial vector fields, algebraic differential equations, particular integrals, invariant sets, degenerate infinity.