УДК 517.518.24+515.124

Об отображениях ограниченной вариации со значениями в метрическом пространстве

В. В. Чистяков

В настоящей заметке представлены некоторые новые результаты, касающиеся отображений ограниченной вариации (в том числе и многозначных), определенных на подмножестве вещественной прямой $\mathbb{R}$ и принимающих значения в метрическом пространстве. Одним из вопросов, который будет нас интересовать — это вопрос о существовании *регулярных* селекций многозначных отображений, имеющих, вообще говоря, невыпуклые образы. В случае выпуклозначных отображений существование непрерывных селекций при весьма общих условиях установлено в работах Майкла [1]. Без предположения о выпуклости значений многозначного отображения непрерывные селекции могут не существовать даже для сжатий, зависящих от двух или более переменных (Хермес [2]). Здесь будут изучаться невыпуклозначные многозначные отображения одной вещественной переменной.

Рассмотрим функциональное включение вида

$$f(t) \in F(t), \qquad t \in I = [a,b] \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $F : I \to 2^X$ — заданное многозначное отображение из отрезка I в класс 2^X непустых подмножеств банахова пространства X, подчиненное определенным *условиям регулярности*, о которых будет сказано ниже. Будем искать отображения $f : I \to X$, удовлетворяющие включению (1) во всех точках $t \in I$ кроме, быть может, счетного их числа (точнее во всех точках непрерывности F) и подчиняющиеся условиям регулярности в том же смысле, что и F. Такие отображения f будем называть *регулярными селекциями* многозначного отображения F. Условия регулярности, о которых упоминалось ранее, будут выражаться в терминах *ограниченности вариации*. Таким образом, решения функционального включения (1) ищутся в пространствах отображений ограниченной вариации. Поскольку класс всех (по крайней мере) компактных множеств пространства X можно превратить в метрическое пространство относительно метрики Хаусдорфа D, мы сталкиваемся с отображениями ограниченной вариации, принимающими значения в метрическом пространстве.

Поэтому, прежде всего рассмотрим отображение $f : I \to X$, где X — метрическое пространство с метрикой d. Такое отображение f называется *отображением ограниченной* Φ*-вариации*, где $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная, выпуклая вниз функция, такая, что $\Phi(\rho) = 0$ только при $\rho = 0$, если

$$\mathsf{V}_\Phi(f) = \sup_T \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{d(f(t_i), f(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}}\right) \cdot (t_i - t_{i-1}) < \infty, \tag{2}$$

где супремум берется по всем разбиениям $T = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b\}$ отрезка $I = [a,b]$. Множество всех отображений из I в X

ограниченной Ф-вариации обозначим через $BV_\Phi(I;X)$. Обозначим также через $C^{0,1}(I;X)$, $AC(I;X)$ и $BV_1(I;X)$ соответственно множества всех непрерывных по Липшицу (в метрике d) отображений, абсолютно непрерывных отображений и отображений ограниченной (по Жордану) Ф-вариации при $\Phi(\rho)=\rho$, $\rho\geqslant 0$. Имеют место следующие вложения функциональных пространств:

$$C^{0,1}(I;X)\subset BV_\Phi(I;X)\subset BV_1(I;X) \quad \text{и} \quad C^{0,1}(I;X)\subset AC(I;X)\subset BV_1(I;X), \tag{3}$$

а если дополнительно известно, что $\lim_{\rho\to\infty}\Phi(\rho)/\rho=\infty$, то

$$C^{0,1}(I;X)\subset BV_\Phi(I;X)\subset AC(I;X)\subset BV_1(I;X). \tag{4}$$

В теории вещественных функций ограниченной вариации известны следующие критерии: 1) *критерий Жордана* ([3]): $f\in BV_1(I;\mathbb{R}) \iff f$ представима в виде разности двух неубывающих ограниченных функций на I; 2) *критерий Рисса* ([4]): если $\Phi(\rho)=\rho^q$, $q>1$, то $f\in BV_\Phi(I;\mathbb{R}) \iff f\in AC(I;\mathbb{R})$ и производная f' (определенная почти всюду) суммируема на I со степенью q; 3) *критерий Медведева* ([5]): если $\lim_{\rho\to\infty}\Phi(\rho)/\rho=\infty$, то $f\in BV_\Phi(I;\mathbb{R}) \iff f\in AC(I;\mathbb{R})$ и $\int_a^b\Phi(|f'(t)|)\,dt<\infty$.

Наш первый результат в этом направлении — это следующая *структурная*:

Теорема 1 *Если X есть метрическое пространство, то $f\in BV_\Phi(I;X)$ в том и только том случае, когда существуют неубывающая ограниченная функция $\varphi\in BV_\Phi(I;[0,\infty))$ и отображение $g\in C^{0,1}(J;X)$, где $J=\varphi(I)$ есть образ φ, такие, что $f(t)=g(\varphi(t))$ для всех $t\in I$, причем константа Липшица отображения g не превосходит единицы и $\mathsf{V}_\Phi(\varphi)=\mathsf{V}_\Phi(f)$.*

Эта теорема также справедлива, если в ней заменить BV_Φ на $C^{0,1}$ или AC. Используя ее, получаем следующую *теорему о компактности* в пространствах отображений ограниченной Ф-вариации, которая обобщает известный в теории вещественных функций ограниченной вариации (когда $X=\mathbb{R}$ и $\Phi(\rho)=\rho$) *принцип выбора Хелли* ([3]):

Теорема 2 *Пусть K есть компактное подмножество метрического пространства X и $\mathcal{F}$ — бесконечное семейство непрерывных отображений из I в K, такое, что $\sup_{f\in\mathcal{F}}\mathsf{V}_\Phi(f)<\infty$. Тогда семейство $\mathcal{F}$ содержит последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, которая поточечно на I сходится к некоторому отображению $f\in BV_\Phi(I;X)$ при $n\to\infty$. Более того, если X — банахово пространство, то условие непрерывности семейства $\mathcal{F}$ излишне. Если же $\lim_{\rho\to\infty}\Phi(\rho)/\rho=\infty$, то сходимость f_n к f является равномерной.*

Понятие Ф-вариации отображения не только обобщает понятие вариации по Жордану ($\Phi(\rho)=\rho$) и вариации по Риссу ($\Phi(\rho)=\rho^q$, $q>1$), но и представляет самостоятельный интерес в силу следующей теоремы (ср. с (4)):

Теорема 3 *Если X — метрическое пространство и $f\in AC(I;X)$, то найдется такая функция Φ, что $\lim_{\rho\to\infty}\Phi(\rho)/\rho=\infty$, $\lim_{\rho\to 0}\Phi(\rho)/\rho=0$ и $f\in BV_\Phi(I;X)$.*

Многозначное отображение $F : I \to 2^X$ называется *отображением ограниченной Φ-вариации* относительно метрики Хаусдорфа D, если величина $\mathsf{V}_\Phi(F)$, определяемая также, как в (2), с заменой d на D, конечна. Теперь мы можем сформулировать *теорему о существовании регулярных селекций* многозначных отображений ограниченной вариации.

Теорема 4 *Пусть X — банахово пространство и многозначное отображение $F \in BV_\Phi(I; 2^X)$ имеет компактный график* $\mathrm{Graph}(F) = \{(t,x) \in I \times X \mid x \in F(t)\}$. *Тогда для всех $t_0 \in I$ и $x_0 \in F(t_0)$ найдется регулярная селекция $f \in BV_\Phi(I; X)$ отображения F (другими словами, решение включения* (1)*), такая, что $f(t_0) = x_0$ и $\mathsf{V}_\Phi(f) \leqslant \mathsf{V}_\Phi(F)$. Если дополнительно известно, что F непрерывно или $\lim_{\rho\to\infty} \Phi(\rho)/\rho = \infty$, то селекция f также непрерывна и включение* (1) *имеет место для всех $t \in I$.*

Результат теоремы 4 дополняется следующим утверждением, принадлежащем Мордуховичу [6]: если в теореме 4 многозначное отображение F липшицево относительно метрики Хаусдорфа D, то оно имеет регулярную липшицеву селекцию. Таким образом, все многозначные отображения из шкалы пространств (3) и (4) обладают регулярными селекциями из того же класса отображений ограниченной вариации, что и само многозначное отображение.

Наконец, отметим, что представленные результаты (теоремы 1–4) обобщают результаты, полученные автором ранее для более специальных классов отображений ограниченной вариации ([7]–[10]).

Список литературы

[1] Michael E. A. *Continuous selections.* I, II, III // Ann. Math. **63** (1956), № 2, 361–382; **64** (1956), № 3, 562–580; **65** (1957), № 2, 375–390.

[2] Hermes H. *On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations* // Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), № 3, 535–542.

[3] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

[4] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

[5] Медведев Ю. Т. *Обобщение одной теоремы Ф. Рисса* // Успехи матем. наук **8** (1953), № 6, 115–118.

[6] Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.

[7] Chistyakov V. V. *On mappings of bounded variation* // J. Dynamical and Control Systems **3** (1997), № 2, 261–289.

[8] Чистяков В. В. *К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной* // Матем. сборник **189** (1998), № 5, 153–176.

[9] Чистяков В. В. *Селекции многозначных отображений ограниченной по Риссу p-вариации и их дифференциальные свойства* // Матем. сборник (1998), в печати.

[10] Chistyakov V. V. *Existence of selections of set-valued mappings of bounded variation* // Positivity (1998), to appear.

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
1998

Чистяков В. В.
Об отображениях ограниченной вариации
со значениями в метрическом пространстве.

Аннотация. Приводится полная характеризация отображений ограниченной вариации и абсолютно непрерывных отображений, определенных на отрезке прямой и принимающих значения в метрическом пространстве. Установлен аналог принципа выбора Хелли, а также доказана теорема о существовании регулярных селекций ограниченной вариации у многозначных отображений ограниченной вариации.

Chistyakov V. V.
On mappings of bounded variation with values in a metric space.

Abstract. We give a complete characterization of mappings of bounded variation and absolutely continuous mappings defined on the compact interval of the real line and taking values in the metric space. We establish an analog of the Helly selection principle, and prove that set-valued mappings of bounded variation admit regular selections of bounded variation.