Будем говорить, что игра G удовлетворяет условию *УВЦ для исходов*, если этому условию удовлетворяет каждое упорядоченное $\langle A, \omega_i \rangle$ $(i \in I)$.

Определение 8. Для каждого $i \in I$ и $x_i \in X_i$ определим множество $A_{x_i} = \{F(x_i, y) : y \in X_{1-i}\}\uparrow$, где $\uparrow$ есть оператор мажорантно-стабильного замыкания относительно порядка ω_i. Будем говорить, что игра G удовлетворяет условию *УВЦ для идеалов*, если для любого $i \in I$ выполнено условие *УВЦ* для семейства подмножеств $\{A_{x_i} : x_i \in X_i\}$, упорядоченного отношением включения.

Условия существования ситуаций *k*-равновесия в играх с упорядоченными исходами

Будем обозначать через *D(G)* множество индивидуально-рациональных исходов игры G вида (1), то есть множество исходов, допустимых для каждого игрока. Скажем, что игрок i является *безразличным на D(G),* если для любых $a_1, a_2 \in D(G)$ условие $a_1 \succ^{\omega_i} a_2$ не имеет места (другими словами, *D(G)* есть антицепь относительно порядка ω_i).

Теорема 3. Пусть игра *G* удовлетворяет условию УВЦ для идеалов. Тогда для любого семейства коалиций *K*, состоящего из коалиций, каждая из которых содержит некоторого безразличного на *D(G)* игрока, существует ситуация *K*-равновесия.

Следствие. Если в игре G множество *D(G)* индивидуально-рациональных исходов является антицепью относительно всех порядков ω_i $(i \in I)$, тогда игра *G* имеет ситуацию сильного равновесия (то есть *K*-равновесия для $K = 2^I$). В частности, это обстоятельство имеет место в случае, когда множество индивидуально-рациональных исходов игры *G* является одноэлементным.

Условия существования *k*-допустимых ситуаций в играх с упорядоченными исходами

Здесь основное условие, которое накладывается на структуру коалиций, – это условие верности.

Определение 9. Будем говорить, что семейство коалиций K образует *веерную структуру*, если для любых двух коалиций $S_1, S_2 \in K$ либо их пересечение пусто, либо одна из них содержится в другой , то есть имеет место одна из трех возможностей: $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, $S_1 \subset S_2$, $S_2 \subset S_1$.

Теорема 4. Пусть G – игра с упорядоченными исходами, удовлетворяющая *условию УВЦ для исходов*. Тогда для любой веерной структуры коалиций *K* множество *K* -допустимых ситуаций не пусто.

СЛЕДСТВИЕ. В этом случае множество индивидуально-рациональных ситуаций, а также множество дележей (то есть индивидуально и коллективно рациональных ситуаций) являются непустыми, т.к. соответствующие семейства коалиций образуют веерную структуру.

Заключение. Если мы заменим условие *K*-равновесия ситуации более слабым условием *K*допустимости, то при этом существенно расширяется класс стабильных ситуаций. В частности, это позволяет снять известное противоречие «между выгодностью ситуации и ее устойчивостью».

ГОМОМОРФИЗМЫ И КОНГРУЭНТНОСТИ ИГР С ТРАНЗИТИВНОЙ СТРУКТУРОЙ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Т.Ф. Савина

Саратовский государственный университет, Россия

I. Основные понятия для игр с отношениями предпочтения

В настоящем докладе объектом изучения являются игры с отношениями предпочтения, то есть трехосновные алгебраические системы вида

$$G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F \rangle,$$

где X – множество стратегий игрока 1, Y – множество стратегий игрока 2, A – множество исходов, F – отображение множества ситуаций $X \times Y$ в множество исходов, ρ_i – отношение предпочтения игрока i, $i = 1,2$, заданное на A.

Пусть теперь, кроме игры G, задана еще одна игра с отношениями предпочтения тех же игроков $\Gamma = \langle U, V, B, \sigma_1, \sigma_2, \Phi \rangle$.

<u>Определение 1.1</u>. Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1 : X \to U$, $\varphi_2 : Y \to V$, $\psi : A \to B$, называется гомоморфизмом игры G в игру Γ, если для любой ситуации (x, y) игры G для $i = 1,2$ выполняются следующие условия:

$$a_1 \overset{\rho_i}{\leq} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\leq} \psi(a_2), \quad (i = 1,2) \qquad (H1)$$

$$\psi \circ F = \Phi \circ (\varphi_1 \prod \varphi_2). \qquad (H2)$$

Пояснение: $\varphi_1 \prod \varphi_2$ есть отображение множества ситуаций игры G в множество ситуаций игры Γ по правилу $\varphi_1 \prod \varphi_2(x,y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$.

Определение I2. Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1 : X \to U$, $\varphi_2 : Y \to V$, $\psi : A \to B$ называется строгим гомоморфизмом игры G в игру Γ, если выполняются следующие условия:

$$a_1 \overset{\rho_i^*}{<} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \overset{\sigma_i^*}{<} \psi(a_2), \quad (i = 1,2) \qquad (H1a)$$

$$a_1 \overset{\rho_i^s}{\sim} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \overset{\sigma_i^s}{\sim} \psi(a_2), \quad (i = 1,2) \qquad (H1b)$$

$$\psi \circ F = \Phi \circ (\varphi_1 \prod \varphi_2). \qquad (H2)$$

Если φ_1 – отображение X на U, φ_2 – отображение Y на V (то есть эти отображения являются сюръекциями), то гомоморфизм $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ называется сюръективным или гомоморфизмом игры G на игру Γ. Если же φ_1, φ_2 и ψ являются биекциями и выполняется условие

$$a_1 \overset{\rho_i}{\le} a_2 \Leftrightarrow \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\le} \psi(a_2), \; i = 1,2, \qquad (I)$$

то гомоморфизм $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ называется изоморфизмом игры G на игру Γ. Две игры с отношениями предпочтения называются изоморфными, если существует изоморфизм одной из них на другую.

Теорема I.1. Пусть $G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F \rangle$ – игра с отношениями предпочтения. Пусть на множествах стратегий и множестве исходов заданы отношения эквивалентности $\varepsilon_1 \subseteq X^2, \varepsilon_2 \subseteq Y^2, \varepsilon_3 \subseteq A^2$ и для тройки эквивалентностей $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ выполняется условие согласованности

$$\left.\begin{array}{l} x \overset{\varepsilon_1}{\equiv} x' \\ y \overset{\varepsilon_2}{\equiv} y' \end{array}\right\} \Rightarrow F(x,y) \overset{\varepsilon_3}{\equiv} F(x',y'). \qquad (C)$$

Тогда определена фактор-игра

$$G/\varepsilon = \langle X/\varepsilon_1, Y/\varepsilon_2, A/\varepsilon_3, \rho_1/\varepsilon_3, \rho_2/\varepsilon_3, F_{\varepsilon_3} \rangle$$

с отношениями предпочтения и каноническое отображение $\varphi = (\varphi_{\varepsilon_1}, \varphi_{\varepsilon_2}, \varphi_{\varepsilon_3})$ является сюръективным гомоморфизмом G на G/ε,

где $\varphi_{\varepsilon_1} : X \xrightarrow{\text{на}} X/\varepsilon_1, \varphi_{\varepsilon_2} : Y \xrightarrow{\text{на}} Y/\varepsilon_2, \varphi_{\varepsilon_3} : A \to A/\varepsilon_3$ и $F_{\varepsilon_3}([x]_{\varepsilon_1}, [y]_{\varepsilon_2}) = [F(x,y)]_{\varepsilon_3}$.

Теорема I.2. Пусть G, Γ – две игры с отношениями предпочтения и тройка отображений $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ – гомоморфизм G на Γ.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) тройка отношений $\varepsilon_\varphi = (\varepsilon_{\varphi_1}, \varepsilon_{\varphi_2}, \varepsilon_{\varphi_3})$, каждое из которых представляет собой ядро соответствующего отображения, удовлетворяет условию согласованности (C);

2) можно построить фактор-игру G/ε_φ, и существует тройка отображений $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ из G/ε_φ в Γ, которая является изоморфным вложением G/ε_φ в Γ.

Изоморфное вложение отличается от изоморфизма тем, что в (I) вместо $\Leftrightarrow$ выполняется $\Rightarrow$.

Причем обратная импликация в общем случае не выполняется. Приведем соответствующий пример.

Пример. Рассмотрим две антагонистические игры с упорядоченными исходами $G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle$ и $\Gamma = \langle U, V, B, \sigma, \Phi \rangle$, в которых множества стратегий игроков имеют вид

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\},, \; U = \{u_1, u_2, u_3\}, V = \{v_1, v_2, v_3\};$$

множества исходов $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{e}\}$ и функции реализации F и Φ заданы табл. 1, 2; между играми установлен гомоморфизм $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ (табл. 3).

Таблица 1

Функция реализации F

F	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	a	a	e	a
x_2	b	c	a	b
x_3	c	b	a	c
x_4	e	e	d	e
x_5	e	e	d	e

Таблица 2

Функция реализации Φ

Φ	v_1	v_2	v_3
u_1	$\bar{a}$	$\bar{e}$	$\bar{a}$
u_2	$\bar{b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$
u_3	$\bar{e}$	$\bar{d}$	$\bar{e}$

Таблица 3

Гомоморфизм $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ из G в Γ

φ_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		φ_2	y_1	y_2	y_3	y_4		φ_3	a	b	c	d	e
	u_1	u_2	u_2	u_3	u_3			v_1	v_1	v_2	v_3			$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	$\bar{e}$

Отношения предпочтения заданы диаграммами (рис. 1, 2).

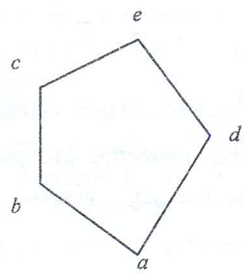

Рис. 1. Диаграмма отношения ω

Рис. 2. Диаграмма отношения σ

Построим фактор-игру G/ε, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. В качестве ε_1 можно взять эквивалентность, классы которой $X_1 = \{x_1\}, X_2 = \{x_2, x_3\}, X_3 = \{x_4, x_5\}$, а в качестве ε_2 – эквивалентность, классы которой $Y_1 = \{y_1, y_2\}, Y_2 = \{y_3\}, Y_3 = \{y_4\}$, а ε_3 определяется классами $C_1 = \{a\}, C_2 = \{b, c\}, C_3 = \{d\}, C_4 = \{e\}$. Тогда функция реализации F_{ε_3} будет представлена табл. 4, а диаграмма фактор-отношения – на рис. 3.

Таблица 4

Функция реализации F_{ε_3}

F_{ε_3}	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	C_1	C_4	C_1
X_2	C_2	C_1	C_2
X_3	C_4	C_3	C_4

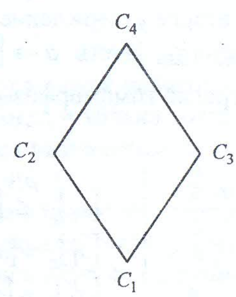

Рис. 3. Диаграмма отношения ω/ε_3

По определению фактор-отношения и гомоморфизма можно записать следующую цепочку импликаций:

$$(C_1, C_2) \in \omega/\varepsilon_3 \Rightarrow (a, b) \in \omega \Rightarrow (\varphi_3(a), \varphi_3(b)) \in \sigma \Leftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}) \in \sigma .$$

Пусть $\bar{b}, \bar{d}$ – любые два исхода игры Γ, тогда выполняется следующая цепочка равносильностей

$$(\bar{b}, \bar{d}) \in \sigma \Leftrightarrow (\varphi_3(b), \varphi_3(d)) \in \sigma \Leftrightarrow \left(\theta_3([b]_{\varepsilon_3}), \theta_3([d]_{\varepsilon_3})\right) \in \sigma \Leftrightarrow (\theta_3(C_2), \theta_3(C_3)) \in \sigma$$

Но $(C_2, C_3) \notin \omega/\varepsilon_3$, так как классы C_2 и C_3 несравнимы по отношению ω/ε_3.

II. Гомоморфизмы и конгруэнтности игр с транзитивной структурой предпочтений

Структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ называется транзитивной, если отношение ρ транзитивно (это равносильно тому, что транзитивны отношения доминирования ρ^* и безразличия ρ^s и ρ^* транзитивно относительно ρ^s).

Отношение ρ называется отношением *квазипорядка*, если оно рефлексивно и транзитивно.

Рассмотрим игру $G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F \rangle$, в которой предпочтения $\rho_i (i = 1,2)$ обладают свойством транзитивности.

Лемма II.1. Пусть $\langle A, \rho \rangle$ – структура предпочтений, $\varepsilon \subseteq A^2$ – отношение эквивалентности. Для того чтобы фактор-структура предпочтений $\langle A/\varepsilon, \rho/\varepsilon \rangle$ была транзитивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение:

$$\rho \circ \varepsilon \circ \rho \subseteq \varepsilon \circ \rho \circ \varepsilon . \qquad (A1)$$

Теорема II.1. Пусть G – игра с транзитивной структурой предпочтений. Пусть на множествах стратегий и множестве исходов заданы отношения эквивалентности $\varepsilon_1 \subseteq X^2, \varepsilon_2 \subseteq Y^2, \varepsilon_3 \subseteq A^2$. Для того чтобы фактор-игра G/ε, где $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, была игрой с транзитивной структурой предпочтений, и каноническое отображение было гомоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\rho_i \circ \varepsilon_3 \circ \rho_i \subseteq \varepsilon_3 \circ \rho_i \circ \varepsilon_3,\ i=1,2;$$

$$\left.\begin{array}{l} x \overset{\varepsilon_1}{\equiv} x' \\ y \overset{\varepsilon_2}{\equiv} y' \end{array}\right\} \Rightarrow F(x,y) \overset{\varepsilon_3}{\equiv} F(x',y').$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы II.1 и теоремы I.1.

Лемма II.2. Пусть $\langle A,\rho\rangle$ – структура предпочтений, $\varepsilon \subseteq A^2$ – отношение эквивалентности. Для того чтобы $\langle A/\varepsilon, \rho/\varepsilon\rangle$ было квазиупорядоченным множеством и каноническое отображение $a \to [a]_\varepsilon$ было строгим гомоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\rho \circ \varepsilon \circ \rho \subseteq \varepsilon \circ \rho \circ \varepsilon; \tag{A1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \overset{\rho}{\leq} a_2 \\ a_1' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1 \\ a_2' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2 \\ a_2' \overset{\rho}{\leq} a_1' \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \overset{\rho^s}{\sim} a_2. \tag{A2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение данной леммы следует из леммы II.1.

Докажем второе утверждение.

<u>Необходимость.</u> Пусть $a \to [a]_\varepsilon$ – строгий гомоморфизм. Рассмотрим левую часть импликации $(A2)$. Так как строгий гомоморфизм является гомоморфизмом, то получаем следующую цепочку импликаций

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \overset{\rho}{\leq} a_2 \\ a_1' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1 \\ a_2' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2 \\ a_2' \overset{\rho}{\leq} a_1' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} [a_1]_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_2]_\varepsilon \\ [a_1']_\varepsilon = [a_1]_\varepsilon \\ [a_2']_\varepsilon = [a_2]_\varepsilon \\ [a_2']_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_1']_\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} [a_1]_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_2]_\varepsilon \\ [a_2]_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_1]_\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow [a_1]_\varepsilon \overset{\rho^s/\varepsilon}{\sim} [a_2]_\varepsilon \Rightarrow a_1 \overset{\rho^s}{\sim} a_2.$$

<u>Достаточность.</u> Нужно доказать, что $a \to [a]_\varepsilon$ будет строгим гомоморфизмом, если выполняется $(A2)$. Возьмем пару элементов a_1, a_2, для которой имеет место $a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2$, а следовательно и $a_1 \overset{\rho}{\leq} a_2$. Так как каноническое отображение $a \to [a]_\varepsilon$ является гомоморфизмом релятива $\langle A,\rho\rangle$ на фактор-релятив $\langle A/\varepsilon, \rho/\varepsilon\rangle$, выполняется $[a_1]_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_2]_\varepsilon$. Предположим, что $[a_2]_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_1]_\varepsilon$. Тогда для некоторых $a_1' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1$, $a_2' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2$ будет выполнено $a_2' \overset{\rho}{\leq} a_1'$. Получаем $a_1 \overset{\rho^s}{\sim} a_2$, что противоречит $a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2$.

Итак, выполняется $[a_1]_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{<} [a_2]_\varepsilon$, то есть первое условие $(H1a)$ гомоморфизма для канонического отображения. Второе условие гомоморфизма $(H1b)$ выполняется в силу того, что каноническое отображение является гомоморфизмом релятива $\langle A,\rho\rangle$ на фактор-релятив $\langle A/\varepsilon, \rho/\varepsilon\rangle$. Таким образом, каноническое отображение множества A на A/ε является строгим гомоморфизмом $\langle A,\rho\rangle$ на $\langle A/\varepsilon, \rho/\varepsilon\rangle$. Лемма доказана.

Теорема II.2. Пусть G – игра с транзитивной структурой предпочтений. Пусть на множествах стратегий и множестве исходов заданы отношения эквивалентности $\varepsilon_1 \subseteq X^2, \varepsilon_2 \subseteq Y^2, \varepsilon_3 \subseteq A^2$. Для того чтобы фактор-игра G/ε, где $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, была игрой с транзитивной структурой предпочтений, и каноническое отображение было строгим гомоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (C), $(A1)$, $(A2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы следует из леммы II.2 и условия согласованности (C).