

© 2011 г. А. Д. Миронов^{*†}, А. Ю. Морозов[†], С. М. Натанзон^{‡§}

ПОЛНЫЙ НАБОР ОПЕРАТОРОВ РАЗРЕЗАНИЯ И СКЛЕЙКИ В ТЕОРИИ ГУРВИЦА–КОНЦЕВИЧА

Определены операторы разрезания и склейки (РС-операторы) при слиянии двух точек ветвления произвольного типа в теории Гурвица. Эти операторы имеют два альтернативных описания: 1) характеры группы GL являются их собственными функциями, а характеры симметрических групп – собственными значениями; 2) их можно реализовать дифференциальными операторами W -типа (в частности, действующими на временные переменные τ -функции Гурвица–Концевича). Операторы имеют простейшую форму при выражении их в терминах переменных Мивы. Они образуют важную коммутативную ассоциативную алгебру, универсальную алгебру Гурвица, обобщающую все центры групповых алгебр конкретных симметрических групп, которые используются при описании универсальных чисел Гурвица конкретных порядков. Эта алгебра выражает произвольные числа Гурвица как значения выделенной линейной формы на линейном пространстве диаграмм Юнга, вычисленной на произведении всех диаграмм, характеризующих конкретные точки ветвления разветвленного накрытия.

Ключевые слова: матричные модели, числа Гурвица, характеры симметрических групп.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Числа Гурвица и характеры. Числа Гурвица $\text{Cov}_q(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m)$ считают определенным образом взвешенное число разветвленных q -листных накрытий римановой сферы с фиксированным положением m точек ветвления заданного типа $\Delta_1, \dots, \Delta_m$. Типы отмечаются упорядоченными целыми разбиениями числа q , т.е. диаграммами Юнга Δ с числом клеток $|\Delta| = q$. Эта кажущаяся формальной проблема оказывается связанной с многочисленными направлениями исследований

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: mironov@lpi.ru

†Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова, Москва, Россия. E-mail: mironov@itep.ru, morozov@itep.ru

‡Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва, Россия

§Институт физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. E-mail: natanzons@mail.ru

в физике и математике и привлекает растущее внимание в литературе (см. [1]–[24] и приведенную там литературу). После аккуратного определения (см. п. 2.1 ниже) проблема становится задачей теории представлений симметрических групп и сводится к знаменитой формуле [3]

$$\text{Cov}_q(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m) = \sum_{|R|=q} d_R^2 \varphi_R(\Delta_1) \varphi_R(\Delta_2) \dots \varphi_R(\Delta_m) \quad (1)$$

(наша нормировка $\varphi_R(\Delta)$ отличается от использованной в учебниках множителем). Правая часть является суммой по всем представлениям (диаграммам Юнга) R с $|R| = q$, $\varphi_R(\Delta)$ – коэффициенты разложения (в действительности они пропорциональны характерам симметрических групп [25]) характеров группы GL (функций Шура) $\chi_R(t)$ [25] по временным переменным $p_k = kt_k$:

$$\chi_R(t) = \sum_{|\Delta|=|R|} d_R \varphi_R(\Delta) p(\Delta) = \sum_{\Delta} d_R \varphi_R(\Delta) p(\Delta) \delta_{|\Delta|, |R|}. \quad (2)$$

Для целых разбиений $\Delta = [\mu_1, \dots]: \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq 0$ с $\sum_j \mu_j = |\Delta|$ моном $p(\Delta) \equiv \prod_i p_{\mu_i} = \prod_j p_j^{m_j}$. Далее мы также используем моном, нормированный иным образом: если $p(\Delta) = \prod_k p_k^{m_k}$, то

$$\widetilde{p}(\Delta) \equiv \prod_k \frac{1}{m_k!} \binom{p_k}{k}^{m_k} = \left(\prod_k m_k! k^{m_k} \right)^{-1} p(\Delta).$$

В дальнейшем мы пользуемся тем же определением $\widetilde{Y}(\Delta)$, чтобы определить мономы для произвольной цепочки переменных $\{y_k\}$. Определения $\chi_R(t)$ и $d_R = \chi_R(t_k = \delta_{k,1})$ являются стандартными (см. п. 2.6 ниже).

Можно расширить определение $\varphi_R(\Delta)$ на большие диаграммы R с $|R| > |\Delta|$ следующим образом:

$$\varphi_R([\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_k]) \equiv \begin{cases} 0, & |\Delta| + k > |R|, \\ \varphi_R([\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_{|R|-|\Delta|}]) C_{|R|-|\Delta|}^k, & |\Delta| + k \leq |R|. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $C_b^a = b!/(a!(b-a)!)$ – биномиальные коэффициенты, Δ – диаграмма Юнга, которая не содержит единиц, $1 \notin \Delta$. При таком расширении определения можно снять ограничение, что все $|\Delta_\alpha| = q$ в (1).

1.2. Статсуммы Гурвица. Имеется два разных способа определять производящие функции чисел Гурвица (см. также в [26] другие производящие функции, связанные с разбиениями). Во-первых, $\varphi_R(\Delta)$ в (1) можно свернуть с $p(\Delta)$ и конвертировать в $\chi_R(t)$ при помощи (2). Во-вторых, $\varphi_R(\Delta)$ может быть экспоненцирована. Это подразумевает следующее определение статсуммы Гурвица [23]:

$$\mathcal{Z}(t, t', t'', \dots | \beta) \equiv \sum_R d_R^2 \frac{\chi_R(t)}{d_R} \frac{\chi_R(t')}{d_R} \frac{\chi_R(t'')}{d_R} \dots \exp\left(\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \varphi_R(\Delta)\right), \quad (4)$$

где сумма теперь берется по всем представлениям (диаграммам Юнга) R произвольного размера $|R|$, β – набор констант, зависящих от диаграмм Юнга. Если только переменная $\beta_{[2]}$, соответствующая диаграмме $\Delta = [2]$, не равна нулю, это выражение сводится к производящей функции \mathcal{N} -чисел Гурвица. В частности [8], [9],

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = 1: \quad Z(t|\beta) &= \sum_R d_R \chi_R(t) e^{\beta_2 \varphi_R([2])} \quad \longrightarrow \quad Z(t|0) = \sum_R d_R \chi_R(t) = e^{t^1}, \\ \mathcal{N} = 2: \quad Z(t, \bar{t}|\beta) &= \sum_R \chi_R(t) \chi_R(\bar{t}) e^{\beta_2 \varphi_R([2])} \quad \longrightarrow \\ &\longrightarrow \quad Z(t, \bar{t}|0) = \sum_R \chi_R(t) \chi_R(\bar{t}) = \exp\left(\sum_k k t_k \bar{t}_k\right) \end{aligned} \quad (5)$$

являются соответственно τ -функциями Кадомцева–Петвиашвили (КП) и Тоды по временам t и \bar{t} [27], [9], [19], [22], однако интегрируемость разрушается для $\mathcal{N} \geq 3$ [23]. Она также разрушается включением старших β_Δ с $|\Delta| \geq 3$ [16], [20], [23]: чтобы сохранить интегрируемость, нужно экспоненцировать казимировские собственные значения $C_R(|\Delta|)$ [27] вместо $\varphi_R(\Delta) \neq C_R(|\Delta|)$. Замена φ_R посредством C_R в определении статсумм была названа в работах [16], [20] переходом к пополненным циклам, и статсумма \mathcal{Z} получается из определенной таким образом τ -функции [27] действием весьма замысловатых операторов $\widehat{\mathcal{B}}_\Delta$ (см. [23]).

Действительно, τ -функция КП $Z(t|\beta)$ связывается [10], [19], [22] при помощи техники эквивалентных иерархий [28] с τ -функцией Концевича [29], и, следуя [22], мы называем ее и ее дальнейшие обобщения (4) статсуммой Гурвица–Концевича. Это замечательное соответствие позволяет применить хорошо развитую технику матричных моделей [29]–[35] к изучению чисел Гурвица. Настоящая статья развивает частный пример [24] такого применения.

1.3. Общие операторы разрезания и склейки. Альтернативным образом можно ввести β -деформации в статсумму с помощью операторов разрезания и склейки (РС-операторы) $\widehat{\mathcal{W}}$, которые являются дифференциальными операторами, действующими на временные переменные $\{t_k\}$ (или, альтернативно, на $\{t'_k\}$ или $\{t''_k\}$), причем характеры $\chi_R(t)$ являются их собственными значениями, а $\varphi_R(\Delta)$ – соответствующими собственными функциями:

$$\widehat{\mathcal{W}}(\Delta) \chi_R(t) = \varphi_R(\Delta) \chi_R(t). \quad (6)$$

Тогда, как прямое следствие (6) и (4), имеем

$$\mathcal{Z}(t, t', \dots |\beta) = \exp\left(\sum_\Delta \beta_\Delta \widehat{\mathcal{W}}(\Delta)\right) \mathcal{Z}(t, t', \dots |0). \quad (7)$$

В простейшем случае $\Delta = [2]$ мы получаем стандартный РС-оператор [8]

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{W}}([2]) &= \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{\infty} \left((a+b) p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + a b p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{\infty} \left(a b t_a t_b \frac{\partial}{\partial t_{a+b}} + (a+b) t_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

который является генератором алгебры W_3 , отвечающим нулевой моде [36]: $\widehat{\mathcal{W}}([2]) = \widehat{W}_0^{(3)}$. Алгебра W_3 представляет собой часть универсальной обертывающей алгебры $GL(\infty)$ и является симметрией универсального грассманиана [37], [38]. Следовательно, действие этого оператора сохраняет интегрируемость КП [37], [39], [28] и деформирует интегрируемость Тоды [40] простым образом [27], [9].

Оператор (8) удобно переписывается [24] в терминах матричных переменных Мивы X (в работе [24] матричные переменные обозначались через ψ),

$$p_k = kt_k = \text{tr} X^k, \quad (9)$$

где X – $(N \times N)$ -матрица,

$$\widehat{\mathcal{W}}([2]) = \frac{1}{2}(\text{tr} \widehat{D}^2 - N \text{tr} \widehat{D}) = \frac{1}{2}:\text{tr} \widehat{D}^2:. \quad (10)$$

Здесь мы использовали матричный оператор $\widehat{D} = X(\partial/\partial \widetilde{X})$ (включающий транспонированную матрицу \widetilde{X} , что является стандартным в теории матричных моделей [29]–[35]):

$$\widehat{D}_{ab} \equiv X_{ac} \frac{\partial}{\partial X_{bc}} \quad (11)$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), т.е. семейство операторов $[\widehat{D}_{ab}, \widehat{D}_{cd}] = \widehat{D}_{ad}\delta_{bc} - \widehat{D}_{bc}\delta_{ad}$, действующих на алгебру функций, генерированных X_{ab} : $\widehat{D}_{ab}X_{cd} \equiv X_{ad}\delta_{bc}$. Производные под знаком нормального упорядочивания не действуют на X , даже стоящие справа от них, если они находятся внутри того же знака нормального упорядочивания, что и производная. Иными словами, все производные по X внутри знаков нормального упорядочивания могут быть перенесены направо. Это эквивалентно взятию символа оператора.

Основная цель настоящей статьи – объяснить, что существует прямое обобщение формулы (10) на все остальные операторы $\widehat{\mathcal{W}}(\Delta)$:

$$\widehat{\mathcal{W}}(\Delta) = :\widetilde{D}(\Delta):, \quad (12)$$

где $\widetilde{D}(\Delta)$ составлен из операторов $\widehat{D}_k \equiv \text{tr} \widehat{D}^k$ в точности так же, как $p(\Delta)$ составлен из временных переменных $p_k = kt_k$: $\widetilde{D}(\Delta) \equiv (\prod_k m_k! k^{m_k})^{-1} \widehat{D}_k^{m_k}$. Заметим, что операторы \widehat{D}_{ab} (11) реализуют регулярное представление алгебры gl . Коммутирующие операторы Казимира, которые лежат в универсальной обертывающей алгебре gl , могут быть реализованы как \widehat{D}_k , причем характеры $\chi_R(t)$ группы GL являются их собственными функциями [41], [42]. Поскольку все \widehat{D}_k коммутируют друг с другом, также коммутируют и все $\widehat{D}(\Delta)$ и $\widehat{\mathcal{W}}(\Delta)$ (и их общая система собственных функций по-прежнему задается характерами). Это позволяет выразить $\mathcal{Z}(t|\beta)$ через тривиальную τ -функцию $Z(t|0) = e^{t_1}$:

$$\mathcal{Z}(t|\beta) = \exp\left(\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} :\widetilde{D}(\Delta):\right) Z(t|0). \quad (13)$$

Более того, с помощью тех же операторов могут быть введены дополнительные наборы временных переменных, например¹⁾

$$\mathcal{Z}(t, \bar{t}|\beta) \approx : \exp \left(\sum_k \bar{t}_k \text{tr} \widehat{D}^k \right) : \mathcal{Z}(t|\beta). \quad (14)$$

Это открывает возможность естественно включить статесумы Гурвица в М-теорию матричных моделей [35].

Кроме случая диаграммы $\Delta = [2]$, нормальное упорядочивание делает четные операторы $\widehat{\mathcal{W}}([k])$ с однострочечной диаграммой Юнга $\Delta = [k]$ нелинейной комбинацией операторов Казимира, что выводит $\widehat{\mathcal{W}}(\Delta)$ из универсального грассманиана [37], [38] и ведет к нарушению интегрируемости, обнаруженному в работах [16], [20], [23].

Ограничивая набор $\{\beta_\Delta\}$ β -переменных в (13) до единственной переменной $\beta_{[2]} = \beta$, мы получаем представление для τ -функции Гурвица–Концевича $Z(t|\beta)$, которое являлось исходной точкой в работе [24] для вывода многообещающего матрично-модельного представления для этой функции. Она в действительности выражается (все еще плохо понятым, но хорошо обоснованным способом [10], [19], [22]) через стандартную τ -функцию кубической модели Концевича [29], [34].

РС-операторы $\widehat{\mathcal{W}}$ образуют коммутативную ассоциативную алгебру (см. п. 2.4.3):

$$\widehat{\mathcal{W}}(\Delta_1)\widehat{\mathcal{W}}(\Delta_2) = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta} \widehat{\mathcal{W}}(\Delta), \quad (15)$$

со структурными константами, которые связаны с тройными числами Гурвица $\text{Cov}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ (см. п. 1.4). Следовательно, эти числа $\text{Cov}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ могут альтернативно изучаться в теории *детских рисунков* и функций Белого [43]. При $|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta|$ эти числа являются структурными константами $C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta}$ центра групповой алгебры симметрической группы $S_{|\Delta|}$.

Уравнения (13) и (15) должны иметь интересное неабелево обобщение на случай открытых чисел Гурвица [13], [14], [44], считающих накрытия римановых поверхностей с границами, которые должны быть открытым струнным аналогом формулы (13) из теории замкнутых струн.

1.4. Универсальные числа Гурвица и универсальная алгебра Гурвица.

Структурные константы $C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta}$ позволяют ввести универсальные числа Гурвица, определенные для произвольных наборов диаграмм Юнга, не ограниченных условием $|\Delta_1| = \dots = |\Delta_m|$.

Рассмотрим векторное пространство Y , генерированное всеми диаграммами Юнга. Соответствие $\Delta \mapsto \widehat{\mathcal{W}}(\Delta)$ задает структуру коммутативной ассоциативной алгебры на Y , соответствующее умножение диаграмм Юнга мы обозначаем $*$. Рассмотрим линейную форму $l: Y \rightarrow \mathbb{R}$, где $l(\Delta) = 1/|\Delta|!$ для $\Delta = [1, 1, \dots, 1]$ и $l(\Delta) = 0$ для любых других диаграмм Юнга. Это определение мотивировано уравнением (72) из теории характеров (см. п. 2.7 ниже). Мы называем *числом Гурвица* $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ число

$$\text{Cov}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m) = l(\Delta_1 * \Delta_2 * \dots * \Delta_m). \quad (16)$$

¹⁾Более аккуратное определение того, что обозначает \approx в этом уравнении, см. в п. 2.8 ниже.

Такие обобщенные числа Гурвица совпадают с классическими для $|\Delta_1| = |\Delta_2| = \dots = |\Delta_m|$, когда ограничение $*$ -операции воспроизводит композицию \circ сопряженных классов перестановок, рассмотренную в п. 2.2.

Симметрическая билинейная форма $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle = l(\Delta_1 * \Delta_2)$ невырождена и инвариантна,

$$\langle \Delta_1 * \Delta, \Delta_2 \rangle = \langle \Delta_1, \Delta_2 * \Delta \rangle \quad \forall \Delta \quad (17)$$

как следствие коммутативности и ассоциативности. Более того,

$$\sum_{\Delta} C_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} \langle \Delta, \Delta_3 \rangle = l(\Delta_1 * \Delta_2 * \Delta_3), \quad (18)$$

т.е.

$$C_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} = \sum_{\Delta_3} G^{\Delta \Delta_3} l(\Delta_1 * \Delta_2 * \Delta_3), \quad (19)$$

где $G^{\Delta_2 \Delta_3}$ – матрица, обратная к $G_{\Delta_1 \Delta_2} = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$.

Наконец, наша универсальная алгебра Гурвица РС-операторов свободно порождается набором операторов Казимира и совпадает как векторное пространство с центром универсальной обертывающей алгебры $gl(\infty)$ (подробности см. в п. 2.5 ниже и в работах [23], [42]).

2. КОММЕНТАРИИ

2.1. Числа Гурвица и счет накрытий. q -Листное накрытие Σ римановой поверхности Σ_0 является проекцией $\pi: \Sigma \rightarrow \Sigma_0$, где почти все точки Σ_0 имеют в точности q прообразов. Число прообразов уменьшается в конечном числе сингулярных точек (ветвления) $x_1, \dots, x_m \in \Sigma_0$. В действительности $\pi^{-1}(x_\alpha)$ является набором точек $y_i^{(\alpha)} \in \Sigma$ таких, что в окрестности каждой $y_i^{(\alpha)}$ проекция π имеет вид

$$\pi: (x - x_\alpha) = (y - y_i^{(\alpha)})^{\mu_i^{(\alpha)}}. \quad (20)$$

Тогда с каждой сингулярной точкой ассоциируется целое разбиение q , которое может быть упорядочено: $\Delta_\alpha: \mu_1^{(\alpha)} \geq \mu_2^{(\alpha)} \geq \dots \geq 0$, т.е. действительно является диаграммой Юнга. Эта диаграмма Δ_α называется *типом* точки ветвления x_α .

Если взять несингулярную точку $x_* \in \Sigma_0$ и рассмотреть замкнутый путь C_* в Σ_0 , который начинается и кончается в x_* , тогда q прообразов x_* в Σ переставляются некоторым образом при движении вдоль C_* . Таким образом, с путем C_* ассоциируется перестановка q переменных, т.е. накрытие определяет отображение из фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma_0, x_*)$ в симметрическую группу (перестановок) S_q . Изменение x_* приводит к общему сопряжению всех перестановок, ассоциированных с различными контурами, и само накрытие ассоциируется с сопряженными классами отображений $\pi_1(\Sigma_0, x_*)$ в S_q . В действительности обратное также почти верно: если задано такое отображение, можно восстановить накрытие. Таким образом, перечисление разветвленных накрытий становится чистой теоретико-групповой проблемой и дает определение чисел Гурвица для римановой поверхности произвольного рода g :

$$\text{Cov}_q^g(\Delta_1, \dots, \Delta_m) = \sum \frac{1}{|\text{Aut}(\pi)|} \quad (21)$$

– это число накрытий π с фиксированным набором сингулярных точек x_1, \dots, x_m типов $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, деленное на порядок группы автоморфизмов. Для краткости мы полагаем $\text{Cov}_q^0 = \text{Cov}_q$. Сумма в (21) идет по всем возможным классам эквивалентности накрытий, и эквивалентность устанавливается наличием биголоморфного отображения $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ такого, что $\pi' = f \circ \pi$.

Поскольку $\text{Cov}_q(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ является одновременно теоретико-групповым объектом, оно может быть также выражено в терминах симметрических групп, и такой подход приводит к формуле (1). Обобщение на поверхность Σ_0 произвольного рода следует из топологической теории поля [45], [46] [3], [13]. Некоторое нетривиальное обобщение на Σ_0 с границами может быть найдено в работах [13], [14].

2.2. Перестановки, циклы и их композиции. РС-операторы выходят на сцену, когда изучается слияние двух точек ветвления x_α и x_β типов Δ_α и Δ_β . В результате такого слияния возникает единственная сингулярная точка вместо двух, но ее тип Δ не определен однозначно типами Δ_α и Δ_β . Он зависит от действительного распределения прообразов $y_i^{(\alpha)}$ и $y_j^{(\beta)}$ между листами накрытия, и по этому распределению в определении чисел Гурвица идет суммирование.

Диаграмма Юнга Δ отмечает элемент монодромии критического значения и сопряженный класс симметрической группы S_q . Когда две критические точки сливаются, результирующая монодромия является произведением двух первоначальных монодромий.

Прежде чем исследовать умножение классов, рассмотрим умножение перестановок. Любая перестановка может быть представлена как произведение циклов. К примеру, S_3 состоит из шести элементов:

$$\{123\} \longrightarrow \{123\}, \{132\}, \{213\}, \{321\}, \{231\}, \{312\},$$

которые могут быть выражены через циклы как

$$123, 1(23), (12)3, (13)2, (132), (123)$$

соответственно. Обозначение (132) для цикла означает, что $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Для краткости мы пишем 123 вместо (1)(2)(3).

Диаграмма Юнга Δ описывает класс сопряжения элементов группы. Мы обозначаем тем же символом Δ элемент групповой алгебры, равный сумме всех элементов класса сопряжения (с единичными коэффициентами).

К примеру, диаграммы Юнга с тремя клетками отвечают трем классам сопряжения этих перестановок следующим образом:

$$\Delta = [1, 1, 1] = 123; \quad \Delta = [2, 1] = 1(23), (12)3, (13)2; \quad \Delta = [3] = (132), (123).$$

Соответствующие элементы групповой алгебры имеют вид

$$\Delta = [1, 1, 1] = 123; \quad \Delta = [2, 1] = 1(23) \oplus (12)3 \oplus (13)2; \quad \Delta = [3] = (132) \oplus (123).$$

Удобно определить $\|\Delta\|$ как число различных перестановок в классе сопряжения Δ , т.е. $\|3\| = 2$, $\|2, 1\| = 3$, $\|1, 1, 1\| = 1$.

Подобным образом для S_4 будет пять классов сопряжения, и соответствующие элементы групповой алгебры суть

$$\begin{aligned}\Delta = [4] &= (1234) \oplus (1243) \oplus (1324) \oplus (1342) \oplus (1423) \oplus (1432), & \|4\| &= 3! = 6; \\ \Delta = [3, 1] &= (123)4 \oplus (124)3 \oplus (132)4 \oplus (134)2 \oplus (142)3 \oplus (143)2 \oplus 1(234) \oplus 1(243), \\ &\|3, 1\| = 8; \\ \Delta = [2, 2] &= (12)(34) \oplus (13)(24) \oplus (14)(23), & \|2, 2\| &= 3; \\ \Delta = [2, 1, 1] &= (12)34 \oplus (13)24 \oplus (14)23 \oplus 1(23)4 \oplus 1(24)3 \oplus 12(34), & \|2, 1, 1\| &= 6; \\ \Delta = [1, 1, 1, 1] &= 1234, & \|1, 1, 1, 1\| &= 1.\end{aligned}$$

Если мы теперь рассмотрим слияние двух точек ветвления, скажем с $\Delta = [2, 1]$ и $\Delta' = [3]$, мы должны будем увидеть, что получается, когда любая их трех перестановок из класса сопряжения $\Delta = [2, 1]$ умножается на любую из двух перестановок из $\Delta' = [3]$. Это описывается таблицей размера 3×2 :

$$[2, 1] \circ [3] = \begin{array}{|c|c|} \hline 1(23) \circ (132) & 1(23) \circ (123) \\ \hline (12)3 \circ (132) & (12)3 \circ (123) \\ \hline (13)2 \circ (132) & (13)2 \circ (123) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline (13)2 & (12)3 \\ \hline 1(23) & (13)2 \\ \hline (12)3 & 1(23) \\ \hline \end{array} = 2 \cdot [2, 1], \quad (22)$$

или просто

$$\begin{aligned}[2, 1] \circ [3] &= (1(23) \oplus (12)3 \oplus (13)2) \circ ((132) \oplus (123)) = \\ &= 2 \cdot (1(23) \oplus (12)3 \oplus (13)2) = 2 \cdot [2, 1],\end{aligned} \quad (23)$$

где через “ \circ ” мы обозначаем композицию перестановок. Как обычно, вторая перестановка действует первой, например $\{123\} \xrightarrow{(132)} \{132\} \xrightarrow{1(23)} \{321\}$ и результат такой же, как $\{123\} \xrightarrow{(13)^2} \{321\}$. Числа в обозначении перестановки отсылают к *позициям*, а не к *элементам*: соотношение (12) переставляет объекты, стоящие на первой и второй позициях, а не элементы 1 и 2.

Имея композицию перестановок, можно использовать соответствующие структурные константы $c_{\Delta\Delta'}^{\Delta''}$,

$$\Delta \circ \Delta' = \sum_{\Delta''} c_{\Delta\Delta'}^{\Delta''} \Delta'', \quad (24)$$

чтобы определить РС-операторы по следующему правилу:

$$\widehat{\mathcal{W}}(\Delta) \widetilde{p}(\Delta') = \sum_{\Delta''} c_{\Delta\Delta'}^{\Delta''} \widetilde{p}(\Delta''). \quad (25)$$

Соотношение (22) подразумевает, что определенный таким образом оператор $\widehat{\mathcal{W}}([2, 1])$ содержит член вида

$$\widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) = 2 \cdot \widetilde{p}([2, 1]) \frac{\partial}{\partial p([3])} + \dots = 3p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} + \dots, \quad (26)$$

где многоточие отвечает членам, обращающим в нуль p_3 .

Подобным образом таблица умножения

$$\begin{aligned}
 [3] \circ [2, 1] &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline (132) \circ 1(23) & (132) \circ (12)3 & (123) \circ (13)2 \\ \hline (123) \circ 1(23) & (123) \circ (12)3 & (123) \circ (13)2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (12)3 & (13)2 & 1(23) \\ \hline (13)2 & 1(23) & (12)3 \\ \hline \end{array} = \\
 &= 2 \cdot [2, 1] \tag{27}
 \end{aligned}$$

подразумевает, что

$$\widehat{\mathcal{W}}([3]) = 2p_1p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2} + \dots, \tag{28}$$

где на этот раз многочлен обозначает некоторые члены из аннигилятора p_1p_2 ²⁾.

Элементы групповой алгебры, которые соответствуют диаграммам Юнга, генерируют центр групповой алгебры. В нашем примере можно видеть, что правые стороны (27) и (22) одинаковы, как подразумевается коммутативностью центра.

Таким же образом можно проанализировать композицию любой другой пары классов сопряжений и восстановить все члены в операторах $\widehat{\mathcal{W}}(\Delta)$. Можно проверить, что любое продолжение первого столбца в диаграмме Юнга не влияет на РС-оператор:

$$\widehat{\mathcal{W}}([\Delta, 1, 1, \dots, 1]) \cong \widehat{\mathcal{W}}(\Delta), \tag{29}$$

если действует на подходящую величину в соответствии с (3) (подробнее см. п. 2.4.2). Мы вкратце рассмотрим только еще один пример:

$$\begin{aligned}
 [2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-2}] \circ [3, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-3}] &= \begin{array}{|c|c|} \hline (12)3456 \dots q \circ (123)456 \dots q & \dots \\ \hline (13)2456 \dots q \circ (123)456 \dots q & \\ \hline 1(23)456 \dots q \circ (123)456 \dots q & \\ \hline (14)2356 \dots q \circ (123)456 \dots q & \\ \hline \dots & \\ \hline 123(45)6 \dots q \circ (123)456 \dots q & \\ \hline \dots & \\ \hline \end{array} = \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline (13)2456 \dots q & \dots \\ \hline 1(23)456 \dots q & \\ \hline (12)3456 \dots q & \\ \hline (1423)56 \dots q & \\ \hline \dots & \\ \hline (123)(45)6 \dots q & \\ \hline \dots & \\ \hline \end{array}. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Имеются $\|3, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-3}\| = 2C_q^3 = q(q-1)(q-2)/3$ столбцов и $\|2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-2}\| = C_q^2 = q(q-1)/2$ строк в таблицах. Очевидно, каждый столбец второй, результирующей таблицы содержит три элемента из класса $[2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-2}]$, $3(q-3)$ элементов из класса

²⁾Можно сравнить эту формулу с полным выражением (53). Коэффициент 2 в (28) возникает из второго члена в (53) с $abcd = 1212, 1221, 2112, 2121$, и только два из этих четырех членов дают вклад из-за фактора $(1 - \delta_{ac}\delta_{bd})$.

$[4, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-4}]$ и $(q-3)(q-4)/2$ элементов из класса $[3, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-5}]$. Таким образом,

$$[2, 1, \dots, 1] \circ \frac{[3, 1, \dots, 1]}{\|3, 1, \dots, 1\|} = 3 \cdot \frac{[2, 1, \dots, 1]}{\|2, 1, \dots, 1\|} + 3(q-3) \cdot \frac{[4, 1, \dots, 1]}{\|4, 1, \dots, 1\|} + \\ + \frac{(q-3)(q-4)}{2} \cdot \frac{[3, 2, 1, \dots, 1]}{\|3, 2, 1, \dots, 1\|},$$

или

$$[2, 1, \dots, 1] \circ [3, 1, \dots, 1] = 2(q-2) \cdot [2, 1, \dots, 1] + 4 \cdot [4, 1, \dots, 1] + [3, 2, 1, \dots, 1]. \quad (31)$$

Так как в этом примере оператор $\widehat{\mathcal{W}}([2, 1, \dots, 1])$ действует на $p_3 p_1^{q-3}$, мы имеем

$$\widehat{\mathcal{W}}([2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-2}]) p_3 p_1^{q-3} = \frac{1}{2} \left(6p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} + 6p_4 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_3} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \dots \right) p_3 p_1^{q-3}. \quad (32)$$

Мы видим, что коэффициент перед членом $p_1 p_2 (\partial/\partial p_3)$ такой же, как в (26), в полном согласии с (29). Оба представления в (31) подразумевают тот же результат для $\widehat{\mathcal{W}}([2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-2}])$, поскольку

$$\widetilde{p}(\Delta) = \frac{\|\Delta\|}{|\Delta|!} p(\Delta) = \frac{p(\Delta)}{\text{Aut}(\Delta)},$$

и обе формулы умножения могут быть использованы, чтобы выделить РС-оператор из (25).

Таким образом, для композиции классов сопряжения получается

$$\Delta_1 \circ \Delta_2 = \sum_{|\Delta| = |\Delta_1| = |\Delta_2|} c_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} \cdot \Delta, \quad (33)$$

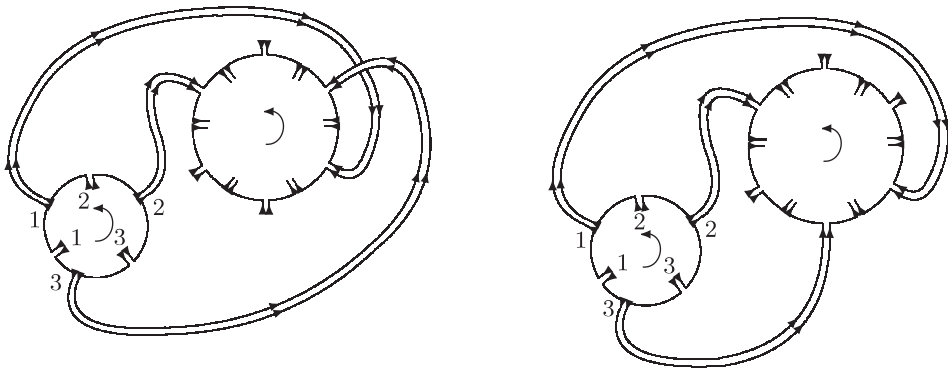
где используется обозначение строчной буквой c , чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с композицией перестановок в группе $S_{|\Delta|}$, т.е. $|\Delta| = |\Delta_1| = |\Delta_2|$. Вышеприведенные примеры демонстрируют, что даже в этом случае РС-оператор – это *не в точности* $\sum_{|\Delta_1| = |\Delta_2|} c_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} p(\Delta_1) \partial/\partial p(\Delta_2)$, настоящая степень дифференциального оператора, который удовлетворяет (25), может быть много меньше, чем та, которая подразумевается этой формулой.

В действительности ограничение $|\Delta'| = |\Delta|$ в (25) может быть легко преодолено: можно расширить Δ до диаграммы $[\Delta, 1^{|\Delta'| - |\Delta|}]$, удлинняя первый столбец до подходящей длины и определяя

$$\widehat{\mathcal{W}}(\Delta) \widetilde{p}(\Delta') = \widetilde{p}([\Delta, 1^{|\Delta'| - |\Delta|}] \circ \Delta') = \sum_{|\Delta''| = |\Delta'|} c_{[\Delta, 1^{|\Delta'| - |\Delta|}] \Delta'}^{\Delta''} \widetilde{p}(\Delta'') \quad \text{при } 1 \notin \Delta \quad (34)$$

и

$$\widehat{\mathcal{W}}([\Delta, 1^s]) \widetilde{p}(\Delta') = \sum_{|\Delta''| = |\Delta'|} \frac{(|\Delta'| - |\Delta|)!}{s!(|\Delta'| - |\Delta| - s)!} c_{[\Delta, 1^{|\Delta'| - |\Delta|}] \Delta'}^{\Delta''} \widetilde{p}(\Delta'') \quad \text{при } 1 \notin \Delta. \quad (35)$$



Композиция двух перестановок – цикла (123) с циклом шестого порядка. В то же время эти диаграммы Фейнмана дают вклад в умножение нормально упорядоченных матричных дифференциальных операторов $\widehat{\mathcal{W}}([3])$ и $\widehat{\mathcal{W}}([6])$.

Таким образом, РС-операторы могут быть определены как действующие на временные переменные произвольного уровня полностью в терминах структурных констант универсальной симметрической группы $S(\infty)$. Выражение (12), однако, обеспечивает гораздо более явное и прозрачное альтернативное представление этих операторов, которое позволяет также расширить набор структурных констант $S(\infty)$, снимая остающееся ограничение $|\Delta''| = |\Delta'|$, все еще имеющееся в (34) и (35). Расширенные структурные константы $C_{\Delta\Delta'}^{\Delta''}$ описывают умножение универсальных операторов, определенных либо в (35), либо в (12).

2.3. Композиция перестановок и диаграммная техника Фейнмана. Композиция перестановок может вычисляться удобным образом при помощи простой диаграммной техники Фейнмана. Она, с одной стороны, буквально отражает геометрическое определение чисел Гурвица, а с другой стороны, эквивалентна описанию при помощи дифференциальных операторов. Представим цикл (132) длины 3 ориентированным кругом в левой части диаграммы, а цикл длины 6 – другим ориентированным кругом в ее правой части (см. рисунок). Само умножение представляется линиями, связывающими все выходящие линии левого круга с произвольно выбранными тремя входящими линиями правого круга. В результате формируются новые циклы – в точности один длины 6 для связывающих линий, как на левой диаграмме, и три с длинами 1, 2 и 3, если одна из связывающих линий изменена, как на правой диаграмме.

На этом рисунке мы имеем дело с ситуацией типа $(123) \circ (123456)$, когда первый цикл является подмножеством второго. Нужно только помнить, что вместе с (123456) необходимо рассмотреть все $5!$ разных циклов, образованных теми же шестью элементами, – и только две из этих $5!$ возможностей показаны на рисунке. Чтобы получить наши операторы, нужно просуммировать по всем этим возможностям. Нужно также добавить все остальные циклы: каждая диаграмма Юнга Δ является набором нескольких циклов данной длины.

Преимущество такого графического представления состоит в том, что можно дальше представлять такие рисунки – диаграммы Фейнмана – операторами. Это

простейший путь получить соотношение (12), что сразу воспроизводит формулы (26) и (28). Нормальное упорядочивание появляется, поскольку одна связывающая линия не может действовать на другую связывающую линию.

Эта диаграммная техника Фейнмана связывает геометрическую интерпретацию чисел Гурвица, их комбинаторные выражения и нормально упорядоченные дифференциальные матричные операторы.

2.4. Алгебра РС-операторов.

2.4.1. *Примеры нормального упорядочивания.* Начнем с нескольких примеров, иллюстрирующих роль нормального упорядочивания:

$$: \text{tr } \widehat{D}^2 : = \text{tr } \widehat{D}^2 - N \text{tr } \widehat{D} = \text{tr}(\widehat{D} - N)\widehat{D}$$

или

$$\begin{aligned} \text{tr } \widehat{D}^2 &= : \text{tr } \widehat{D}^2 : + N \text{tr } \widehat{D}, \\ \text{tr } \widehat{D}^3 &= : \text{tr } \widehat{D}^3 : + 2N : \text{tr } \widehat{D}^2 : + : (\text{tr } \widehat{D})^2 : + N^2 \text{tr } \widehat{D}, \\ \text{tr } \widehat{D}^4 &= : \text{tr } \widehat{D}^4 : + 3N : \text{tr } \widehat{D}^3 : + 3 : \text{tr } \widehat{D} \text{tr } \widehat{D}^2 : + (3N^2 + 1) : \text{tr } \widehat{D}^2 : + \\ &\quad + 3N : (\text{tr } \widehat{D})^2 : + N^3 : \text{tr } \widehat{D} :, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

Подобным образом

$$(\text{tr } \widehat{D})^2 = : (\text{tr } \widehat{D})^2 : + \text{tr } \widehat{D}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} (\text{tr } \widehat{D}^2)^2 &= : (\text{tr } \widehat{D}^2)^2 : + 2N : \text{tr } \widehat{D} \text{tr } \widehat{D}^2 : + 4 : \text{tr } \widehat{D}^3 : + \\ &\quad + 4N : \text{tr } \widehat{D}^2 : + (N^2 + 2) : (\text{tr } \widehat{D})^2 : + N^2 \text{tr } \widehat{D} \end{aligned} \tag{37}$$

и т.д.

2.4.2. *Комментарий к формуле (29): вставка в РС-оператор дополнительного оператора \widehat{D}_1 .* Дадим полное описание нормального упорядочивания для небольшого, но важного класса операторов, которые содержат степени $\widehat{D}_1 = \text{tr } \widehat{D} = \sum_a a r_a (\partial / \partial r_a)$,

$$\widetilde{\mathcal{W}}([\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_k]) = \frac{1}{k!} : \widetilde{D}(\Delta) \widehat{D}_1^k : \tag{38}$$

(предполагается, что Δ содержит ровно k единиц). Более систематическое описание см. в работе [42].

Следующие соотношения следуют прямо из определения нормального упорядочивания:

$$: \widetilde{D}(\Delta) \widehat{D}_1 : = : \widetilde{D}(\Delta) : \widehat{D}_1 - |\Delta| : \widetilde{D}(\Delta) : = : \widetilde{D}(\Delta) : (\widehat{D}_1 - |\Delta|),$$

Структурные константы в этом соотношении не зависят от R , что не так очевидно, если находить $\varphi_R(\Delta)$ из разложения характеров (2). Это можно явно проверить для первых нескольких $\varphi_R(\Delta)$, используя приведенную здесь таблицу для них ($\varphi_R(\Delta)$ отличается множителем от характера симметрической группы [25]).

$R \backslash \Delta$	1	2	11	3	21	111	4	31	22	211	1111	5	41	32	311	221	2111	11111	
1	1																		
2	2	1	1																
11	2	-1	1																
3	3	3	3	2	3	1													
21	3	0	3	-1	0	1													
111	3	-3	3	2	-3	1													
4	4	6	6	8	12	4	6	8	3	6	1								
31	4	2	6	0	4	4	-2	0	-1	2	1								
22	4	0	6	-4	0	4	0	-4	3	0	1								
211	4	-2	6	0	-4	4	2	0	-1	-2	1								
1111	4	-6	6	8	-12	4	-6	8	3	-6	1								
5	5	10	10	20	30	10	30	40	15	30	5	24	30	20	20	15	10	1	
41	5	5	10	5	15	10	0	10	0	15	5	-6	0	-5	5	0	5	1	
32	5	2	10	-4	6	10	-6	-8	3	6	5	0	-6	4	-4	3	2	1	
311	5	0	10	0	0	10	0	0	-5	0	5	4	0	0	0	-5	0	1	
221	5	-2	10	-4	-6	10	6	-8	3	-6	5	0	6	-4	-4	3	-2	1	
2111	5	-5	10	5	-15	10	0	10	0	-15	5	-6	0	5	5	0	-5	1	
11111	5	-10	10	20	-30	10	-30	40	15	-30	5	24	-30	-20	20	15	-10	1	

2.4.4. *Примеры структурных констант.* Теперь мы дадим несколько явных примеров умножения (42) – таблицу умножения, ограниченную на случай, когда $|\Delta| \leq 4$; многие из них – прямые следствия соотношений из п. 2.4.2. Заметим, что явная зависимость от N , которая появлялась в нормально упорядоченных произведениях в п. 2.4.1, исчезает при рассмотрении произведений нормально упорядоченных операторов $\widehat{\mathcal{W}}$:

$$\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([1]) = \widehat{\mathcal{W}}([1]) + 2\widehat{\mathcal{W}}([1, 1]);$$

$$\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([2]) = 2\widehat{\mathcal{W}}([2]) + \widehat{\mathcal{W}}([2, 1]),$$

$$\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([1, 1]) = 2\widehat{\mathcal{W}}([1, 1]) + 3\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]);$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([3]) &= 3\widehat{\mathcal{W}}([3]) + \widehat{\mathcal{W}}([3, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) &= 3\widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) + 2\widehat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) &= 3\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) + 4\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]); \\
\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([4]) &= 4\widehat{\mathcal{W}}([4]) + \widehat{\mathcal{W}}([4, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([3, 1]) &= 4\widehat{\mathcal{W}}([3, 1]) + 2\widehat{\mathcal{W}}([3, 1, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([2, 2]) &= 4\widehat{\mathcal{W}}([2, 2]) + \widehat{\mathcal{W}}([2, 2, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]) &= 4\widehat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]) + 3\widehat{\mathcal{W}}([2, 1, 1, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([1])\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]) &= 4\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]) + 5\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1, 1]); \\
\widehat{\mathcal{W}}([1, 1])\widehat{\mathcal{W}}([2]) &= \widehat{\mathcal{W}}([2]) + 2\widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) + \widehat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([1, 1])\widehat{\mathcal{W}}([1, 1]) &= \widehat{\mathcal{W}}([1, 1]) + 6\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) + 6\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([2])\widehat{\mathcal{W}}([2]) &= \widehat{\mathcal{W}}([1, 1]) + 3\widehat{\mathcal{W}}([3]) + 2\widehat{\mathcal{W}}([2, 2]); \\
\widehat{\mathcal{W}}([1, 1])\widehat{\mathcal{W}}([3]) &= 3\widehat{\mathcal{W}}([3]) + 3\widehat{\mathcal{W}}([3, 1]) + \widehat{\mathcal{W}}([3, 1, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([1, 1])\widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) &= 3\widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) + 6\widehat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]) + \widehat{\mathcal{W}}([2, 1, 1, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([1, 1])\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) &= 3\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) + 12\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]) + 10\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([2])\widehat{\mathcal{W}}([3]) &= \widehat{\mathcal{W}}([3, 2]) + 4\widehat{\mathcal{W}}([4]) + 2\widehat{\mathcal{W}}([2, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([2])\widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) &= 2\widehat{\mathcal{W}}([2, 2, 1]) + 3\widehat{\mathcal{W}}([3, 1]) + 4\widehat{\mathcal{W}}([2, 2]) + 3\widehat{\mathcal{W}}([3]) + 3\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]), \\
\widehat{\mathcal{W}}([2])\widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) &= \widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) + 2\widehat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]) + \widehat{\mathcal{W}}([2, 1, 1, 1]),
\end{aligned}$$

где подчеркнуты компоненты, удовлетворяющие условиям $|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta|$, которые диктуются композициями перестановок (формула (33)).

2.5. От оператора \widehat{D} к дифференциальным операторам во временных переменных. Один путь выразить операторы $\widehat{\mathcal{W}}$ через временные переменные уже дан в формуле (12). Однако значительно проще выделить такие выражения прямо из соотношения (25), т.е. делая обратное преобразование Мивы от матричной переменной X к временам $p_k = \text{tr } X^k$. Это делается по простому правилу: при действии на функцию временных переменных производные по X дают

$$\widehat{D}_{ab}F(p) = X_{ac} \frac{\partial}{\partial X_{bc}} F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k(X^k)_{ab} \frac{\partial F(p)}{\partial p_k}. \quad (46)$$

Далее операторы \widehat{D} действуют как на переменную X , которая появилась на первом шаге, так и на остающуюся функцию временных переменных:

$$\widehat{D}_{a'b'}\widehat{D}_{ab}F(p) = \sum_{k,l=1}^{\infty} kl(X^l)_{a'b'}(X^k)_{ab} \frac{\partial^2 F(p)}{\partial p_k \partial p_l} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} k(X^j)_{ab'}(X^{k-j})_{a'b} \frac{\partial F(p)}{\partial p_k}, \quad (47)$$

где мы использовали тот факт, что

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{a'b'}(X^k)_{ab} &= X_{a'c'} \frac{\partial}{\partial X_{b'c'}}(X^k)_{ab} = \sum_{j=0}^{k-1} X_{a'c'}(X^j)_{ab'}(X^{k-j-1})_{c'b} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (X^j)_{ab'}(X^{k-j})_{a'b}. \end{aligned} \quad (48)$$

Заметим, что степень X во втором множителе в правой части (48) никогда не равна нулю, в то время как в первом множителе она может обращаться в нуль. Если мы рассмотрим нормально упорядоченное произведение операторов вместо (47), эта степень должна быть ненулевой:

$$\begin{aligned} :\widehat{D}_{a'b'}\widehat{D}_{ab}: F(p) &= \sum_k \left(k \sum_{j=1}^{k-1} (X^j)_{ab'}(X^{k-j})_{a'b} \right) \frac{\partial F(p)}{\partial p_k} + \\ &+ \sum_{k,l} kl(X^k)_{ab}(X^l)_{a'b'} \frac{\partial^2 F(p)}{\partial p_k \partial p_l}. \end{aligned} \quad (49)$$

Это как раз то свойство, которое гарантирует, что возможная зависимость от N исчезает из формул, как это и должно быть для операторов, которые можно выразить в терминах временных переменных и которые тем самым не зависят от деталей преобразования Мивы (для которого N является дополнительным параметром).

Приведем первые несколько примеров РС-операторов в терминах временных переменных:

$$\widehat{W}([1]) = \text{tr } \widehat{D} = \sum_{k=1} k p_k \frac{\partial}{\partial p_k}, \quad (50)$$

$$\widehat{W}([2]) = \frac{1}{2} : \text{tr } \widehat{D}^2 : = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{\infty} \left((a+b)p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + ab p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right), \quad (51)$$

$$\widehat{W}([1, 1]) = \frac{1}{2!} : (\text{tr } \widehat{D})^2 : = \frac{1}{2} \left(\sum_{a=1}^{\infty} a(a-1)p_a \frac{\partial}{\partial p_a} + \sum_{a,b=1}^{\infty} ab p_a p_b \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right), \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \widehat{W}([3]) &= \frac{1}{3} : \text{tr } \widehat{D}^3 : = \frac{1}{3} \sum_{a,b,c \geq 1}^{\infty} abc p_{a+b+c} \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{a+b=c+d} cd(1 - \delta_{ac}\delta_{bd}) p_a p_b \frac{\partial^2}{\partial p_c \partial p_d} + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{a,b,c \geq 1} (a+b+c)(p_a p_b p_c + p_{a+b+c}) \frac{\partial}{\partial p_{a+b+c}}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) &= \frac{1}{2} : \text{tr } \widehat{D}^2 \text{tr } \widehat{D} : = \frac{1}{2} \sum_{a, b \geq 1} (a+b)(a+b-2) p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{a, b \geq 1} ab(a+b-2) p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{a, b, c \geq 1} (a+b) c p_a p_b p_c \frac{\partial^2}{\partial p_{a+b} \partial p_c} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{a, b, c \geq 1} abc p_a p_b p_c \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c}, \tag{54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) &= \frac{1}{3!} : (\text{tr } \widehat{D})^3 : = \frac{1}{6} \sum_{a \geq 1} a(a-1)(a-2) p_a \frac{\partial}{\partial p_a} + \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{a, b} ab(a+b-2) p_a p_b \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \\
 &+ \frac{1}{6} \sum_{a, b, c \geq 1} abc p_a p_b p_c \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c}. \tag{55}
 \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать из (39) и (41), из этих формул вытекает, что

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathcal{W}}([1, 1]) &= \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{W}}([1]) (\widehat{\mathcal{W}}([1]) - 1), \\
 \widehat{\mathcal{W}}([2, 1]) &= \widehat{\mathcal{W}}([2]) (\widehat{\mathcal{W}}([1]) - 2), \\
 \widehat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) &= \frac{1}{6} \widehat{\mathcal{W}}([1]) (\widehat{\mathcal{W}}([1]) - 2) (\widehat{\mathcal{W}}([1]) - 1). \tag{56}
 \end{aligned}$$

Явные выражения для старших операторов быстро становятся гораздо более сложными. Однако имеется более компактное представление для операторов: будучи выраженными через времена, эти операторы в действительности составлены из тока скалярного поля

$$\partial\Phi(z) = \sum_k \left(k t_k z^k + \frac{1}{z^k} \frac{\partial}{\partial t_k} \right) = \sum_k \left(p_k z^k + \frac{k}{z^k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \tag{57}$$

и из дополнительного оператора дилатации

$$\widehat{R} = \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \tag{58}$$

(дальнейшие детали см. в работах [23], [42], здесь мы даем лишь первые несколько примеров).

Нормальное упорядочивание в этих формулах означает, что все множители p стоят слева от $\partial/\partial p$ -факторов, и мы не берем p -производные от p при построении оператора из $\partial\Phi(z)$. Нижний индекс 0 означает, что нужно взять коэффициент перед z^0 в ряде по z . Поскольку добавление единицы к диаграмме Юнга является тривиальной процедурой, как мы только что видели, мы приводим здесь только

операторы, отвечающие диаграммам Юнга без единиц [42]:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{W}}([1]) &= \widehat{C}_1, \\
\widehat{\mathcal{W}}([2]) &= \frac{1}{2} \widehat{C}_2, \\
\widehat{\mathcal{W}}([3]) &= \frac{1}{3} \widehat{C}_3 - \frac{1}{2} \widehat{C}_1^2 + \frac{1}{3} \widehat{C}_1, \\
\widehat{\mathcal{W}}([2, 2]) &= \frac{1}{8} \widehat{C}_2^2 - \frac{1}{2} \widehat{C}_3 + \frac{1}{2} \widehat{C}_1^2 - \frac{1}{4} \widehat{C}_1, \\
\widehat{\mathcal{W}}([4]) &= \frac{1}{4} \widehat{C}_4 - \widehat{C}_1 \widehat{C}_2 + \frac{5}{4} \widehat{C}_1,
\end{aligned} \tag{59}$$

где операторы Казимира [42] имеют вид

$$\begin{aligned}
\widehat{C}_1 &= \frac{1}{2} :[(\partial\Phi)^2]_0:, \\
\widehat{C}_2 &= \frac{1}{3} :[(\partial\Phi)^3]_0:, \\
\widehat{C}_3 &= \frac{1}{4} :[(\partial\Phi)^4 + \partial\Phi(\widehat{R}\partial\Phi)]_0:, \\
\widehat{C}_4 &= \frac{1}{5} :[(\partial\Phi)^5 + \frac{5}{2}(\partial\Phi)^2(\widehat{R}\partial\Phi)]_0:, \\
\widehat{C}_k &= \frac{1}{k+1} :[(\partial\Phi)^{k+1} + \frac{(k+1)!}{4!(k-2)!}(\partial\Phi)^{k-1}(\widehat{R}\partial\Phi) + \dots]_0:.
\end{aligned}$$

2.6. Характеры группы $GL(\infty)$. Характеры $\chi_R(t)$ группы GL определяются первой детерминантной формулой Вейля

$$\chi_R(t) = \det_{ij} s_{\mu_i + j - i}(t), \tag{60}$$

где $s_k(t)$ – полиномы Шура,

$$\exp\left(\sum_k t_k z^k\right) = \sum_k s_k(t) z^k. \tag{61}$$

В результате преобразования Мивы $p_k = kt_k = \text{tr } X^k$ те же характеры выражаются через собственные значения матрицы X при помощи второй формулы Вейля:

$$\chi_R[X] = \chi_R\left(t_k = \frac{1}{k} \text{tr } X^k\right) = \frac{\det_{ij} x_i^{\mu_j - j}}{\det_{ij} x_i^{-j}}. \tag{62}$$

Разложение $\chi_R(t)$ по степеням p определяет коэффициенты $\varphi_R(\Delta)$ согласно формуле (2) для $|R| = |\Delta|$ и по формуле (3) для всех остальных Δ . В формуле (2) параметр d_R является значением характера в точке $t_k = \delta_{k,1}$,

$$d_R = \chi_R(\delta_{k,1}), \tag{63}$$

и дается формулой крюков

$$d_R = \prod_{\text{все клетки } R} \frac{1}{\text{длина крюка}} = \frac{\prod_{i < j=1}^{|R|} (\mu_i - \mu_j - i + j)}{\prod_{i=1}^{|R|} (\mu_i + |R| - i)!}. \tag{64}$$

На характерах можно также ввести естественное скалярное произведение

$$\langle \chi_R(t), \chi_{R'}(t) \rangle = \delta_{RR'}, \quad (65)$$

явно заданное формулой

$$\langle A(t), B(t) \rangle \equiv A\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)B(t)\Big|_{t_k=0}. \quad (66)$$

В частности,

$$\langle p(\Delta), \widetilde{p(\Delta')} \rangle = \delta_{\Delta\Delta'}. \quad (67)$$

Эти формулы вместе с (2) непосредственно приводят к обратному разложению

$$\widetilde{p(\Delta)} = \sum_R d_R \varphi_R(\Delta) \chi_R(t) \delta_{|\Delta|, |R|}. \quad (68)$$

Таким образом, формула (6) дает действительно исчерпывающее альтернативное описание операторов $\widetilde{\mathcal{W}(\Delta)}$, и можно проверить, что (12) действительно удовлетворяет этому определению (см. п. 2.7 и [23], [42]). Эквивалентность двух определений (25) и (6) следует из формулы (1).

2.7. Вывод формулы (6) из (12). Идея прямого вывода (6) из (12) состоит в следующем. Рассмотрим для простоты диаграмму Юнга Δ , которая не содержит единиц (расширение на общий случай делается непосредственно). Очевидно,

$$:\widetilde{D(\Delta)}: e^{t_1} = :\widetilde{D(\Delta)}: e^{\text{tr } X} = \widetilde{p(\Delta)} e^{t_1}. \quad (69)$$

Поскольку

$$e^{t_1} = \sum_R d_R \chi_R(t), \quad (70)$$

отсюда следует, что

$$\sum_R d_R :\widetilde{D(\Delta)}: \chi_R(t) = \widetilde{p(\Delta)} e^{t_1}. \quad (71)$$

Правая часть этой формулы может быть переписана с использованием (68) и (3) как

$$\begin{aligned} \sum_k \widetilde{p(\Delta)} \frac{t_1^k}{k!} &= \sum_k \overline{p([\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}]_k)} = \\ &= \sum_k \sum_{R: |R|=|\Delta|+k} d_R \varphi_R(\Delta) \chi_R = \sum_R d_R \varphi_R(\Delta) \chi_R, \end{aligned} \quad (72)$$

и это соотношение вместе с (71) и с тем фактом, что $\chi_R(t)$ являются собственными функциями $:\widetilde{D(\Delta)}:$, приводит в конце концов к (6).

2.8. Комментарий к формуле (14). Имеются отклонения от наивной формулы (14), которые возникают, поскольку нужно аккуратно налагать условие $|\Delta| = R$ в (2) при переходе от $\varphi_R(\Delta)$ в (1) к характеристам $\chi_R(t')$ в (4):

$$\begin{aligned} Z(t, t', \dots) &= \sum_q \left\{ \sum_{\Delta, \Delta'} p(\Delta) p'(\Delta') \delta_{|\Delta|, q} \delta_{|\Delta'|, q} \text{Cov}_q(\Delta, \Delta', \dots) \right\} = \\ &= \sum_R \chi_R(t) \chi_R(t') \dots \end{aligned} \quad (73)$$

или альтернативно

$$\begin{aligned} Z(t, t', \dots) &= \sum_{\Delta', R} d_R \chi_R(t) \varphi_R(\Delta) p'(\Delta) \dots \delta_{|\Delta|, |R|} = \\ &= \oint \frac{dz}{z} \sum_{\Delta, R} d_R \chi_R(t) \varphi_R(\Delta) p'(\Delta) z^{|\Delta| - |R|} \dots = \\ &= \oint \frac{dz}{z} \sum_{\Delta} z^{|\Delta|} p'(\Delta) : \widetilde{D}(\Delta) : \sum_R d_R \chi_R(t) z^{|R|} \dots = \\ &= \oint \frac{dz}{z} : \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k t'_k \widehat{D}_k \right) : \sum_R d_R \chi_R(t) z^{|R|} \dots \end{aligned}$$

Это полная (корректная) версия формулы (14). Если рассматривается $Z(t, t'|0)$, тогда сумма по R равна $e^{t_1/z}$, и мы получаем в качестве простейшего примера

$$\begin{aligned} Z(t, t'|0) &= \oint \frac{dz}{z} : \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k t'_k \widehat{D}_k \right) : e^{t_1/z} = \\ &= \exp \left(\sum_k k t_k t'_k \right) \oint \frac{dz}{z} e^{t_1/z} = \exp \left(\sum_k k t_k t'_k \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Обобщения проводятся легко. Если рассматривать многократные числа Гурвица с большим числом наборов переменных t , то нужно учитывать дополнительные δ -функции и интегралы по z .

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

РС-оператор общего вида $\widehat{W}(\Delta)$ ассоциируется с произвольной диаграммой Юнга Δ и может быть определен двумя альтернативными способами.

При первом способе РС-оператор определяется через характеры требованием, чтобы выполнялось соотношение

$$\widehat{W}(\Delta) \chi_R(t) = \varphi_R(\Delta) \chi_R(t) \quad (75)$$

для любой диаграммы Юнга R . Тогда статсумма Гурвица, скажем, для двух наборов времен равна

$$\mathcal{Z}(t, \bar{t} | \beta) \equiv \sum_R \chi_R(t) \chi_R(\bar{t}) \exp \left(\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \varphi_R(\Delta) \right) = \exp \left(\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \widehat{W}(\Delta) \right) \mathcal{Z}(t, \bar{t} | 0), \quad (76)$$

где

$$Z(t, \bar{t}|0) = \sum_R \chi_R(t) \chi_R(\bar{t}) = \exp\left(\sum_k kt_k \bar{t}_k\right) = \exp\left(\sum_k \frac{1}{k} p_k \bar{p}_k\right).$$

Гурвицевская τ -функция Тоды [27], [9] для двойных чисел Гурвица

$$Z(t, \bar{t}|\beta) = \sum_R \chi_R(t) \chi_R(\bar{t}) e^{\beta_2 \varphi_R([2])} = e^{\beta_2 \widehat{\mathcal{W}}([2])} Z(t, \bar{t}, 0)$$

является частным случаем, а τ -функция КП Гурвица–Концевича для *однократных* (или *обычных*) чисел Гурвица – ее дальнейшим ограничением на $\bar{t}_k = \delta_{k,1}$. Интегрируемость в этих двух примерах имеется, поскольку простейший РС-оператор $\widehat{\mathcal{W}}([2])$ совпадает со вторым оператором Казимира, а интегрируемость имеет место, когда любая комбинация операторов Казимира действует на τ -функцию [27]. Она, однако, нарушается общими РС-операторами с $|\Delta| \geq 3$. Конечно, можно ассоциировать β -переменные с некоторой новой интегрируемой структурой, отраженной в коммутативности операторов $\widehat{\mathcal{W}}(\Delta)$,

$$[\widehat{\mathcal{W}}(\Delta_1), \widehat{\mathcal{W}}(\Delta_2)] = 0 \quad \forall \Delta_1, \Delta_2. \quad (77)$$

Однако нет никакого очевидного способа связать эту интегрируемость с индуцированными теорией групп билинейными соотношениями типа Хироты [47], и даже меньше шансов есть на то, что она как-то индуцирована представлением $\widehat{U}(1)$ в виде свободных фермионов (эти две черты встроены в определение интегрируемых иерархий типа КП или Тоды).

При втором способе РС-оператор определяется через перестановки и циклические декомпозиции. Это проблема, напрямую связанная со слиянием точек ветвления гурвицевского накрытия. Центральная формула здесь (25),

$$\Delta \circ \mathcal{P}(p) = \widehat{\mathcal{W}}(\Delta) \mathcal{P}(p), \quad (78)$$

и в п. 2.2 мы объяснили, как оператор $\widehat{\mathcal{W}}(\Delta)$ явно восстанавливается из знания композиций перестановок.

Оба эти определения, условия (75) и (78), явно решаются формулой (12) – прямым обобщением представления простейшего РС-оператора $\widehat{\mathcal{W}}([2])$ из работы [24]. Первые несколько операторов этого набора приведены в п. 2.5.

Эти операторы образуют коммутативную ассоциативную алгебру

$$\widehat{\mathcal{W}}(\Delta_1) \widehat{\mathcal{W}}(\Delta_2) = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} \widehat{\mathcal{W}}(\Delta). \quad (79)$$

Мы называем ее универсальной алгеброй Гурвица, поскольку она позволяет определить универсальные числа Гурвица для произвольного набора диаграмм Юнга, не обязательно одного и того же размера. А именно, с учетом (43) формула (1) позволяет определить число Гурвица как

$$\text{Cov}(\Delta_1, \dots, \Delta_m) = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1 \dots \Delta_m}^{\Delta} \left(\sum_R d_R^2 \varphi(\Delta) \right), \quad (80)$$

где C – комбинация структурных констант, например

$$C_{\Delta_1 \dots \Delta_m}^{\Delta} = \sum_{\Delta_a, \Delta_b, \dots, \Delta_c} C_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta_a} C_{\Delta_a \Delta_3}^{\Delta_b} \cdots C_{\Delta_c \Delta_m}^{\Delta} \quad (81)$$

(порядок спаривания в действительности несуществен из-за ассоциативности и коммутативности алгебры). Таким образом, вычисление чисел Гурвица сводится к вычислению единственной формы на линейной алгебре диаграмм Юнга

$$\sum_R d_R^2 \varphi_R(\Delta) = \begin{cases} 0, & \Delta \text{ содержит более одного столбца,} \\ \frac{1}{n!}, & \Delta = \underbrace{[1, \dots, 1]}_n. \end{cases} \quad (82)$$

Тот факт, что форма обращается в нуль всюду, кроме одностолбцовых диаграмм, является прямым следствием фундаментального правила сумм (70).

Подробнее с описанием в терминах характеров и с аспектами, связанными с интегрируемостью проблемы, можно ознакомиться в статьях [23], [42]. Все приведенные здесь и в работах [23], [42] соотношения заслуживают лучшего понимания. Особый интерес представляют изучение τ -функции КП Гурвица в терминах матричных моделей [24], его приложение (с использованием [35]) к пониманию мистической связи твистования τ -функции КП Гурвица и τ -функции Концевича [10], [19], [22] и дальнейшее неабелево обобщение всего данного формализма на числа Гурвица для накрытий римановых поверхностей с границами [14] (например, диск вместо римановой сферы).

Благодарности. Авторы благодарны А. Александрову и Ш. Шакирову за полезные обсуждения и комментарии. Работа частично поддержана Российским государственным агентством по атомной энергии, совместными грантами № 09-02-91005-АНФ, 09-02-93105-НЦНИЛ, 09-02-90493-Укр, 09-01-92440-КЭ, грантами поддержки ведущих научных школ НШ-3035.2008.2 (А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов) и НШ-709.2008.1 (С. М. Натанзон), грантами РФФИ 10-01-00536 (А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов) и 07-01-00593 (С. М. Натанзон).

Список литературы

- [1] A. Hurwitz, *Math. Ann.*, **39**:1 (1891), 1–60; **55** (1902), 53–66.
- [2] G. Frobenius, *Berl. Ber.*, 1896, 985–1021.
- [3] R. Dijkgraaf, “Mirror symmetry and elliptic curves”, *The Moduli Spaces of Curves*, Progr. Math., **129**, eds. D. Abramovich, A. Bertram, L. Katzarkov, R. Pandharipande, M. Thaddeus, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, 149–163.
- [4] R. Vakil, *Enumerative geometry of curves via degeneration methods*, Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, MA, 1997.
- [5] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:1 (1997), 51–60, arXiv: math/9903094.
- [6] Д. Звонкин, С. К. Ландо, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:3 (1999), 21–34; D. Zvonkine, S. K. Lando, *Counting ramified coverings and intersection theory on spaces of rational functions I (Cohomology of Hurwitz spaces)*, arXiv: math.AG/0303218.
- [7] S. M. Natanzon, V. Turaev, *Topology*, **38**:4 (1999), 889–914.

- [8] I. P. Goulden, D. M. Jackson, A. Vainshtein, *Ann. Comb.*, **4**:1 (2000), 27–46, arXiv: math/9902125.
- [9] A. Okounkov, *Math. Res. Lett.*, **7**:4 (2000), 447–453, arXiv: math/0004128v1.
- [10] A. Givental, *Mosc. Math. J.*, **1**:4 (2001), 551–568, arXiv: math/0108100.
- [11] T. Ekedahl, S. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Invent. Math.*, **146**:2 (2001), 297–327, arXiv: math/0004096.
- [12] С. К. Ландо, *УМН*, **57**:3(345) (2002), 29–98.
- [13] A. V. Alexeevski, S. M. Natanzon, *Selecta Math.*, **12**:3–4 (2006), 307–377, arXiv: math.GT/0202164.
- [14] А. В. Алексеевский, С. М. Натанзон, *УМН*, **61**:4(370) (2006), 185–186; S. M. Natanzon, *Disk single Hurwitz numbers*, arXiv: 0804.0242; A. Alexeevski, S. Natanzon, “Hurwitz numbers for regular coverings of surfaces by seamed surfaces and Cardy–Frobenius algebras of finite groups”, *Geometry, Topology, and Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **224**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2008, 1–25; А. В. Алексеевский, С. М. Натанзон, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:4 (2008), 3–24.
- [15] J. Zhou, *Hodge integrals, Hurwitz numbers and symmetric groups*, arXiv: math.AG/0308024.
- [16] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Ann. Math.*, **163**:2 (2006), 517–560, arXiv: math.AG/0204305.
- [17] T. Graber, R. Vakil, *Compos. Math.*, **135**:1 (2003), 25–36, arXiv: math/0003028.
- [18] М. Э. Казарян, С. К. Ландо, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:5 (2004), 91–122, arXiv: math.AG/0410388; М. Е. Kazarian, S. K. Lando, *J. Amer. Math. Soc.*, **20**:4 (2007), 1079–1089, arXiv: math/0601760.
- [19] M. Kazarian, *Adv. Math.*, **221**:1 (2009), 1–21, arXiv: 0809.3263.
- [20] S. Lando, “Combinatorial Facets of Hurwitz numbers”, *Applications of Group Theory to Combinatorics*, eds. J. Koolen, J. H. Kwak, M.-Y. Xu, CRC Press, Boca Raton, FL, 2008, 109–131.
- [21] V. Bouchard, M. Mariño, “Hurwitz numbers, matrix models and enumerative geometry”, *From Hodge Theory to Integrability and TQFT: tt*-geometry*, Proc. Sympos. Pure Math., **78**, eds. R. Y. Donagi, K. Wendland, AMS, Providence, RI, 2008, 263–283, arXiv: 0709.1458.
- [22] A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **02** (2009), 024, 52 pp., arXiv: 0807.2843.
- [23] A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *Integrability and \mathcal{N} -point Hurwitz numbers* (to appear).
- [24] A. Morozov, Sh. Shakirov, *JHEP*, **04** (2009), 064, 33 pp., arXiv: 0902.2627.
- [25] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1950; М. Хамермеш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Мир, М., 1966; И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1984; W. Fulton, *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*, London Math. Soc. Stud. Texts, **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [26] N. Nekrasov, A. Okounkov, “Seiberg–Witten theory and random partitions”, *The Unity of Mathematics*, Progr. Math., **244**, eds. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhäuser, Boston, MA, 2006, 525–596, arXiv: hep-th/0306238; A. Marshakov, N. Nekrasov, *JHEP*, **1** (2007), 104, 39 pp., arXiv: hep-th/0612019; B. Eynard, *J. Stat. Mech.*, **7** (2008), P07023, 34 pp., arXiv: 0804.0381; A. Klemm, P. Sułkowski, *Nucl. Phys. B*, **819**:3 (2009), 400–430, arXiv: 0810.4944.
- [27] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:14 (1995), 2015–2051, arXiv: hep-th/9312210.
- [28] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Modern Phys. Lett. A*, **8**:11 (1993), 1047–1061, arXiv: hep-th/9208046; С. М. Харчев, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **95**:2 (1993), 280–292.

- [29] М. Л. Концевич, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 50–57; М. L. Kontsevich, *Comm. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 1–23; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin, *Phys. Lett. B*, **275**:3–4 (1992), 311–314, arXiv:hep-th/9111037; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin, *Nucl. Phys. B*, **380** (1992), 181–240, arXiv:hep-th/9201013; A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **274**:3–4 (1992), 280–288, arXiv:hep-th/9201011; S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **397**:1–2 (1993), 339–378, arXiv:hep-th/9203043; P. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Comm. Math. Phys.*, **151**:1 (1993), 193–219, arXiv:hep-th/9206090.
- [30] А. Ю. Морозов, *УФН*, **164**:1 (1994), 3–62, arXiv:hep-th/9303139; А. Ю. Морозов, *Matrix models as integrable systems*, arXiv:hep-th/9502091; “Challenges of matrix models”, *String Theory: from Gauge Interactions to Cosmology*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **208**, eds. L. Baulieu, J. de Boer, B. Pioline, E. Rabinovici, Springer, Dordrecht, 2006, 129–162, arXiv:hep-th/0502010; А. Мironov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:25 (1994), 4355–4405, arXiv:hep-th/9312212; А. Д. Миронов, *ЭЧАЯ*, **33**:5 (2002), 1051–1145.
- [31] А. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618.
- [32] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, S. Pakuliak, *Nucl. Phys. B*, **404**:3 (1993), 717–750, arXiv:hep-th/9208044.
- [33] А. Мironov, А. Морозов, *Phys. Lett. B*, **252**:1 (1990), 47–52; F. David, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:13 (1990), 1019–1029; J. Ambjørn, Yu. M. Makeenko, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:22 (1990), 1753–1763; H. Itoyama, Y. Matsuo, *Phys. Lett. B*, **255**:2 (1991), 202–208; Yu. Makeenko, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **356**:3 (1991), 574–628.
- [34] А. Alexandrov, А. Мironov, А. Морозов, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4163, arXiv:hep-th/0310113; А. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **142**:3 (2005), 419–488; А. Alexandrov, А. Мironov, А. Морозов, *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:12 (2006), 2481–2517, arXiv:hep-th/0412099; *Fortschr. Phys.*, **53**:5–6 (2005), 512–521, arXiv:hep-th/0412205; B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031, 35 pp., arXiv:hep-th/0407261; B. Eynard, N. Orantin, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:2 (2007), 347–452, arXiv:math-ph/0702045; N. Orantin, *From matrix models’ topological expansion to topological string theories: counting surfaces with algebraic geometry*, arXiv:0709.2992; А. Alexandrov, А. Мironov, А. Морозов, P. Putrov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:27 (2009), 4939–4998, arXiv:0811.2825.
- [35] А. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 179–192, arXiv:hep-th/0605171; А. Alexandrov, А. Мironov, А. Морозов, *Phys. D*, **235**:1–2 (2007), 126–167, arXiv:hep-th/0608228; N. Orantin, *Symplectic invariants, Virasoro constraints and Givental decomposition*, arXiv:0808.0635.
- [36] А. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **65**:3 (1985), 347–359; V. A. Fateev, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **280**:4 (1987), 644–660; А. Gerasimov, А. Marshakov, А. Морозов, *Phys. Lett. B*, **236**:3 (1990), 269–272; *Nucl. Phys. B*, **328**:3 (1989), 664–676; А. Marshakov, А. Морозов, *Nucl. Phys. B*, **339**:1 (1990), 79–94; А. Морозов, *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 619–631.
- [37] M. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifolds”, *Random Systems and Dynamical Systems*, RIMS Kokyuroku, **439**, ed. H. Tōtōki, Kyoto Univ., Kyoto, 1981, 30–46.
- [38] G. Segal, G. Wilson, *Publ. Math. Publ. IHES*, **61**:1 (1985), 5–65; D. Friedan, S. Shenker, *Phys. Lett. B*, **175**:3 (1986), 287–296; *Nucl. Phys. B*, **281**:3–4 (1987), 509–545; N. Ishibashi, Y. Matsuo, H. Ooguri, *Modern Phys. Lett. A*, **2**:2 (1987), 119–132; L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, C. Reina, *Phys. Lett. B*, **190**:1–2 (1987), 55–62; А. Морозов, *Phys. Lett. B*, **196**:3 (1987), 325–328; А. S. Schwarz, *Nucl. Phys. B*, **317**:2 (1989), 323–343.
- [39] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **19**:3 (1983), 943–1001.

- [40] K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations*, Adv. Stud. Pure Math., **4**, ed. K. Okamoto, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1–95.
- [41] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York, London, 1962; Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, М., 1970.
- [42] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, “Cut-and-join operators, matrix models and characters” (to appear).
- [43] A. Grothendieck, “Sketch of a programme. (Esquisse d’un programme)”, *Geometric Galois Actions*, v. 1, London Math. Soc. Lect. Note Ser., **242**, eds. L. Schneps, P. Lochak, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 5–48; English translation: 243–283; Г. В. Бельый, “О расширениях Гаула максимального кругового поля”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43:2** (1979), 267–276; G. B. Shabat, V. A. Voevodsky, “Drawing curves over number fields”, *The Grothendieck Festschrift*, v. III, Progr. Math., **88**, eds. P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Y. Manin, K. A. Ribet, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, 199–227; A. Levin, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **243:3** (1990), 207–214; S. K. Lando, A. K. Zvonkine, *Graphs on Surfaces and Their Applications*, Encyclopaedia Math. Sci., **141**, Springer, Berlin, 2004; N. M. Adrianov, N. Ya. Amburg, V. A. Dremov, Yu. A. Levitskaya, E. M. Kreines, Yu. Yu. Kochetkov, V. F. Nasretdinova, G. B. Shabat, *Catalog of dessins d’enfants with ≤ 4 edges*, arXiv: 0710.2658.
- [44] A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *Universal algebras of Hurwitz numbers*, arXiv: 0909.1164.
- [45] M. Atiyah, *Publ. Math. IHES*, **68** (1988), 175–186.
- [46] R. Dijkgraaf, E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **129:2** (1990), 393–429.
- [47] А. Ю. Морозов, *УФН*, **35:8** (1992), 671–714; А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, Л. Винэ, *ТМФ*, **100:1** (1994), 119–131, arXiv: hep-th/9312213; А. Gerasimov, S. Khoroshkin, D. Lebedev, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10:18** (1995), 2589–2614, arXiv: hep-th/9405011; S. Kharchev, A. Mironov, A. Morozov, *ТМФ*, **104:1** (1995), 129–143, arXiv: q-alg/9501013; A. Mironov, “Quantum deformations of τ -functions, bilinear identities and representation theory”, *Symmetries and Integrability of Difference Equations*, CRM Proc. Lecture Notes, **9**, eds. D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz, AMS, Providence, RI, 1996, 219–237, arXiv: hep-th/9409190; А. Д. Миронов, *ТМФ*, **114:2** (1998), 163–232, arXiv: q-alg/9711006.

Поступила в редакцию 7.06.2010