Взаимодействие коротких векторных однокомпонентных солитонов (амплитудно – фазовые эффекты)

Асеева Н.В., Громов Е.М., Тютин В.В.

Национальный исследовательский университет
Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород,
Россия, 603155, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская 25/12,

E-mail address: naseeva@hse.ru (Асеева Н.В.), egromov@hse.ru (Громов Е.М.), vtyutin@hse.ru (Тютин В.В.)

Аннотация

Рассмотрено взаимодействие однокомпонентных векторных солитонов огибающей различной поляризации, распространяющихся в анизотропных средах. Исследование проводилось в рамках системы двух связанных нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка, учитывающих линейную дисперсию третьего порядка, нелинейную дисперсию, перекрестную нелинейную фазовую модуляцию и перекрестную нелинейную дисперсию. Найдены режимы взаимного отражения, прохождения и асимптотического сближения солитонов. Показано, что характер взаимодействия таких солитонов определяется как начальным соотношением амплитуд солитонов, так и фазой их взаимного расположения: интервал различия начальных амплитуд солитонов, соответствующих отражению, зависит от начальной разности фаз солитонов. Определены стационарные положения взаимодействующих солитонов, а так же обсуждается возможность существования связанных (т.н. бризерных) состояний солитонов. Исследована роль кубичной нелинейности, перекрестной кубичной нелинейности, перекрестной нелинейной дисперсии при взаимодействии солитонов.

Ключевые слова: линейная дисперсия третьего порядка, нелинейная дисперсия, короткий векторный солитон, перекрестная нелинейная дисперсия, перекрестная фазовая модуляция, адиабатическое приближение

Содержание:

1. Введение **3.**

1.1. Протяженные скалярные солитоны **3.**

1.2. Протяженные векторные солитоны **4.**

1.3. Короткие скалярные солитоны **6.**

1.4. Короткие векторные солитоны **8.**

2. Взаимодействие коротких векторных однокомпонентных солитонов **13.**

2.1. Взаимодействие векторных солитонов без фазовых эффектов **15.**

2.2. Взаимодействие векторных солитонов без перекрестной фазовой модуляции **18.**

2.3. Взаимодействие векторных солитонов без перекрестной нелинейной дисперсии **23.**

2.4. Общий случай – учет всех нелинейных эффектов взаимодействия **30.**

2.5. Численный эксперимент **42.**

3. Заключение **47.**

4. Литература: **49.**

1. Введение

В настоящее время в науке велик интерес к стационарным нелинейным волновым пакетам – солитонам. Этот интерес связан с тем, что солитоны могут распространятся на значительные расстояния без искажения своей формы и переносить энергию без потерь. И используются, в частности, в качестве носителей информации в линиях связи, например – в нелинейных волоконных оптических линиях. Солитонные решения существуют в рамках многих различных нелинейных дифференциальных модельных уравнений, возникающих в различных разделах физики при исследовании распространения интенсивных волновых полей в нелинейных средах с дисперсией: оптические импульсы в волоконной оптике, электромагнитные волны в плазме, поверхностные волны на глубокой воде [1–4].

1.1. Протяженные скалярные солитоны

Распространение высокочастотного волнового поля $U(\xi,t)\exp(i\omega t - ik\xi)$ значительной протяженности $kL >> 1$ (где $L = U/(\partial U/\partial\xi)$ - характерный пространственный масштаб неоднородности огибающей U волнового пакета) и значительной длительности $\omega T >> 1$ (где $T = U/(\partial U/\partial t)$ - характерный временной масштаб неоднородности огибающей U) в изотропной нелинейной среде с дисперсией корректно описывается вторым (квазиоптическим) приближением дисперсионной теорией нелинейных волн. Основным модельным уравнением, описывающим динамику медленно меняющейся огибающей U волнового поля в этом приближении является классическое нелинейное уравнение Шредингера [5–6]:

$$2i\frac{\partial U}{\partial t} + q\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha|U|^2\, U = 0\,, \qquad (1.1.1)$$

где, в следствие нелинейного дисперсионного закона $\omega = \omega\left(k, |U|^2\right)$, использованы следующие обозначения: $q = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ - параметр линейной дисперсии второго порядка, $\alpha = \frac{\partial \omega}{\partial\left(|U|^2\right)}$ - параметр кубичной нелинейности.

Уравнение (1.1.1) имеет хорошо известное решение в виде солитона [5], которое существует в результате баланса дисперсионного расплывания и нелинейного сжатия волнового пакета:

$$U(\xi,t) = \frac{U_0}{\cosh\left(U_0\sqrt{\frac{\alpha}{q}}\cdot(\xi - Kqt)\right)}\exp\left[i\left(\frac{\alpha}{2}U_0^2 + Kq\right)t + iK\xi\right]. \qquad (1.1.2)$$

Динамика и взаимодействие солитонов (1.1.2) в рамках нелинейного уравнения Шредингера детально исследована в [5,7].

1.2. Протяженные векторные солитоны

Распространение векторного волнового поля $\vec{E} = \vec{e}_1 U(\xi,t)\exp(i\omega t - ik_u\xi) + \vec{e}_2 W(\xi,t)\exp(i\omega t - ik_w\xi)$ значительной протяженности $k_{u,w}L_{u,w} >> 1$, где $L_{u,w} = (U,W)\left(\partial(U,W)/\partial\xi\right)^{-1}$ - характерные пространственные масштабы неоднородности огибающих взаимно ортогональных ($\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$) компонент различной поляризации U и W, и значительной длительности $\omega T_{u,w} >> 1$, где $T_{u,w} = (U,W)\left(\partial(U,W)/\partial t\right)^{-1}$ - характерные временные масштабы изменений U и W, в анизотропных нелинейных средах с дисперсией описывается вторым (квазиоптическим) приближением теории дисперсии нелинейных волн в анизотропных средах. Основным модельным уравнением для медленно меняющихся огибающих компонент U и W различной поляризации в указанном приближении (при учете малого различия волновых чисел этих компонент $|k_u - k_w| << k_{u,w}$) является система двух связанных нелинейных уравнений Шредингера [7-10]:

$$2i\frac{\partial U}{\partial t}+q\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+2\alpha\left(|U|^2+\sigma_\alpha|W|^2\right)U+\alpha\sigma_\alpha W^2U^*=0, \qquad (1.2.1)$$

$$2i\frac{\partial W}{\partial t}+q\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+2\alpha\left(|W|^2+\sigma_\alpha|U|^2\right)W+\alpha\sigma_\alpha U^2WU^*=0, \qquad (1.2.2)$$

где U^*, W^* - комплексно сопряженные к компонентам U и W величины, σ_α - коэффициент перекрестной нелинейной фазовой модуляции между компонентами. В частном случае, для Керровской нелинейности $\sigma_\alpha=\frac{2}{3}$.

При анализе динамики векторных волновых пакетов важными являются характерные соотношения для энергий компонент разной поляризации векторного волнового пакета. Умножая (1.2.1) на U^* (комплексно сопряженную к компоненте U величину), прибавляя к полученному уравнению комплексно сопряженной уравнение, и интегрируя полученное уравнения по пространственной координате ξ от $-\infty$ до ∞ с учетом нулевых условий на бесконечности $(U,W)|_{\xi\to\pm\infty}\to 0$, можно получить закон изменения энергии для поляризационной компоненты U:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|U|^2d\xi=\frac{i}{2}\alpha\sigma_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(WU^*\right)^2-\left(W^*U\right)^2\right]d\xi. \qquad (1.2.3)$$

Аналогично из (1.2.2) можно определить закон (скорость) изменения энергии поляризационной компоненты W:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|W|^2d\xi=\frac{i}{2}\alpha\sigma_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(UW^*\right)^2-\left(U^*W\right)^2\right]d\xi. \qquad (1.2.4)$$

Складывая (1.2.3) и (1.2.4), можно получить закон изменения суммарной энергии векторного волнового пакета:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|U|^2+|W|^2\right)d\xi=0. \qquad (1.2.5)$$

Вычитая (1.2.4) из (1.2.3) при учете фаз φ_u и φ_w поляризационных компонент $U=|U|\exp(i\varphi_u)$ и $W=|W|\exp(i\varphi_w)$, для скорости изменения разницы между энергиями поляризационных компонент можно получить выражение:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|U|^2-|W|^2\right)d\xi=-2\alpha\sigma_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}|U|^2|W|^2\sin\left(2\left(\varphi_w-\varphi_u\right)\right)d\xi. \qquad (1.2.6)$$

Система (1.2.1) – (1.2.2) имеет решение в виде протяженного двухкомпонентного векторного солитона [8,10]:

$$\begin{cases} U(\xi,t)=\dfrac{A_0}{\cosh\left(A_0\sqrt{\dfrac{\alpha}{q}\left(1+\dfrac{3}{2}\sigma_\alpha\right)}\cdot(\xi-Kqt)\right)}\exp\left[i\left(\dfrac{\alpha}{2}\left(1+\dfrac{3}{2}\sigma_\alpha\right)A_0^2+Kq\right)t+iK\xi\right], \\ W=\pm U, \end{cases} \qquad (1.2.7)$$

Кроме того, система (1.2.1) – (1.2.2) имеет решение в виде пары протяженных однокомпонентных (взаимно ортогональных) векторных солитонов [7-9]:

$$\begin{cases} U(\xi,t)=\dfrac{U_0}{\cosh\left(U_0\sqrt{\dfrac{\alpha}{q}}\cdot(\xi-K_uqt)\right)}\exp\left[i\left(\dfrac{\alpha}{2}U_0^2+K_uq\right)t+iK_u\xi\right], \\ W=0 \end{cases} \qquad (1.2.8)$$

и

$$\begin{cases} U=0, \\ W(\xi,t)=\dfrac{W_0}{\cosh\left(W_0\sqrt{\dfrac{\alpha}{q}}\cdot(\xi-K_wqt)\right)}\exp\left[i\left(\dfrac{\alpha}{2}W_0^2+K_wq\right)t+iK_w\xi\right]. \end{cases} \qquad (1.2.9)$$

Взаимодействие таких однокомпонентных протяженных векторных солитонов было детально исследовано ранее в [1].

1.3. Короткие скалярные солитоны

Динамика высокочастотных волновых пакетов $U(\xi,t)\exp(i\omega t-ik\xi)$ малой протяженности $kL\gtrsim 1$ и малой длительности $\omega T\gtrsim 1$ описывается в третьем порядке теории дисперсии нелинейных волн, учитывающим члены третьего порядка: линейную дисперсию третьего порядка $\varepsilon^3\sim\dfrac{\partial^3U}{\partial\xi^3}$, нелинейную

дисперсию $\varepsilon^3 \sim \frac{\partial\left(|U|^2 U\right)}{\partial\xi}$ [11] и вынужденное рассеяние Рамана $\varepsilon^3 \sim U\frac{\partial\left(|U|^2\right)}{\partial\xi}$ [12].

В этом случае основным модельным уравнением в случае изотропных сред является нелинейное уравнение Шредингера третьего порядка [13–19]:

$$2i\frac{\partial U}{\partial t} + 2i\beta\frac{\partial\left(|U|^2 U\right)}{\partial\xi} + \mu_R U\frac{\partial\left(|U|^2\right)}{\partial\xi} + q\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + 2\alpha|U|^2 U + i\gamma\frac{\partial^3 U}{\partial\xi^3} = 0, \qquad (1.3.1)$$

где $\gamma = -\frac{\partial^3\omega}{3\partial k^3}$ - коэффициент линейной дисперсии третьего порядка, β - коэффициент нелинейной дисперсии, μ_R - коэффициент вынужденного рассеяния Рамана. В частном случае, при описании динамики волновых пакетов в метаматериалах (let – handed metamaterials – синтетические волнопроводящие среды с заданными параметрами, в том числе - с отрицательным показателем преломления) в качестве основного модельного уравнения используется нелинейное уравнение Шредингера третьего порядка без учета эффектов вынужденного рассеяния Рамана [20]. В [18, 20] было найдено солитонное решение нелинейного уравнения Шредингера третьего порядка без учета эффектов вынужденного рассеяния Рамана:

$$U(\xi,t) = \frac{A}{\cosh\left(A\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\cdot(\xi - Vt)\right)}\exp(i\Omega t + iK\xi), \qquad (1.3.2)$$

где $K = \frac{q\beta - \alpha\gamma}{2\beta\gamma}$ - дополнительное волновое число, $\Omega = \frac{\alpha\gamma}{2}A^2 - \frac{\alpha\gamma}{2\beta}K^2$ - дополнительная частота скалярного солитона, $V = \frac{\beta}{2}A^2 + Kq - \frac{3}{2}\gamma K^2$ - скорость распространения солитона. Такое солитонное решение существует в результате баланса линейной дисперсии третьего порядка (в результате действия которой волновой пакет «расплывается») и нелинейной дисперсии (в результате действия которой волновой пакет «концентрируется»). Как это было показано в [19], такие короткие скалярные солитоны являются

устойчивыми при условии $\gamma\beta > 0$, при чем это условие так же является и условием существования этих солитонов. Взаимодействие таких солитонов, описываемое в рамках нелинейного уравнения Шредингера третьего порядка, детально описано в [17 – 19]. В [21] описаны в явном виде стационарные волны перепада («кинки», kink – waves) в рамках нелинейного уравнения Шредингера третьего порядка при отсутствии линейной дисперсии третьего порядка. Такие стационарные волновые решения существуют в результате баланса эффектов нелинейной дисперсии («сжимающей» волновой пакет) и вынужденного рассеяния Рамана («растягивающего» волновой пакет).

1.4. Короткие векторные солитоны

Распространение векторного волнового поля $\vec{E} = \vec{e}_1 U(\xi,t)\exp(i\omega t - ik_u\xi) + \vec{e}_2 W(\xi,t)\exp(i\omega t - ik_w\xi)$ с малым характерным пространственным масштабом (порядка нескольких длин волн $k_{u,w}L_{u,w} \gtrsim 1$) и с малым временным масштабом (порядка нескольких периодов $\omega T_{u,w} \gtrsim 1$), в анизотропной нелинейной среде с дисперсией корректно описывается в третьем (аберрационном) приближении теории дисперсии нелинейных волн в анизотропных средах [2]. Это приближение теории дисперсии учитывает перекрестные нелинейные члены третьего порядка: члены перекрестной нелинейной дисперсии - $\varepsilon^3 \sim \frac{\partial(|U|^2 W)}{\partial\xi}$, $\frac{\partial(U^2 W^*)}{\partial\xi}$, $\frac{\partial(W^2 U^*)}{\partial\xi}$, $\frac{\partial(|W|^2 U)}{\partial\xi}$ и члены перекрестного вынужденного рассеяния Рамана - $\varepsilon^3 \sim U\frac{\partial(|W|^2)}{\partial\xi}$, $W\frac{\partial(|U|^2)}{\partial\xi}$, $U\frac{\partial(|U|^2)}{\partial\xi}$, $W^*\frac{\partial(U^2)}{\partial\xi}$, как было показано в [22-24]. Основными модельными уравнениями, описывающими динамику медленно меняющихся огибающих компонент различной поляризации U и W векторного волнового, в этом приближении в случае малого различия между волновыми числами поляризационных компонент $|k_u - k_w| << k_{u,w}$ и

при отсутствии эффектов вынужденного рассеяния Рамана, является система двух связанных нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка [3]:

$$2i\left[\frac{\partial U}{\partial t}+\beta\frac{\partial\left(|U|^2U+\sigma_\beta|W|^2U\right)}{\partial\xi}+\frac{\beta\sigma_\beta}{2}\frac{\partial\left(W^2U^*\right)}{\partial\xi}\right]$$
$$+q\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+2\alpha\left(|U|^2+\sigma_\alpha|W|^2\right)U+\alpha\sigma_\alpha W^2U^*+i\gamma\frac{\partial^3U}{\partial\xi^3}=0, \qquad (1.4.1)$$

$$2i\left[\frac{\partial W}{\partial t}+\beta\frac{\partial\left(|W|^2W+\sigma_\beta|U|^2W\right)}{\partial\xi}+\frac{\beta\sigma_\beta}{2}\frac{\partial\left(U^2W^*\right)}{\partial\xi}\right]$$
$$+q\frac{\partial^2W}{\partial\xi^2}+2\alpha\left(|W|^2+\sigma_\alpha|U|^2\right)W+\alpha\sigma_\alpha U^2W^*+i\gamma\frac{\partial^3W}{\partial\xi^3}=0, \qquad (1.4.2)$$

где σ_β - коэффициент перекрестной нелинейной дисперсии.

Опишем закон изменения энергии взаимно ортогональных компонент волнового поля малой протяженности, следующий из (1.4.1) – (1.4.2). Умножим (1.4.1) на U^* (комплексно сопряженную к U величину). Прибавим к полученному уравнению комплексно сопряженное уравнение. Проинтегрируем полученное уравнение по координате ξ от $-\infty$ до ∞ с учетом нулевых условий для волнового поля на бесконечности $(U,W)|_{\xi\to\pm\infty}\to 0$. В результате описанных действий получим выражение, описывающее скорость изменения энергии поляризационной компоненты U:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|U|^2d\xi=-\frac{\beta\sigma_\beta}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[4|U|^2\frac{\partial|W|^2}{\partial\xi}+\left(U^*\right)^2\frac{\partial\left(W^2\right)}{\partial\xi}+U^2\frac{\partial\left(W^*\right)^2}{\partial\xi}\right]d\xi+$$
$$\frac{i}{2}\alpha\sigma_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(WU^*\right)^2-\left(W^*U\right)^2\right]d\xi. \qquad (1.4.3)$$

Аналогично, из уравнения (1.4.2) получим выражение, описывающее скорость изменения энергии поляризационной компоненты W:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|W|^2 d\xi = -\frac{\beta\sigma_\beta}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[4|W|^2\frac{\partial|U|^2}{\partial\xi}+\left(W^*\right)^2\frac{\partial\left(U^2\right)}{\partial\xi}+W^2\frac{\partial\left(U^*\right)^2}{\partial\xi}\right]d\xi + \frac{i}{2}\alpha\sigma_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(UW^*\right)^2-\left(U^*W\right)^2\right]d\xi. \quad (1.4.4)$$

Из уравнений (1.4.3) – (1.4.4) следует, что распространение коротких волновых пакетов определенной поляризации в присутствии волнового поля другой поляризации сопровождается взаимным переносом энергии между компонентами волнового поля различной поляризации. Суммируя энергии компонент волнового поля различной поляризации, т.е. складывая (1.4.3) и (1.4.4), получим закон сохранения суммарной энергии векторного волнового пакета:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|U|^2+|W|^2\right)d\xi = 0. \quad (1.4.5)$$

С другой стороны, вычитая (1.4.3) из (1.4.4), и учитывая комплексность поляризационных компонент волнового поля $U=|U|\exp(i\varphi_u)$ и $W=|W|\exp(i\varphi_w)$, получим для скорости изменения разности между энергиями поляризационных компонент выражение:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|U|^2-|W|^2\right)d\xi &= 2\beta\sigma_\beta\int_{-\infty}^{\infty}|U|^2\frac{\partial|W|^2}{\partial\xi}d\xi - \\ &\beta\sigma_\beta\int_{-\infty}^{\infty}|U|^2\frac{\partial|W|^2}{\partial\xi}\cos(2(\varphi_w-\varphi_u))d\xi + \\ &\beta\sigma_\beta\int_{-\infty}^{\infty}|U|^2|W|^2\left(\frac{\partial\varphi_w}{\partial\xi}-\frac{\partial\varphi_u}{\partial\xi}\right)\sin(2(\varphi_w-\varphi_u))d\xi - \\ &2\alpha\sigma_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}|U|^2|W|^2\sin(2(\varphi_w-\varphi_u))d\xi.\end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Первые три члена в правой части (1.4.6) соответствуют эффектам перекрестной нелинейной дисперсии, а последний член в правой части (1.4.6) соответствует эффекту перекрестной фазовой модуляции. Кроме того, первый член в правой части (1.4.6) описывает амплитудный эффект

взаимодействия поляризационных компонент волнового поля, другие члены в этом выражении описывают фазовые эффекты взаимодействия.

Система двух связанных нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка (1.4.1) – (1.4.2) имеет двухкомпонентное решение в виде короткого векторного солитона [3]:

$$\begin{cases} U(\xi,t) = \dfrac{A_0}{\cosh\left(A_0\sqrt{\dfrac{\beta(2+3\sigma_\beta)}{2\gamma}}\cdot(\xi - V_{u,w}t)\right)}\exp(i\Omega_{u,w}t + iK\xi), \\ W = \pm U, \end{cases} \tag{1.4.7}$$

где $\Omega_{u,w} = \dfrac{\alpha\gamma}{2}\left(1+\dfrac{3}{2}\sigma_\alpha\right)A_0^2 - \dfrac{\alpha\gamma}{2\beta}K^2$ - дополнительные частоты компонент различной поляризации короткого векторного солитона, K - волновое число короткого векторного солитона (одинаковое для компонент U и V), $V_{u,w} = \dfrac{\beta}{2}\left(1+\dfrac{3}{2}\sigma_\beta\right)A_0^2 + Kq - \dfrac{3}{2}\gamma K^2$ - скорость короткого векторного солитона.

С другой стороны, система уравнений (1.4.1) – (1.4.2) имеет два решения в виде коротких однокомпонентных (взаимно ортогональных) векторных солитонов различной поляризации [3]:

$$\begin{cases} U(\xi,t) = \dfrac{A_u}{\cosh\left(A_u\sqrt{\dfrac{\beta}{\gamma}}\cdot(\xi - V_u t)\right)}\exp(i\Omega_u t + iK\xi), \\ W = 0 \end{cases} \tag{1.4.8}$$

и

$$\begin{cases} U = 0, \\ W(\xi,t) = \dfrac{A_w}{\cosh\left(A_w\sqrt{\dfrac{\beta}{\gamma}}\cdot(\xi - V_2 t)\right)}\exp(i\Omega_w t + iK\xi), \end{cases} \tag{1.4.9}$$

где $A_{u,w}$ - амплитуды солитонов, $\Omega_{u,w} = \dfrac{\alpha\gamma}{2}A_{u,w}^2 - \dfrac{\alpha\gamma}{2\beta}K^2$ - добавочные частоты векторных однокомпонентных солитонов различной поляризации,

$V_{u,w} = \frac{\beta}{2} A_{u,w}^2 + Kq - \frac{3}{2}\gamma K^2$ - скорости солитонов различной поляризации. Такие однокомпонентные солитонные решения по-отдельности являются точными решениями скалярного (не связанного) уравнения Шредингера третьего порядка [17-19]. Как было показано в [19], такие короткие однокомпонентные (ранее названные скалярными) солитоны являются устойчивыми относительно малых возмущений при выполнении условия $\gamma\beta > 0$, которое является условием существования этих солитонов. В наших дальнейших исследованиях мы будем рассматривать только те значения коэффициентов модельных уравнений, при которых это условие существования и устойчивости однокомпонентных коротких солитонов выполнено.

Данная работа посвящена исследованию взаимодействия однокомпонентных солитонов (1.4.8) – (1.4.9). В исследовании использовался аналитический метод адиабатического приближения и, для проверки корректности аналитического метода, численный эксперимент.

Часть результатов данных исследований была получена в работе [25].

2. Взаимодействие коротких векторных однокомпонентных солитонов

Рассмотрим начальную задачу взаимодействия двух коротких векторных однокомпонентных (различной поляризации) солитонов огибающей. Пусть, в начальный момент времени $t=0$ в анизотропной среде находятся два взаимно ортогональных векторных солитона различной поляризации, с различными амплитудами и при начальном расстоянии ξ_0 между центрами этих солитонов:

$$U(\xi,t=0)=\frac{A_u(0)}{\cosh(A_u(0)\varepsilon(\xi-\xi_0))}\exp(iK\xi),$$
$$W(\xi,t=0)=\frac{A_w(0)}{\cosh(A_w(0)\varepsilon\xi)}\exp(iK\xi), \tag{2.1}$$

где ξ_0 -начальное расстояние между солитонами и использовано обозначение $\varepsilon=\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$. Предположим, что при взаимодействии параметры солитонов изменяются медленно и, в таком случае, решение, описывающее взаимодействующие солитоны при $t>0$ может быть описано в адиабатическом приближении:

$$U(\xi,t)=\frac{A_u(t)}{\cosh\left[A_1(t)\varepsilon\left(\xi-\xi_0-\int_0^t V_u(\tilde{t})d\tilde{t}\right)\right]}\exp\left\{i\int_0^t \Omega_u(\tilde{t})d\tilde{t}+iK\xi\right\},$$
$$W(\xi,t)=\frac{A_w(t)}{\cosh\left[A_w(t)\varepsilon\left(\xi-\int_0^t V_w(\tilde{t})d\tilde{t}\right)\right]}\exp\left\{i\int_0^t \Omega_w(\tilde{t})d\tilde{t}+iK\xi\right\}, \tag{2.2}$$

где $\Omega_{u,w}(t)=\frac{\alpha\gamma}{2}A_{u,w}^2(t)-\frac{\alpha\gamma}{2\beta}K^2$ - дополнительные частоты взаимодействующих векторных солитонов различной поляризации в момент времени t, $V_{u,w}(t)=\frac{\beta}{2}A_{u,w}^2(t)+Kq-\frac{3}{2}\gamma K^2$ - скорости взаимодействующих однокомпонентных солитонов различной поляризации в момент времени t. Соответственно расстояние между центрами взаимодействующих солитонов изменяется по следующему закону:

$$\Delta\xi = \xi_0 + \int_0^t \left(V_u(\tilde{t}) - V_w(\tilde{t})\right) d\tilde{t} = \xi_0 + \frac{\beta C_0}{2} \int_0^t \Delta A(\tilde{t}) d\tilde{t}\,, \tag{2.3}$$

где $\Delta A = A_u - A_w$ - различие между амплитудами взаимодействующих однокомпонентных солитонов, обозначение C_0 объясняется ниже в (2.5).

Так же можно описать различие между фазами взаимодействущих солитонов различной поляризации:

$$\varphi_u - \varphi_w = \int_0^t \left(\Omega_u(\tilde{t}) - \Omega_w(\tilde{t})\right) d\tilde{t} = \frac{1}{2}\alpha\gamma C_0 \int_0^t \Delta A(\tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}\left(\Delta\xi - \xi_0\right). \tag{2.4}$$

Подставляя (2.2) в закон сохранения энергии (1.4.5), получим соотношение, связывающее между собой амплитуды взаимодействующих солитонов:

$$A_u(t) + A_w(t) = A_1(0) + A_2(0) = C_0\,. \tag{2.5}$$

Дифференцируя (2.3) по времени и подставляя полученное выражение в (1.4.6), получим систему уравнений, описывающую траектории взаимного движения взаимодействующих солитонов различной поляризации:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Delta A}{dt} = \frac{3\varepsilon\beta\sigma_\beta\left(C_0^2 - (\Delta A)^2\right)}{16\cosh^2\left((C_0 + \Delta A)\varepsilon\Delta\xi/2\right)}\left[2 - \cos\left(2\frac{\alpha\gamma}{\beta}\left(\Delta\xi - \xi_0\right)\right)\right]\times \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh\eta\, d\left(\tanh\eta\right)}{\cosh^2(\delta\eta)\left[1 - \tanh(\delta\eta)\cdot\tanh\left((C_0 + \Delta A)\varepsilon\Delta\xi/2\right)\right]^2} + \\
&\frac{\alpha\sigma_\alpha}{8}\left(C_0^2 - (\Delta A)^2\right)^2 \sin\left(2(q - 2K\gamma)(\Delta\xi - \xi_0)\right)\times \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\cosh^2\left((C_0 - \Delta A)\varepsilon\xi/2\right)\cosh^2\left((C_0 + \Delta A)\varepsilon(\xi - \Delta\xi)/2\right)},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\frac{d\Delta\xi}{dt} = \frac{\beta C_0}{2}\Delta A\,, \tag{2.7}$$

где использовано обозначение $\delta = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{C_0 + \Delta A}{C_0 - \Delta A}$.

В дальнейших исследованиях будем рассматривать взаимодействующие короткие однокомпонентные солитоны с малым различием амплитуд $|\Delta A| << C_0$. В таком случае, учитывая в правой части (2.6) $\delta \approx 1$, получаем систему уравнений, описывающую траектории взаимного движения взаимодействующих однокомпонентных солитонов:

$$\frac{da}{d\tau}=\sigma_\beta\frac{\left(3\rho-3\tanh\rho-\rho\cdot\tanh^2\rho\right)}{\tanh^4\rho\cosh^2\rho}\left(6-4\sin^2 p\left(\rho_0-\rho\right)\right)-$$
$$\sigma_\alpha p\frac{4\left(\rho-\tanh\rho\right)}{\tanh^3\rho\cosh^2\rho}\sin\left(2p\left(\rho_0-\rho\right)\right), \qquad (2.8)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau}=a \qquad (2.9)$$

где $\rho=A_0\varepsilon\Delta\xi$, $\rho_0=A_0\varepsilon\xi_0$, $\tau=t\cdot A_0^3\varepsilon\beta$, $a=\frac{\Delta A}{A_0}$, $p=\frac{\alpha\gamma}{A_0\varepsilon\beta}$.

2.1. Взаимодействие векторных солитонов без фазовых эффектов

В частном случае, при $p=0$ (в отсутствии кубичной нелинейности, или линейной дисперсии третьего порядка), члены, учитывающие различие в фазе исходного взаимного расположения взаимодействующих солитонов, в уравнении (2.8) исчезают. Тогда система уравнений (2.8) – (2.9) после замены переменных $\tau'=\tau\sqrt{\sigma_\beta}$ и $a'=\frac{a}{\sqrt{\sigma_\beta}}$ (для простоты записи, в дальнейшем штрихи будут опущены) приобретает новый вид:

$$\frac{da}{d\tau}=6\frac{\left(3\rho-3\tanh\rho-\rho\cdot\tanh^2\rho\right)}{\tanh^4\rho\cosh^2\rho}, \qquad (2.1.1)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau}=a\,. \qquad (2.1.2)$$

В этом случае для описания фазовых траекторий системы (2.1.1) – (2.1.2) возможно получить точное выражение:

$$a^2+12\frac{\rho-\tanh\rho}{\cosh^2\rho\cdot\tanh^3\rho}=a_{\pm\infty}^2, \qquad (2.1.3)$$

где $a_{\pm\infty}$ - начальное различие амплитуд взаимодействующих однокомпонентных солитонов на достаточно большом расстоянии $|\rho|>>1$. На Рис.2.1.1 показана фазовая плоскость системы уравнений (2.1.1) – (2.1.2) (графики, описываемые (2.1.3)). В данном случае система (2.1.1) – (2.1.2)

имеет только одно состояние равновесия с координатами $a = 0$, $\rho = 0$ - седло.

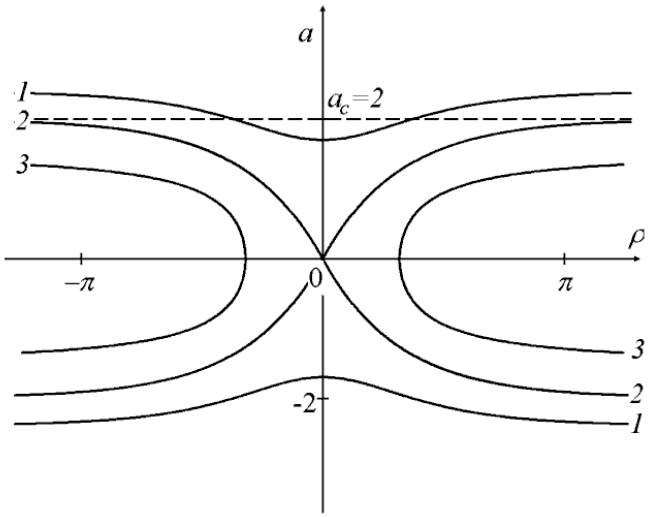

Рис. 2.1.1. Фазовая плоскость системы уравнений (2.1.1) – (2.1.2).

Здесь кривые 1 соответствуют взаимному прохождению взаимодействующих солитонов друг через друга (реализуются при достаточно большом различии начальных амплитуд взаимодействующих солитонов). Кривые 2 – сепаратрисы седла, соответствуют бесконечно долгому сближению взаимодействующих однокомпонентных солитонов с выравниванием их амплитуд (реализуются при критическом различие начальных амплитуд солитонов). Критическое различие начальных амплитуд солитонов $a_c = a_\infty$ для траектории 2 («интервал взаимного отражения») в следствие выражения (2.1.3) равен: $|a_c| = 2$. Кривые 3 соответствуют взаимному отражению солитонов друг от друга (реализуются при начальном различии амплитуд солитонов меньшем критического).

Движение изображающей точки по траекториям этого фазового пространства всегда происходит: в верхней полуплоскости – слева на право, а в нижней полуплоскости – справа на лево.

При попадании начальных условий (начальных значений величин ρ и a) в рассматриваемом фазовом пространстве между сепаратрисами седла, фазовая траектория пересекает горизонтальную ось и движение по фазовой

траектории меняет направление на противоположное. Т.е. в таком случае взаимодействующие солитоны не перекрываются, отталкиваются друг от друга и окончательно расходятся при некотором предельном расстоянии сближения. Это случай взаимного отражения солитонов.

В случае, если начальное различие амплитуд взаимодействующих солитонов (которое задается начальным значением величины a), превышает соответствующее для сепаратрисы седла критическое значение, то начальные условия определяют траекторию, проходящую из области отрицательных расстояний между солитонами в область положительных расстояний (или наоборот – из области положительных в область отрицательных). Такое поведение фазовой траектории означает сближение взаимодействующих солитонов, прохождение друг через друга, и окончательное расхождение. Это случай взаимного прохождения солитонов.

При начальных условиях, задающих точку точно на сепаратрисе седла, солитоны сближаются бесконечно долго (т.к. чем ближе солитоны друг к другу, тем меньше различие их амплитуд и тем меньше скорость их сближения) и через бесконечно большой отрезок времени полностью перекрываются и далее двигаются совместно. Однако, при даже бесконечно малом отличие начальных условий от оговоренных, происходит или взаимное отражение, или взаимное прохождение солитонов.

В случае взаимного отражения анализ (2.1.3) позволяет определить минимальное расстояние сближения солитонов. Учитывая, что различие амплитуд солитонов $a = 0$ при минимальном $\rho = \rho_{\min}$, рассмотрим два предельных случая.

При $\left|a_{\pm\infty}\right| \sim a_c = 2$, но $a_{\pm\infty} < a_c$ (случай взаимного отражения), можно считать $\rho_{\min} << 1$ и использовать для гиперболических функций в (2.1.3) асимптотическое разложение Тейлора – Маклорена. Тогда из (2.1.3) получим $\rho_{\min}^2 = \frac{5}{12}\left(4 - a_{\pm\infty}^2\right)$. Например: $\left|\rho_{\min}\right| \approx 0.4$ при $\left|a_{\pm\infty}\right| = 1.9$.

При малых $\left|a_{\pm\infty}\right| << 1$ можно считать $\left|\rho_{\min}\right| >> 1$ и использовать в (2.1.3) для гиперболических функций предельные выражения, которые приводят к уравнению $\frac{4\cdot(\rho-1)}{e^{2\rho}} = \frac{a_{\pm\infty}^2}{12}$. Здесь $\left|\rho_{\min}\right| \to \infty$ при $\left|a_{\pm\infty}\right| \to 0$. Например: $\left|\rho_{\min}\right| \approx 5$ при $\left|a_{\pm\infty}\right| = 0.1$, или $\left|\rho_{\min}\right| \approx 7.5$ при $\left|a_{\pm\infty}\right| = 0.01$.

2.2. Взаимодействие векторных солитонов без перекрестной фазовой модуляции.

В частном случае, при $\sigma_\alpha = 0$ система уравнений (2.8) – (2.9) после преобразований переменных $\tau' = \tau\sqrt{\sigma_\beta}$ и $a' = \frac{a}{\sqrt{\sigma_\beta}}$ приводится к виду (в дальнейшей записи штрихи будем опускать):

$$\frac{da}{d\tau} = 6\frac{\left(3\rho - 3\tanh\rho - \rho\cdot\tanh^2\rho\right)}{\tanh^4\rho\cdot\cosh^2\rho} - 4\sin^2 p\left(\rho_0 - \rho\right)\frac{\left(3\rho - 3\tanh\rho - \rho\cdot\tanh^2\rho\right)}{\tanh^4\rho\cdot\cosh^2\rho}, \quad (2.2.1)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = a. \quad (2.2.2)$$

Эта система имеет единственное состояние равновесия седлового типа с координатами $a = 0$, $\rho = 0$.

На рисунке Рис.2.2.1. приведены фазовые портреты системы (2.2.1) – (2.2.2) при $p = 1$ и разных значениях фазы исходного взаимного расположения взаимодействующих солитонов: $\rho_0 = \pi k$, $\rho_0 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $\rho_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $\rho_0 = \frac{3\pi}{4} + \pi k$. Изменение величины p не меняет качественно поведение фазовых траекторий системы.

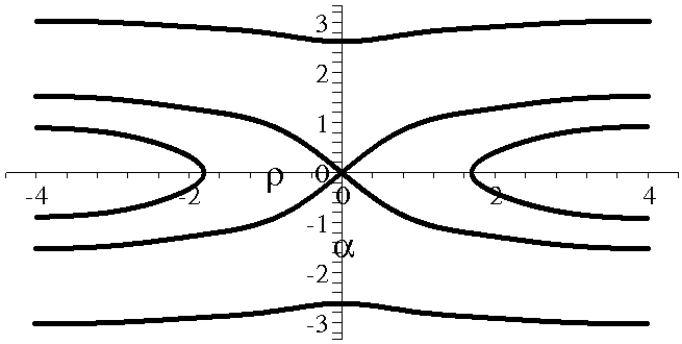

Рис.2.2.1.a. Фазовая плоскость системы (2.2.1) – (2.2.2)

при $p = 1$ и исходном расстоянии между солитонами $\rho_0 = \pi k$.

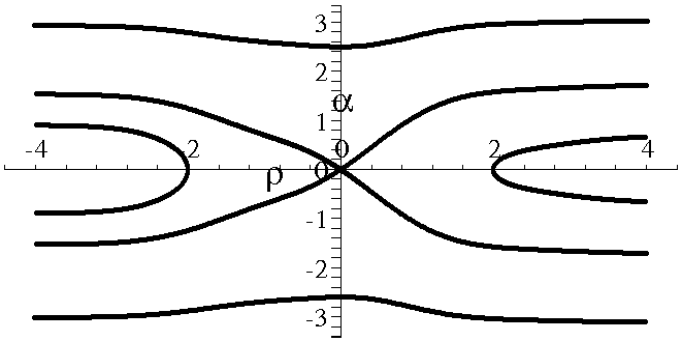

Рис.2.2.1.b. Фазовая плоскость системы (2.2.1) – (2.2.2)

при $p = 1$ и исходном расстоянии между солитонами $\rho_0 = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

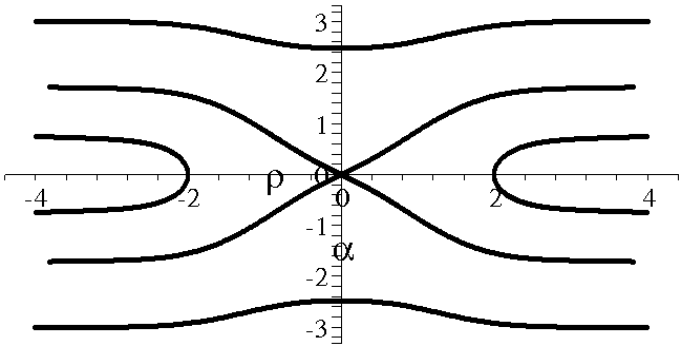

Рис.2.2.1.c. Фазовая плоскость системы (2.2.1) – (2.2.2)

при $p = 1$ и исходном расстоянии между солитонами $\rho_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

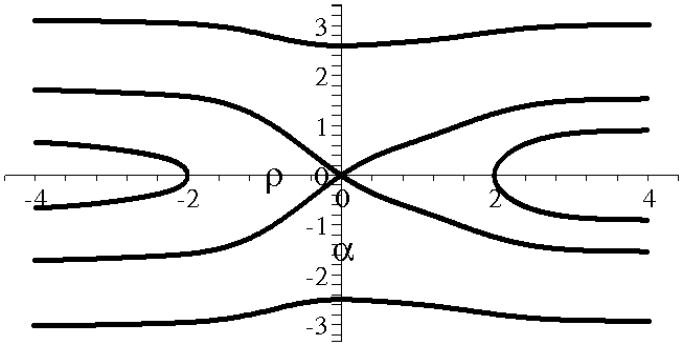

Рис.2.2.1.d. Фазовая плоскость системы (2.2.1) – (2.2.2)

при $p=1$ и исходном расстоянии между солитонами $\rho_0 = \frac{3\pi}{4} + \pi k$.

Движение изображающей точки по траекториям этого фазового пространства всегда происходит: в верхней полуплоскости – слева на право, а в нижней полуплоскости – справа на лево.

Изменение величины $2p\rho_0$ приводит лишь к изменению «интервала отражения» - максимального расстояния от сепаратрис седла до горизонтальной оси. При изменении $2p\rho_0$ от 0 до $\pi/2$ «интервал» справа от начала координат увеличивается быстрее, чем слева. При изменении $2p\rho_0$ от $\pi/2$ до π «интервалы» слева и справа от начала координат выравниваются. А при изменении $2p\rho_0$ от π до 2π фазовый портрет плавно возвращается в исходное состояние (с зеркальной заменой лево – право относительно изменения $2p\rho_0$ от 0 до π).

При попадании начальных условий в рассматриваемом фазовом пространстве между сепаратрисами седла, фазовая траектория пересекает горизонтальную ось и движение по фазовой траектории меняет направление на противоположное. Т.е. в таком случае взаимодействующие солитоны не перекрываются, отталкиваются друг от друга и окончательно расходятся при некотором предельном расстоянии сближения. Это случай взаимного отражения солитонов.

В случае, если начальное различие амплитуд взаимодействующих солитонов (которое задается начальным значением величины a), превышает

соответствующее для сепаратрисы седла значение, то начальные условия определяют траекторию, проходящую из области отрицательных расстояний между солитонами в область положительных расстояний (или наоборот – из области положительных в область отрицательных). Такое поведение фазовой траектрии означает сближение взаимодействующих солитонов, прохождение друг через друга, и окончательное расхождение.

При начальных условиях, задающих точку точно на сепаратрисе седла, солитоны сближаются бесконечно долго (т.к. чем ближе солитоны друг к другу, тем меньше различие их амплитуд и тем меньше скорость их сближения) и через бесконечно большой отрезок времени полностью перекрываются и далее двигаются совместно. Однако, при любом, сколь угодно малом, отклонении точки на фазовом портрете от сепаратрисы седла, солитны попадают или в режим взаимного отражения, или в режим прохождения солитонов друг через друга. Т.е. такой «сепаратрисный» способ взаимодействия является негрубым.

В рассматриваемых случаях, интегрируя систему (2.2.1) – (2.2.2) при условии отсутствия различия амплитуд солитонов в состоянии равновесия $a(\rho=0)=0$, возможно определить «интервалы отражения» по начальному различию амплитуд взаимодействующих однокомпонентных солитонов – расстояния от сепаратрис (отдельно при $\rho\to+\infty$ и при $\rho\to-\infty$) до горизонтальной оси. Эти расстояния описываются выражением $a_{\pm\infty}^2=4-\Phi_{\pm}(p\rho_0)$, где

$$\Phi_{\pm}(p\rho_0)=8\int_0^{\pm\infty}\sin^2\left(p(\rho_0-\rho)\right)\frac{\left(3\rho-3\tanh\rho-\rho\cdot\tanh^2\rho\right)}{\tanh^4\rho\cdot\cosh^2\rho}d\rho\,.$$

Графики $a_+^2(p\rho_0)$ при разных значениях фаз исходного взаимного расположения взаимодействующих солитонов $2p\rho_0=0$, $2p\rho_0=\pi/2$, $2p\rho_0=\pi$ и $2p\rho_0=3\pi/2$, приведены на Рис.2.2.2.

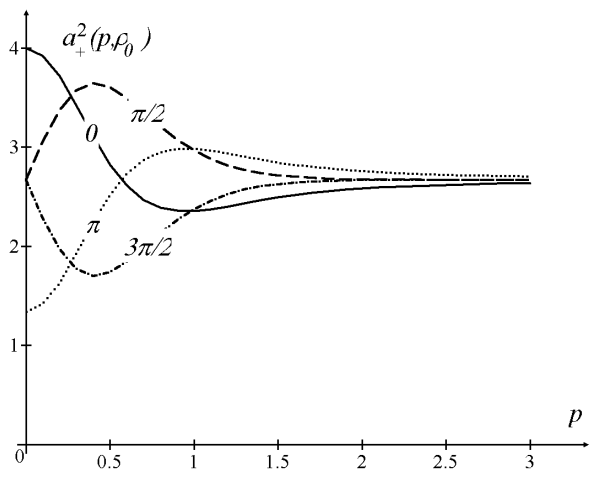

Рис.2.2.2. $a_+^2(p\rho_0)$ при разных значениях $2p\rho_0$.

Значения квадратов «интервала отражения» при $\rho \to -\infty$: $a_-^2(p\rho_0 = 0) = a_+^2(p\rho_0 = 0)$, $a_-^2(p\rho_0 = \pi) = a_+^2(p\rho_0 = \pi)$, $a_-^2\left(p\rho_0 = \frac{\pi}{2}\right) = a_+^2\left(p\rho_0 = \frac{3\pi}{2}\right)$ и $a_-^2\left(p\rho_0 = \frac{3\pi}{2}\right) = a_+^2\left(p\rho_0 = \frac{\pi}{2}\right)$. Значение $a_\pm^2(p\rho_0)$ ограничено и стремится к значению ≈ 2.66 при $p > 3$. Соответственно, интервал отражения $|a_{\pm\infty}| < 2$ всегда (т.е. меньше описанного в разделе **2.1** при $p = 0$ интервала отражения) и стремится к $|a_{\pm\infty}| \approx 1.63$ при больших значениях p.

В частности, при указанных на Рис.2.2.1.(a,b,c,d) случаях: $|a_{\pm\infty}| \approx 1.53$ при $2p\rho_0 = 0$; $|a_{+\infty}| \approx 1.72$ и $|a_{-\infty}| \approx 1.54$ при $2p\rho_0 = \pi/2$; $|a_{\pm\infty}| \approx 1.73$ при $2p\rho_0 = \pi$; $|a_{+\infty}| \approx 1.54$ и $|a_{-\infty}| \approx 1.72$ при $2p\rho_0 = 3\pi/2$.

С другой стороны, в случае взаимного отражения, интегрируя (2.2.1) – (2.2.2), можно определить минимальное расстояние сближения солитонов $\rho_{\min}$. При условии отсутствия различия амплитуд солитонов при минимальном расстоянии сближения солитонов $a(\rho_{\min}) = 0$ и интегрируя в пределах от $\rho_{\pm\min}$ до $\pm\infty$, имеем:

$$a^2_{\pm\infty,\lim} = 12\frac{\rho_{\pm\min} - \tanh(\rho_{\pm\min})}{\tanh^3(\rho_{\pm\min})\cdot\cosh^2(\rho_{\pm\min})} -$$
$$8\int\limits_{\rho_{\pm\min}}^{\pm\infty} \sin^2(p(\rho_0-\rho))\frac{(3\rho - 3\tanh\rho - \rho\cdot\tanh^2\rho)}{\tanh^4\rho\cdot\cosh^2\rho}d\rho.$$

К сожалению, аналитически проинтегрировать полученное выражение не удается. Однако, используя это выражение, можно, задавая конкретное значение $\rho_{\pm\min}$, численно рассчитать соответствующую величину $|a_{\pm\infty,\lim}|$. Например для приведенных на Рис.2.2.1.a,b,c,d случаев, при $|\rho_{\pm\min}| = 0.1$ имеем для $2p\rho_0 = 0$ - $|a_{\pm\infty,\lim}| \approx 1.53$; для $2p\rho_0 = \pi/2$ - $|a_{+\infty,\lim}| \approx 1.71$ и $|a_{-\infty,\lim}| \approx 1.54$; для $2p\rho_0 = \pi$ - $|a_{\pm\infty,\lim}| \approx 1.72$; для $2p\rho_0 = 3\pi/2$ - $|a_{+\infty,\lim}| \approx 1.54$ и $|a_{-\infty,\lim}| \approx 1.71$. Или, при $|\rho_{\pm\min}| = 5$ имеем для $2p\rho_0 = 0$ - $|a_{\pm\infty,\lim}| \approx 0.074$; для $2p\rho_0 = \pi/2$ - $|a_{+\infty,\lim}| \approx 0.062$ и $|a_{-\infty,\lim}| \approx 0.088$; для $2p\rho_0 = \pi$ - $|a_{\pm\infty,\lim}| \approx 0.078$; для $2p\rho_0 = 3\pi/2$ - $|a_{+\infty,\lim}| \approx 0.088$ и $|a_{-\infty,\lim}| \approx 0.062$.

2.3. Взаимодействие векторных солитонов без перекрестной нелинейной дисперсии

В частном случае, при $\sigma_\beta = 0$ система уравнений (2.8) – (2.9) после преобразования переменных $\tau' = \tau\sqrt{\sigma_\alpha}$, $a' = \frac{a}{\sqrt{\sigma_\alpha}}$ принимает новый вид (в дальнейшей записи штрихи будем опускать):

$$\frac{da}{d\tau} = -4p\cdot\sin(2p(\rho_0-\rho))\frac{(\rho - \tanh\rho)}{\tanh^3\rho\cdot\cosh^2\rho}, \tag{2.3.1}$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = a. \tag{2.3.2}$$

Эта система имеет бесконечно много эквидистантных состояний равновесия с нулевым различием амплитуд взаимодействующих солитонов $a = 0$: при $\rho = 2k\cdot\pi/(2p) + \rho_0$ – седлового типа, и $\rho = (2k+1)\cdot\pi/(2p) + \rho_0$ – центры. На рисунке Рис.2.3.1.(a,b,c,d) приведены фазовые портреты системы (2.3.1) –

(2.3.2) при $p=1$ и разных значениях фазы исходного взаимного расположения взаимодействующих солитонов: $2p\rho_0 = 2\pi k$, $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $2p\rho_0 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$. (Из состояний равновесия указаны только достаточно близкие к началу координат седла). Изменение величины p не меняет качественно поведение фазовых траекторий системы (пропорционально меняет координаты состояний равновесия и меняет величину «интервала отражения» по величине начального различия амплитуд солитонов).

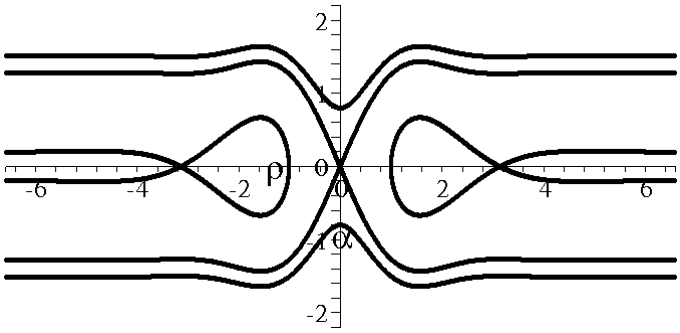

Рис.2.3.1.a. Фазовая плоскость системы (2.3.1) – (2.3.2)

при $p=1$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0 = 2\pi k$.

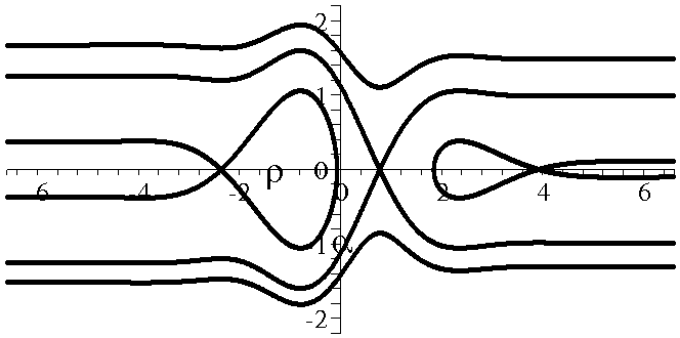

Рис.2.3.1.b. Фазовая плоскость системы (2.3.1) – (2.3.2)

при $p=1$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

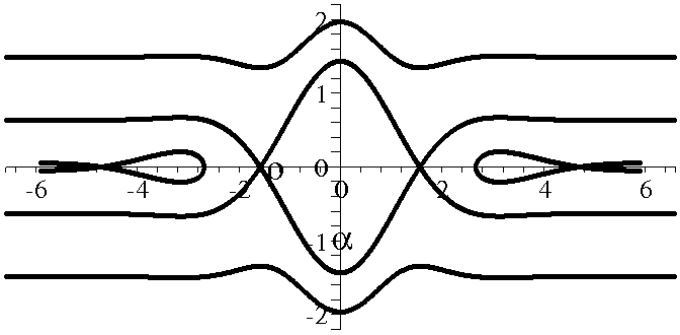

Рис.2.3.1.c. Фазовая плоскость системы (2.3.1) – (2.3.2)

при $p=1$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

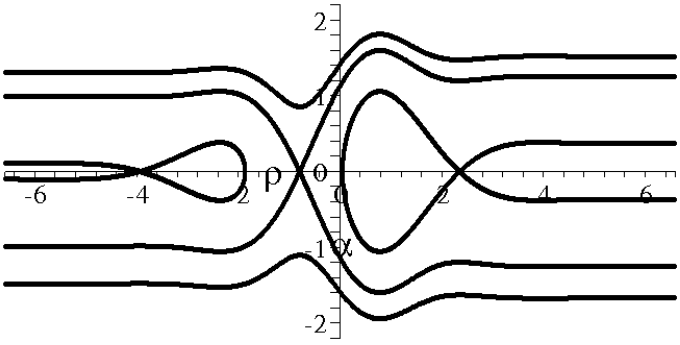

Рис.2.3.1.d. Фазовая плоскость системы (2.3.1) – (2.3.2)

при $p=1$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

Движение изображающей точки по траекториям этого фазового пространства всегда происходит: в верхней полуплоскости – слева на право, а в нижней полуплоскости – справа на лево.

Как видно из приведенных фазовых портретов, существует одно качественно выделенное состояние равновесия ($\rho - saddle$) – ближайшее к началу координат седло, не имеющее петель сепаратрис. Лишь при $2p\rho_0 = \pi$ (Рис.2.3.1.c.) таких седел два, и они имеют связанные между собой общие сепаратрисы.

При изменении величины $2p\rho_0$ от *0* до $\pi/2$ выделенное седло смещается от начала координат вправо, при этом максимальное расстояние от сепаратрис этого седла до горизонтальной оси, т.е. - «интервал отражения» (и размах по вертикали петель сепаратрис других седел) справа –

уменьшается, а слева – увеличивается. При изменении $2p\rho_0$ от $\pi/2$ до π выделенное седло продолжает сдвигаться вправо, «интервалы отражения» и слева и справа от выделенного седла одновременно уменьшаются и, при достижении π, становятся равны. При $2p\rho_0 = \pi$ сепаратрисы выделенного седла слипаются с петлей сепаратрис седла, расположенного слева, образуя связки сепаратрис. При дальнейшем увеличении величины $2p\rho_0$, связки сепарартис разрываются, оставляя выделенное седло слева от начала координат и седло с петлей сепаратрис справа от начала координат. Далее, с изменением $2p\rho_0$ от π до 2π, фазовый портрет плавно возвращается в исходное состояние, полностью повторяя изменения траекторий при изменении значений $2p\rho_0$ от 0 до π с зеркальной заменой лево – право.

Все седла определяют (при попадании начальных условий по величинам a и ρ между соответствующими сепаратрисами) предельное расстояние сближения взаимодействующих солитонов. Но именно выделенное седло определяет наименьшее предельное расстояние сближения. В случаях, когда это выделенное седло отклоняется от начала координат, возможно, что это расстояние имеет иной знак по сравнению с начальным расстоянием. Т.е. при взаимном *отражении* солитоны могут сближаясь и взаимодействуя пройти друг через друга, разойтись на конечное расстояние, опять начать движение навстречу друг другу, пройти друг через друга уже в обратном направлении и окончательно отразиться. Такое неожиданное поведение при взаимодействии возможно, например, при $2p\rho_0 = \pi/2$ (см. Рис.2.3.1.b.) при движении по фазовым траекториям между сепаратрисами выделенного седла из области отрицательных начальных расстояний между солитонами, или при $2p\rho_0 = 3\pi/2$ (см. Рис.2.3.1.d.) при движении по фазовым траекториям из области положительных начальных расстояний.

С другой стороны, при попадании начальных условий между сепаратрисами любого невыделенного седла, фазовая траектория пересекает

горизонтальную ось и движение по фазовой траектории меняет направление на противоположное не достигая соответствующего седла. Т.е. в таком случае взаимодействующие солитоны не перекрываются, отталкиваются друг от друга и окончательно расходятся при предельном расстоянии сближения существенно превышающем единицу (возможно, и существенно превышающем ширину солитона – при рассмотрении седла, далеко отстоящего от начала координат).

В случае, если начальное различие амплитуд взаимодействующих солитонов (начальное значение величины a) превышает соответствующее для сепаратрисы выделенного седла значение, то начальные условия определяют траекторию, проходящую из области отрицательных расстояний между солитонами в область положительных расстояний (или наоборот – из области положительных в область отрицательных). Такое поведение фазовой траектории означает сближение взаимодействующих солитонов, прохождение друг через друга, и окончательное расхождение.

При начальных условиях, задающих точку точно на сепаратрисе любого седла, солитоны сближаются бесконечно долго (т.к. чем ближе солитоны друг к другу, тем меньше различие их амплитуд и тем меньше скорость их сближения). Тогда, через бесконечный отрезок времени солитоны оказываются на расстоянии, равном координате седла, и далее двигаются без изменения взаимного положения. Однако, такой способ взаимодействия является неустойчивым относительно малых изменений начальных условий. Т.е. при любом, сколь угодно малом, отклонении изображающей точки на фазовой плоскости от сепаратрисы, взаимодействующие солитоны перейдут либо в режим взаимного отражения, либо взаимного прохождения друг через друга. При чем такое отклонение за время сближения солитонов по сепаратрисам (например, за счет внешних воздействий, или неоднородностей среды) несомненно возможно, т.к. время сближения – бесконечно большое. По – этому, такой «сепаратрисный» способ взаимодействия можно назвать «негрубым».

При начальных условиях, задающих точку точно в каком – либо седле (при начальном значении величины a равном нулю и начальном значении величины ρ равном координате седла), солитоны остаются на расстоянии, равном координате седла, и далее двигаются с одинаковыми амплитудами без изменения взаимного положения. Т.е. возможно связанное, но не – периодическое (не – бризерное), состояние взаимодействующих на ненулевом расстоянии векторных однокомпонентных солитонов! Хотя такой «седловой» способ взаимодействия солитонов в реальных средах имеет смысл рассматривать только на конечных временах, так как этот способ взаимодействия является «негрубым» по причинам, описанным в предыдущем абзаце.

Следует отметить, что начальные условия (определяющие конкретную фазовую траекторию) для начального расстояния между взаимодействующими однокомпонентными солитонами заданы величиной ρ_0, или точнее (из-за периодичности тригонометрической функции в (2.3.1)) величиной $\rho_0 + \pi \cdot n/p$. Т.е. начальное расстояние всегда совпадает с координатой одного из седел на фазовой плоскости. Значит, не зависимо от начального различия амплитуд взаимодействующих солитонов (которое задается начальным значением величины a), невозможно заданием начальных условий выбрать (определить) траекторию, лежащую на или внутри какой - либо петли сепаратрис, или внутри связки сепаратрис. Если бы выбор такой замкнутой траектории был бы возможен, такая траектория соответствовала бы периодическому взаимному движению взаимодействующих солитонов на некотором расстоянии друг от друга. Т.е. был бы возможен бризер векторных солитонов разной поляризации, находящихся на некотором расстоянии друг от друга (никогда полностью не перекрывающихся)! Ожидать существование таких векторных солитонных бризеров в реальных средах можно только благодаря «негрубости» «седлового» способа взаимодействия рассматриваемых солитонов. Т.е. возникнуть такие бризеры могут только из – за случайных внешних

воздействий на больших временах при связанном не – бризерном состоянии солитонов.

В рассматриваемых случаях, интегрируя систему (2.3.1) – (2.3.2) при условии отсутствия различия амплитуд солитонов в выделенном седловом состоянии равновесия $a(\rho - saddle) = 0$, возможно определить «интервалы отражения» по начальному различию амплитуд взаимодействующих солитонов - максимальные расстояния от сепаратрис выделенного седла (отдельно при $\rho \to +\infty$ и при $\rho \to -\infty$) до горизонтальной оси. Эти расстояния описываются выражением $a_{\pm\infty}^2 = F_{\pm}(p\rho_0)$, где

$$F_{\pm}(p\rho_0) = -8p \int\limits_{\rho - saddle}^{\pm\infty} \sin(2p(\rho_0 - \rho)) \frac{(\rho - \tanh\rho)}{\tanh^3\rho \cdot \cosh^2\rho} d\rho .$$

Графики квадратов «интервалов отражения» $a_{+}^2(p\rho_0)$ при $\rho \to +\infty$ при разных значениях фазы исходного взаимного расположения взаимодействующих солитонов : $2p\rho_0 = 2\pi k$, $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $2p\rho_0 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ приведены на Рис.2.3.2.

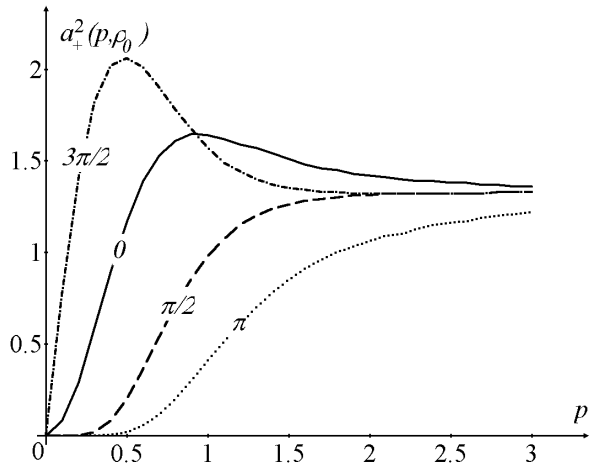

Рис.2.3.2. $a_{+}^2(p\rho_0)$ при разных исходных значениях $2p\rho_0$.

Значения квадратов «интервала отражения» при $\rho \to -\infty$ $a_-^2(p\rho_0 = 0) = a_+^2(p\rho_0 = 0)$, $a_-^2(p\rho_0 = \pi) = a_+^2(p\rho_0 = \pi)$, $a_-^2\left(p\rho_0 = \frac{\pi}{2}\right) = a_+^2\left(p\rho_0 = \frac{3\pi}{2}\right)$ и $a_-^2\left(p\rho_0 = \frac{3\pi}{2}\right) = a_+^2\left(p\rho_0 = \frac{\pi}{2}\right)$. Значение $a_\pm^2(p\rho_0)$ всегда ограничено, и стремится к значению ≈ 1.33 при $p > 3$.

В частности, при указанных на Рис.2.3.1.(a,b,c,d) случаях: $|a_{\pm\infty}| \approx 1.28$ при $2p\rho_0 = 0$; $|a_{+\infty}| \approx 0.99$ и $|a_{-\infty}| \approx 1.26$ при $2p\rho_0 = \pi/2$; $|a_{\pm\infty}| \approx 0.64$ при $2p\rho_0 = \pi$; $|a_{+\infty}| \approx 1.26$ и $|a_{-\infty}| \approx 0.99$ при $2p\rho_0 = 3\pi/2$.

Аналогично можно было бы определить «интервалы отражения» и для любого невыделенного седла. Но эта информации является несущественной, т.к. сепаратрисы любого невыделенного седла лежат ближе к горизонтальной оси, чем сепаратрисы выделенного седла. Т.е. «интервал отражения» любого седла включен в «интервал отражения» выделенного седла.

2.4. Общий случай – учет всех нелинейных эффектов взаимодействия

Рассмотрим взаимодействие однокомпонентных взаимно ортогональных солитонов при наличии в модельных уравнениях одновременно всех нелинейных параметров связи ($\sigma_{\alpha,\beta} \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$). Используя преобразования переменных $\tau' = \tau\sqrt{\sigma_\beta}$, $a' = \frac{a}{\sqrt{\sigma_\beta}}$ и обозначение $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} = \delta$, (в дальнейшей записи штрихи будем опускать) система уравнений (2.8) – (2.9) примет вид:

$$\frac{da}{d\tau} = 6\frac{\left(3\rho - 3\tanh\rho - \rho\cdot\tanh^2\rho\right)}{\tanh^4\rho\cosh^2\rho} - 4\sin^2 p(\rho_0 - \rho)\frac{\left(3\rho - 3\tanh\rho - \rho\cdot\tanh^2\rho\right)}{\tanh^4\rho\cosh^2\rho} - \delta\frac{4p(\rho - \tanh\rho)}{\tanh^3\rho\cosh^2\rho}\sin(2p(\rho_0 - \rho)), \quad (2.4.1)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = a \quad (2.4.2)$$

Эта система имеет не менее одного состояния равновесия.

На рисунках Рис.2.4.1.(a,b,c,d) приведены фазовые портреты системы (2.4.1) – (2.4.2) при разных значениях фазы исходного взаимного расположения взаимодействующих солитонов: $2p\rho_0 = 2\pi k$, $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $2p\rho_0 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; при $p = 1$ и $\delta = 1/2$.

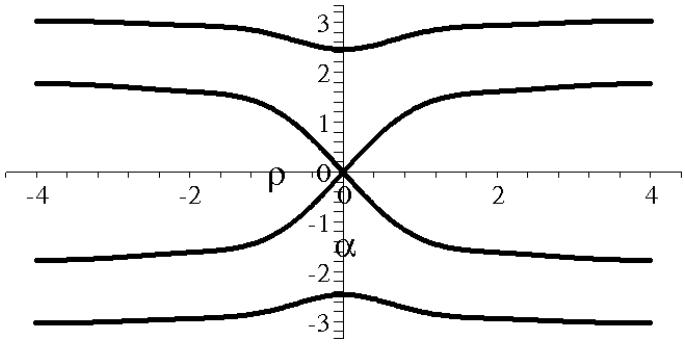

Рис. 2.4.1.a. фазовая плоскость системы (2.4.1) - (2.4.2) при $p = 1$, $\delta = 1/2$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0 = 2\pi k$.

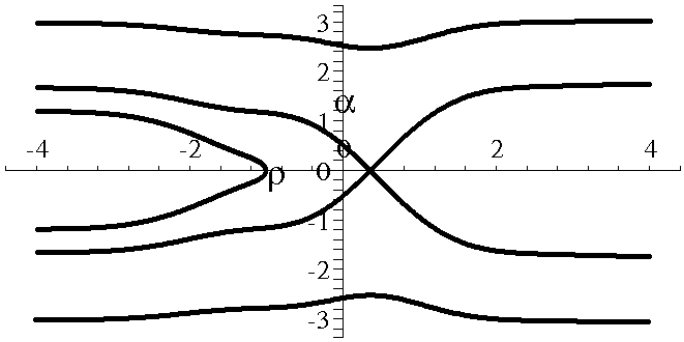

Рис. 2.4.1.b. фазовая плоскость системы (2.4.1) - (2.4.2) при $p = 1$, $\delta = 1/2$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

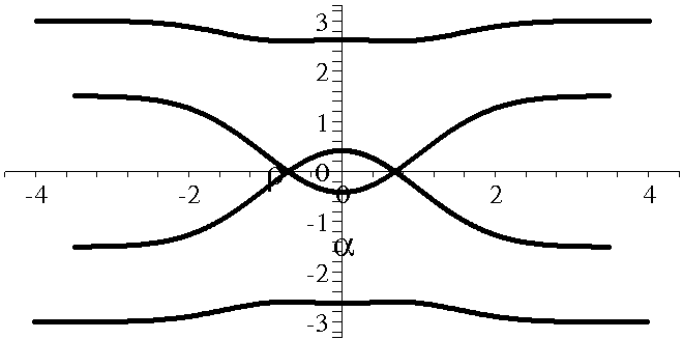

Рис. 2.4.1.c. фазовая плоскость системы (2.4.1) - (2.4.2) при $p=1$, $\delta=1/2$

и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

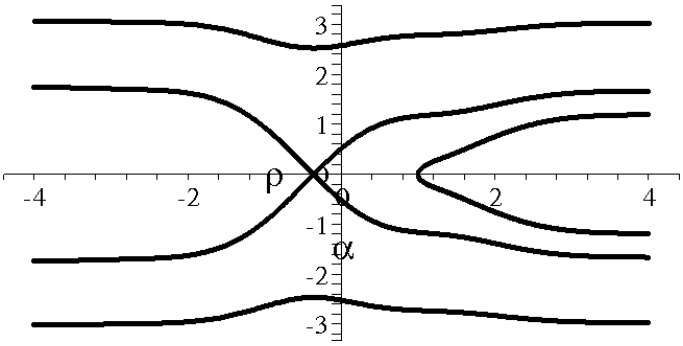

Рис. 2.4.1.d. фазовая плоскость системы (2.4.1) - (2.4.2) при $p=1$, $\delta=1/2$

и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$.

На рисунках Рис. 2.4.2.(a,b,c,d) приведены фазовые портреты системы (2.4.1) – (2.4.2) при разных значениях фазы исходного взаимного расположения взаимодействующих солитонов: $2p\rho_0=2\pi k$, $2p\rho_0=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2p\rho_0=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $2p\rho_0=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; при $p=1$ и $\delta=1$.

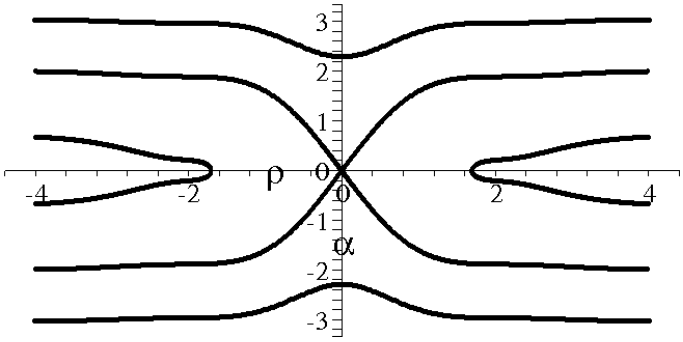

Рис. 2.4.2.a. фазовая плоскость системы (2.4.1) – (2.4.2) при $p=1$, $\delta=1$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0 = 2\pi k$.

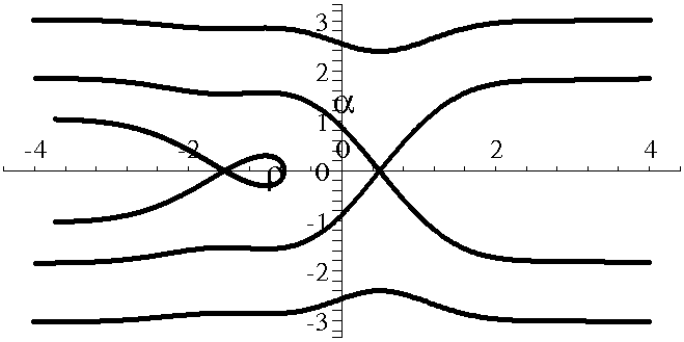

Рис. 2.4.2.b. фазовая плоскость системы (2.4.1) – (2.4.2) при $p=1$, $\delta=1$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

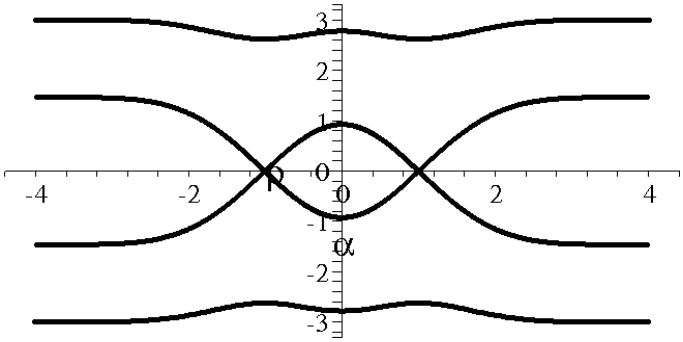

Рис. 2.4.2.c. фазовая плоскость системы (2.4.1) – (2.4.2) при $p=1$, $\delta=1$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

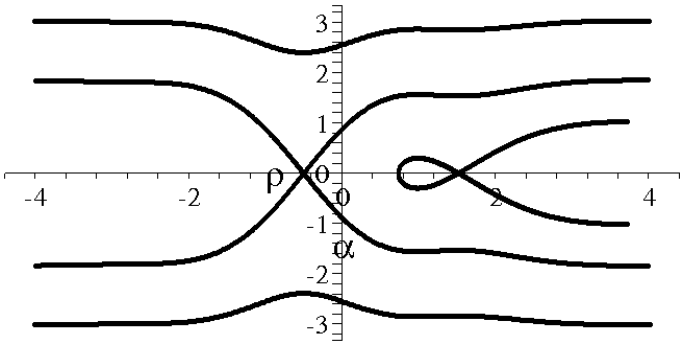

Рис. 2.4.2.d. фазовая плоскость системы (2.4.1) – (2.4.2) при $p=1$, $\delta=1$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$.

На рисунках Рис. 2.4.3.(a,b,c,d) приведены фазовые портреты системы (2.4.1) – (2.4.2) при разных значениях фазы исходного взаимного расположения взаимодействующих солитонов: $2p\rho_0=2\pi k$, $2p\rho_0=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2p\rho_0=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $2p\rho_0=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; при $p=1$ и $\delta=2$.

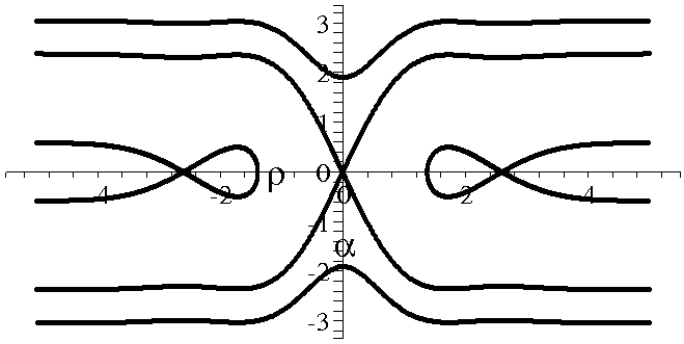

Рис. 2.4.3.a. фазовая плоскость системы (2.4.1) – (2.4.2) при $p=1$, $\delta=2$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0=2\pi k$.

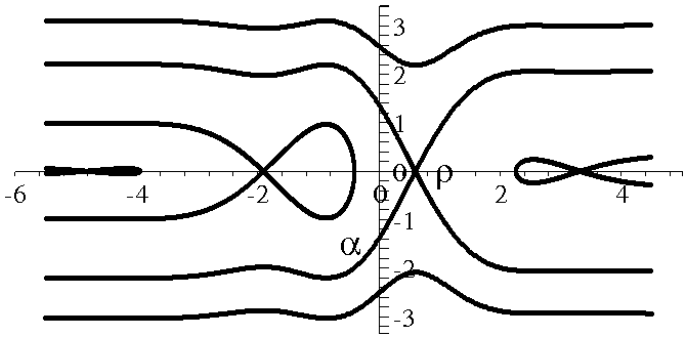

Рис. 2.4.3.b. фазовая плоскость системы (2.4.1) – (2.4.2) при $p=1$, $\delta=2$ и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

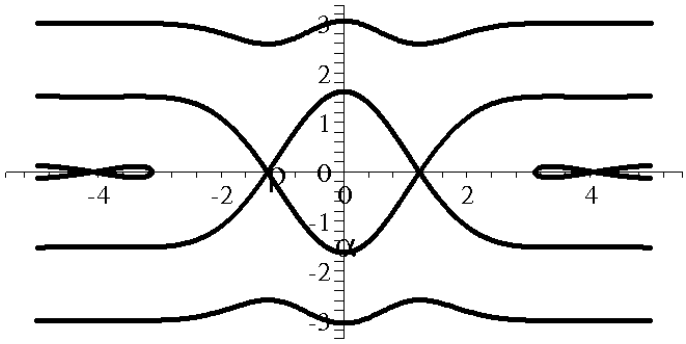

Рис. 2.4.3.c. фазовая плоскость системы (2.4.1) – (2.4.2) при $p=1$, $\delta=2$

и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

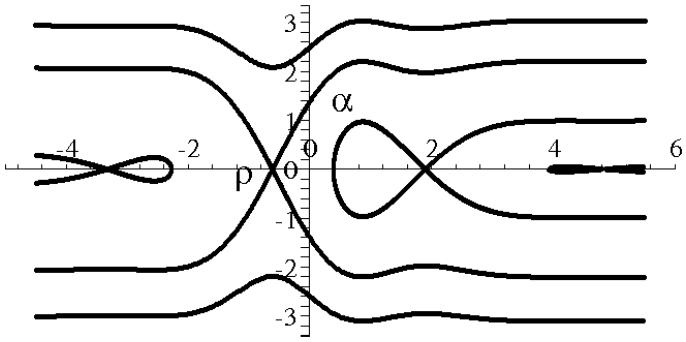

Рис. 2.4.3.d. фазовая плоскость системы (2.4.1) – (2.4.2) при $p=1$, $\delta=2$

и исходном расстоянии между солитонами $2p\rho_0=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$.

Движение изображающей точки по траекториям фазового пространства во всех указанных случаях всегда происходит: в верхней полуплоскости – слева на право, а в нижней полуплоскости – справа на лево. На всех приведенных графиках (Рис. 2.4.1 - Рис. 2.4.3) из состояний равновесия указаны только седла. Но внутри существующих петель сепаратрис или связок сепаратрис существуют состояния равновесия типа центр.

Из сравнения фазовых портретов при различных величинах параметра $\delta=\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$ видно, что рост этого параметра приводит к увеличению числа седловых состояний равновесия (и соответствующего числа центров внутри петель сепаратрис), увеличению расстояния между существующими седлами

и увеличению «интервала отражения» - максимального расстояния от сепаратрис седла до горизонтальной оси.

Увеличение величины p, подобно увеличению параметра δ, приводит к увеличению количества седловых состояний равновесия, к увеличению «интервала отражения», но при этом – к уменьшению расстояний между существующими седлами.

Как видно из приведенных фазовых портретов, всегда существует одно качественно выделенное состояние равновесия ($\rho - saddle$) – ближайшее к началу координат седло, не имеющее петель сепаратрис. Лишь при $2p\rho_0 = \pi$ (Рис.2.4.1,2,3.с.) таких седел два, и они имеют связанные между собой общие сепаратрисы – связки сепаратрис.

При изменении величины $2p\rho_0$ от 0 до $\pi/2$, выделенное седло смещается от начала координат вправо, при этом максимальное расстояние от сепаратрис этого седла до горизонтальной оси, т.е. «интервалы отражения», (и размах по вертикали петель сепаратрис других седел) уменьшаются, но справа интервал уменьшается быстрее, чем слева. При изменении величины $2p\rho_0$ от $\pi/2$ до π, выделенное седло продолжает смещаться вправо, а «интервалы отражения» слева и справа уменьшаются и выравниваются по величине. При этом справа от выделенного седла наиболее отдаленное седло (если оно существовало) слипается с соответствующим центром и исчезает, а слева от выделенного седла рождается новое седло с петлей сепаратрис и центром внутри этой петли. При $2p\rho_0 = \pi$ сепаратрисы выделенного седла слипаются с петлей сепаратрис ближайшего седла, расположенного слева, образуя связки сепаратрис. При дальнейшем изменении величины $2p\rho_0$ от π до 2π, связки сепарартис разрываются, оставляя выделенное седло слева от начала координат и седло с петлей сепаратрис справа от начала координат. Далее фазовый портрет

плавно возвращается в исходное состояние (симметрично изменению величины $2p\rho_0$ от *0* до π с зеркальной заменой лево – право).

Основные способы (типы) взаимодействия векторных солитонов аналогичны способам, описанным в разделе **2.3**. Так, в зависимости от начальных условий (определяемых начальными значениями величин a и ρ_0) возможны: взаимное прохождение солитонов друг через друга; «сепаратрисное» взаимодействие с бесконечно медленным выравниванием амплитуд солитонов (остающихся на ненулевом, равном координате соответствующего седла, расстоянии друг от друга); или взаимное отражение солитонов друг от друга. В случае взаимного отражения возможно, если выделенное седло смещено от начала координат фазового пространства, *отражение с двойным прохождением солитонов друг через друга*. В таком случае взаимодействующие солитоны сближаются, проходят друг через друга, расходятся на некоторое расстояние, разворачиваются и вновь сближаются, проходят друг через друга в обратном направлении, и окончательно расходятся. Такое поведение при взаимодействии возможно, например, при значении фазы исходного взаимного расположения $2p\rho_0 = \pi/2$ при движении по фазовым траекториям между сепаратрисами выделенного седла из области отрицательных начальных расстояний между солитонами, или при значении фазы исходного взаимного расположения $2p\rho_0 = 3\pi/2$ при движении по фазовым траекториям из области положительных начальных расстояний.

В рассматриваемых случаях, интегрируя систему (2.4.1) – (2.4.2) при условии отсутствия различия амплитуд солитонов в выделенном седловом состоянии равновесия $a(\rho - saddle) = 0$, возможно определить «интервалы отражения» по начальному различию амплитуд взаимодействующих солитонов - максимальные расстояния от сепаратрис выделенного седла

(отдельно при $\rho \to +\infty$ и при $\rho \to -\infty$) до горизонтальной оси. Эти расстояния описываются выражением $a_{\pm\infty}^2 = f(\rho - saddle) - \Phi_{\pm}(p\rho_0) + \delta \cdot F_{\pm}(p\rho_0)$, где

$$f(\rho - saddle) = \frac{12((\rho - saddle) - \tanh(\rho - saddle))}{\tanh^3(\rho - saddle) \cdot \cosh^2(\rho - saddle)},$$

$$\Phi_{\pm}(p\rho_0) = 8 \int\limits_{\rho - saddle}^{\pm\infty} \sin^2(p(\rho_0 - \rho)) \frac{(3\rho - 3\tanh\rho - \rho\tanh^2\rho)}{\tanh^4\rho \cdot \cosh^2\rho} d\rho,$$

$$F_{\pm}(p\rho_0) = -8p \int\limits_{\rho - saddle}^{\pm\infty} \sin(2p(\rho_0 - \rho)) \frac{(\rho - \tanh\rho)}{\tanh^3\rho \cdot \cosh^2\rho} d\rho.$$

Графики a_+^2 при $\rho \to +\infty$ и при разных значениях значении фазы исходного взаимного расположения $2p\rho_0 = 2\pi k$, $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2p\rho_0 = \pi + 2\pi k$ и $2p\rho_0 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, и для разных значений величины δ ($\delta = 1/2$, $\delta = 1$ и $\delta = 2$) приведены на Рис.2.4.4, Рис.2.4.5 и Рис.2.4.6 ниже:

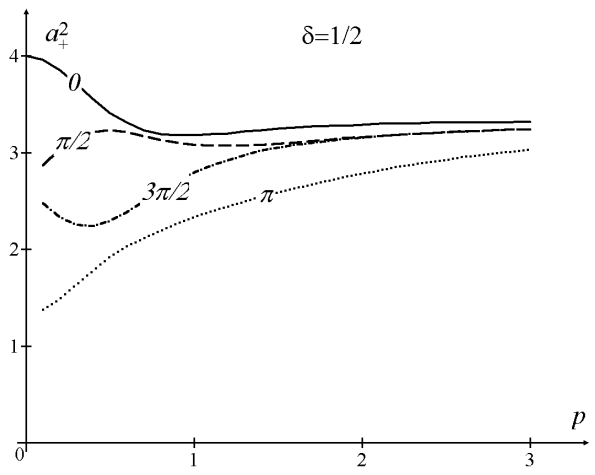

Рис.2.4.4. Величина a_+^2 при $\delta = 1/2$ и при разных значениях $2p\rho_0$

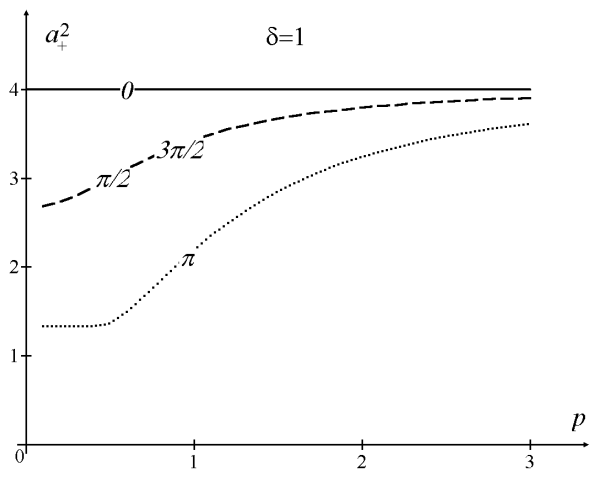

Рис.2.4.5. Величина a_+^2 при $\delta = 1$ и при разных значениях $2p\rho_0$

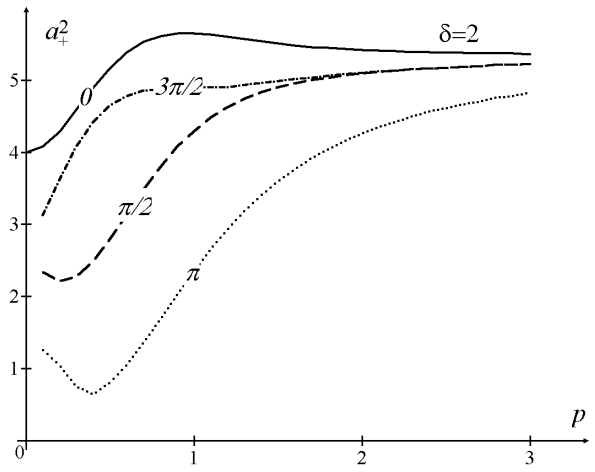

Рис.2.4.6. Величина a_+^2 при $\delta = 2$ и при разных значениях $2p\rho_0$

Значения квадратов «интервала отражения» при $\rho \to -\infty$:

$a_-^2(p\rho_0 = 0) = a_+^2(p\rho_0 = 0)$, $a_-^2(p\rho_0 = \pi) = a_+^2(p\rho_0 = \pi)$,

$a_-^2\left(p\rho_0 = \dfrac{\pi}{2}\right) = a_+^2\left(p\rho_0 = \dfrac{3\pi}{2}\right)$ и $a_-^2\left(p\rho_0 = \dfrac{3\pi}{2}\right) = a_+^2\left(p\rho_0 = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

В любой из указанных ситуаций при больших значениях величины p ($p > 3$) величины «интервалов отражения» стремятся к постоянным значениям, не зависящим от величины $2p\rho_0$ (но зависящим от параметра δ).

Так же следует отметить, что расположение выделенного седла (и невыделенных седел тоже) определяется величинами δ, $2p\rho_0$ и p. Графики координаты выделенного седла при разных значениях фазы исходного взаимного расположения взаимодействующих солитонов $2p\rho_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2p\rho_0 = \pi + 2\pi k$ и $2p\rho_0 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ (при $2p\rho_0 = 0 + 2\pi k$ координата выделенного седла всегда равна 0), и для разных значений величины δ ($\delta = 1/2$, $\delta = 1$ и $\delta = 2$) приведены на Рис.2.4.7, Рис.2.4.8 и Рис.2.4.9 ниже:

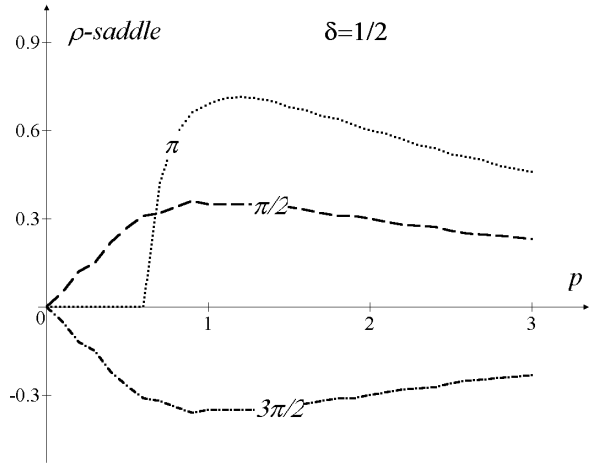

Рис.2.4.7. Координата выделенного седла ($\rho - saddle$)

при $\delta = 1/2$ и при разных значениях $2p\rho_0$

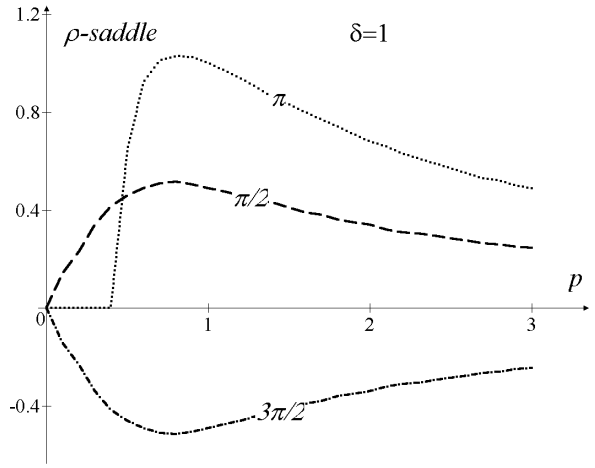

Рис.2.4.8. Координата выделенного седла ($\rho - saddle$)

при $\delta = 1$ и при разных значениях $2p\rho_0$

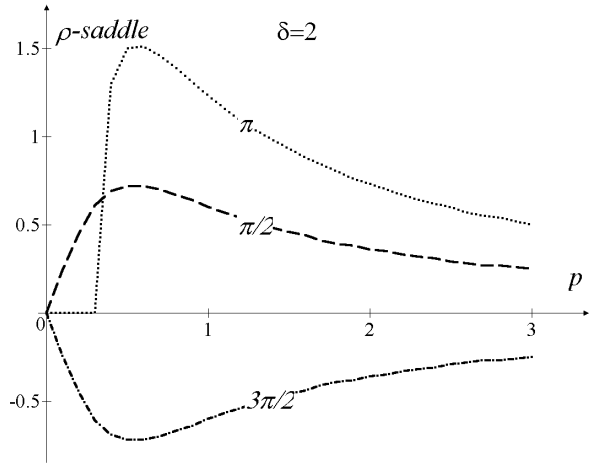

Рис.2.4.9. Координата выделенного седла ($\rho - saddle$)

при $\delta = 2$ и при разных значениях $2p\rho_0$

Из Рис.2.4.7,8,9 видно, что при любых значениях величин δ и $2p\rho_0$, координата выделенного седла при больших значениях величины p асимптотически стремится к гиперболической зависимости *снизу*. Но начальные условия (определяющие конкретную фазовую траекторию на фазовом пространстве) для начального расстояния между взаимодействующими солитонами заданы величиной ρ_0, или точнее (из-за периодичности тригонометрических функций в (2.4.1) – (2.4.2)) величиной $\rho_0 + \pi \cdot n/p$. Т.е. исходная координата на фазовой плоскости зависит от p по гиперболическому закону. Следовательно, начальная точка на фазовом пространстве всегда расположена *дальше* от начала координат по горизонтали, чем выделенное седло. Можно показать, что (с учетом периодичности начальных условий) такая же ситуация имеет место и около любого невыделенного седла. Таким образом, при любом начальном различии амплитуд взаимодействующих солитонов (которое задается начальным значением величины a), невозможно заданием начальных условий выбрать (определить) траекторию, лежащую на или внутри какой - либо петли сепаратрис, или внутри связки сепаратрис. Даже невозможно задать начальные условия непосредственно в каком – либо седле. Т.е. кроме

случаев отражения и прохождения солитонов, возможны только «сепаратрисные» («негрубые»!) случаи взаимодействия. Т.е. бризер, или хотя бы стационарное «седловое» состояние взаимодействующих векторных солитонов разной поляризации в соответствующих рассматриваемому случаю средах реализоваться не может.

2.5. Численный эксперимент

Для проверки корректности полученных выше аналитических результатов, рассмотрим численное описание динамики волновых пакетов (2.1) в рамках системы уравнений (1.4.1) – (1.4.2). Численный эксперимент проведем при значениях $\alpha = q = \beta = \gamma = 1$, различных значениях параметров нелинейной связи $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$, и различных начальных амплитудах взаимодействующих однокомпонентных солитонов $A_1(0)$, $A_2(0)$.

На Рис.2.5.1. в качестве примера показано распределение волновых полей взаимодействующих солитонов $|U|$ и $|W|$ в разные моменты времени, при исходном расстоянии между солитонами $\xi_0 = -\pi$ и при значениях параметров $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1/16$, $A_1(0) = 1.7$, $A_2(0) = 1$. Непрерывная линия соответствует распределению $|U|$, прерывистая линия соответствует распределению $|W|$. Как видно из этого распределения, при взаимодействии однокомпонентные взаимно ортогональные векторные волновые пакеты сохраняют солитоно – подобную форму (хотя взаимодействие сопровождается слабым линейным излучением части волновых полей). Этот результат подтверждает корректность адиабатического приближения при описании взаимодействия рассматриваемых векторных солитонов.

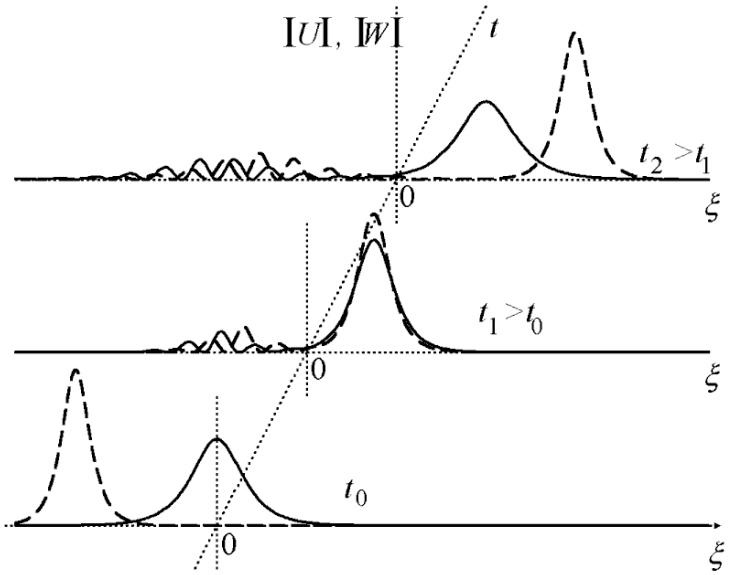

Рис.2.5.1. Распределение волновых полей взаимодействующих солитоно – подобных волновых пакетов в различные моменты времени

На Рис.2.5.2. и Рис.2.5.3. так же показаны результаты численного эксперимента по взаимодействию однокомпонентных солитонов. Здесь указана зависимость относительного различия между максимумами взаимодействующих поляризационных компонент $a_{num} = \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \frac{\max(|U|) - \max(|W|)}{\max(|U|) + \max(|W|)} \approx \frac{2(A_1 - A_2)}{\sqrt{\sigma}(A_1 + A_2)}$ от пространственного расстояния между их максимумами $\Delta\xi = \xi_{\max|u|} - \xi_{\max|w|}$ при величине $A_2(0) = 1$, различных величинах $A_1(0)$ и при различных величинах исходного расстояния между солитонами ξ_0. Рис.2.5.2. соответствует начальному расстоянию $\xi_0 = -\pi$; Рис.2.5.3. соответствует начальному расстоянию $\xi_0 = -\frac{5}{4}\pi$.

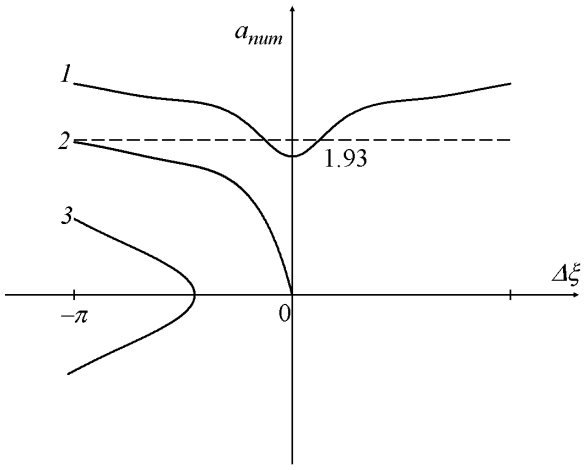

Рис.2.5.2. Результат численного эксперимента – аналог Рис.2.4.2.а в адиабатическом приближении

На Рис.2.5.2. кривая 1 описывает прохождение взаимодействующих солитонов одного через другой, в данном случае рассматривалась $A_1(0)=1.75$ ($a_{num}(-\pi)=2.18$); кривая 2 описывает «сепаратрисный» режим взаимодействия, в данном случае рассматривалась $A_1(0)=1.65$ ($a_{num}(-\pi)=1.93$); Кривая 3 описывает взаимное отражение взаимодействующих солитонов друг от друга, в этом случае рассматривалась $A_1(0)=1.55$ ($a_{num}(-\pi)=1.73$).

Рис.2.5.2. соответствует фазовой плоскости системы уравнений (2.4.1) – (2.4.2) при $\rho_0=\pi k$ (т.е. аналог Рис.2.4.2.а в адиабатическом приближении). Наибольшее различие амплитуд взаимодействующих солитонов при $\rho_0=\pi k$ в случае взаимного отталкивания (т.е. «интервал взаимного отражения» по различию амплитуд) в численном счете получено равным $(a_{num})_c\approx 1.93$ (расстояние от кривой 2 до горизонтальной оси при $\Delta\xi=-\pi$), что не сильно отличается от соответствующей величины, полученной в адиабатическом приближении при $\rho_0=\pi k$ (см. соответствующую кривую на Рис.2.4.2.а). Такое отличие результатов адиабатического анализа и численного счета возникает из-за излучения части волнового поля в результате взаимодействия солитонов (что не учитывалось в адиабатическом приближении).

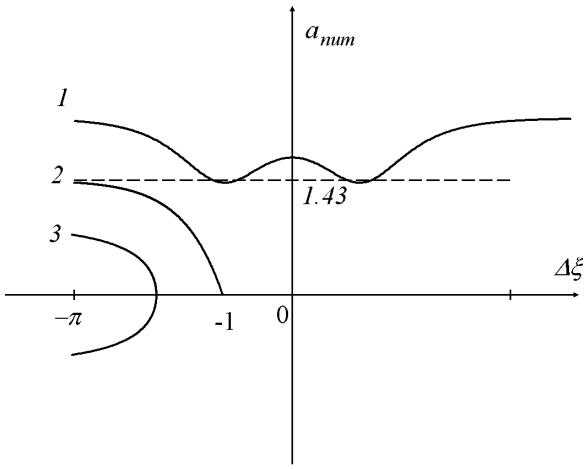

Рис.2.5.3. Результат численного эксперимента – аналог Рис.2.4.2.с в адиабатическом приближении

На Рис.2.5.3. ($\xi_0 = -\frac{5}{4}\pi$) кривая 1 описывает прохождение взаимодействующих солитонов одного через другой, в данном случае рассматривалась величина $A_1(0) = 1.55$ ($a_{num}(-\pi) = 1.73$); кривая 2 описывает «сепаратрисный» режим взаимодействия солитонов, в данном случае рассматривалась $A_1(0) = 1.45$ ($a_{num}(-\pi) = 1.43$); кривая 3 описывает режим взаимного отражения солитонов друг от друга, в данном случае рассматривалась $A_1(0) = 1.35$ ($a_{num}(-\pi) = 1.19$).

Рис.2.5.3. соответствует фазовой плоскости системы уравнений (2.4.1) – (2.4.2) при $\rho_0 = \pi k + \frac{\pi}{4}$ (см. Рис.2.4.2.с в адиабатическом приближении). Наибольшее различие амплитуд взаимодействующих солитонов при $\rho_0 = \pi k + \frac{\pi}{4}$ в режиме взаимного отражения в численном эксперименте получено равным $(a_{num})_c \approx 1.43$ (расстояние от кривой 2 до горизонтальной оси при $\Delta\xi = -\frac{5}{4}\pi$). Эта величина не на много отличается от аналогичной величины, полученной в адиабатическом приближении при $\rho_0 = \pi k + \frac{\pi}{4}$ (см. соответствующую кривую на Рис.2.4.2.с). Наличие такого различия объясняется излучением части волнового поля из области взаимодействия солитонов.

Нужно отметить, что на схожесть аналитических результатов и результатов численного эксперимента влияют величины параметров нелинейной связи между компонентами векторного волнового пакета различной поляризации $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$. При увеличении этих параметров связи, характер взаимодействия однокомпонентных солитонов сохраняется. Но, при увеличении этих параметров становится более существенным изменение амплитуд солитонов в результате взаимодействия. А это, в свою очередь, приводит к большему отличию аналитических результатов от результатов численного эксперимента. В частности, при $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \frac{1}{8}$ и начальном расстоянии между взаимодействующими солитонами $\xi_0 = -\pi$, наибольшая разница между амплитудами солитонов в случае взаимного отражения в численном эксперименте составляет $(a_{num})_c \approx 1.8$; и $(a_{num})_c \approx 1.3$ при начальном расстоянии $\xi_0 = -\frac{5}{4}\pi$. Таким образом, при больших значениях параметров связи $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ детальное сравнение результатов численного эксперимента и результатов адиабатического анализа становится невозможным.

3. Заключение

В данной работе анализируются фазовые эффекты взаимодействия коротких векторных однокомпонентных солитонов. Взаимодействие таких солитонов рассматривалось в рамках пары связанных нелинейных уравнений Шредингера третьего порядка в отсутствии эффектов вынужденного рассеяния Рамана. Исследование взаимодействия проводилось как аналитически – в адиабатическом приближении, так и в численном эксперименте. Полученные аналитические и численные результаты хорошо согласуются между собой при малых величинах параметров взаимной нелинейной связи компонент различной поляризации векторного волнового пакета $\sigma_{\alpha,\beta} << 1$. Описаны режимы взаимного прохождения солитонов друг через друга, взаимного отталкивания солитонов друг от друга и асимптотически медленного сближения солитонов. Обсуждается возможность существования квазистационарных состояний взаимодействующих солитонов: бризеров неперекрывающихся полностью, постоянно находящихся на некотором (переменном) расстоянии друг от друга солитонов; «седловых» видов взаимодействия, при которых связанные между собой солитоны постоянно находятся на некотором (постоянном) расстоянии друг от друга. Так же описан режим взаимного *отражения* взаимодействующих солитонов *с двойным прохождением* солитонов друг через друга. При увеличении параметров $\sigma_{\alpha,\beta}$ характер взаимодействия однокомпонентных векторных солитонов сохраняется, но более существенно изменяется амплитуда солитонов при взаимодействии.

При $p = 0$ (в отсутствии кубичной нелинейности, или линейной дисперсии третьего порядка) траектории взаимного движения солитонов описаны в явном виде.

При $p \neq 0$ траектории движения взаимодействующих солитонов зависят от начального расстояния между солитонами и от начальной разницы между их амплитудами. Таким образом, характер взаимодействия солитонов зависит от фазы начального их взаимного расположения.

Принятие во внимание эффектов вынужденного рассеяния Рамана приводит к переносу в область меньших значений спектра волнового числа короткого солитона [12,26]. В то же время, возникающее излучение волнового поля приводит к ускорению солитона и сдвигу вверх спектра волнового числа этого солитона. Баланс этих эффектов может приводит к стабилизации среднего значения спектра волнового числа движущегося солитона при наличии вынужденного рассеяния Рамана [27,28]. Другой способ стабилизации движущегося солитона при наличии вынужденного рассеяния Рамана – это использование сред с неоднородностью линейной дисперсии второго порядка q [29,30]. Исследование влияния этих эффектов на взаимодействие коротких однокомпонентных векторных солитонов предполагается в дальнейших работах.

4. Литература:

[1] Yang Y. Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis (Springer, New York, 2001).

[2] Dickey L.A. Soliton Equation and Hamiltonian Systems (World Scientific, New York, 2005).

[3] Kivshar Y.S. and Agraval G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals (Academic, San Diego, 2003).

[4] Agraval G.P. Fiber Optic Communication Systems (Wiley, New York, 2002).

[5] Zakharov V.E., Shabat A.B., *Exact theory of two-dimensional self–focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media,* Sov. Phys. JETP. 34 (1972) 62-69.

[6] Hasegava A., Tappert F., *Transmission of Stationary Nonlinear Optical Physics in Dispersive Dielectric Fibers I: Anomalous Dispersion,* Appl. Phys. Lett. 23 (1973) 142-144.

[7] Manakov S.V., *On the theory of two-dimensional stationary self focussing of electromagnetic waves,* Zh. Eksp. Teor. Fiz. 65 (1973) 505; Sov. Phys. JETP. 38 (1974) 248-253.

[8] Fordy A.P., Kullish P.P., *Nonlinear Schrodnger equations and simple Lie algebras,* Commun. Math. Phys. 89 (1983) 427-443.

[9] Menyuk C.R., *Nonlinear pulse-propagation in birefringent optical fibers,* Optics Letters, 12, 614 (1987); J. Opt. Soc. Am. B 5, 392 (1988).

[10] Наянов В.И., Многополевые солитоны (ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2006).

[11] Oliviera J.R., Moura M.A., *Analytical Solution for the Modified Nonlinear Schrodinger Equation Describing Optical Shock Formation,* Phys. Rev. E 57 (1998) 4751-4755.

[12] Gordon J.P., *Theory of the Soliton Self–frequency Shift,* Opt. Lett. 11 (1986) 662-664.

[13] Kodama Y. J., *Optical solitons in a monomode fiber,* Stat. Phys. 39 (1985) 597-614.

[14] Zaspel C.E., *Optical Solitary Wave and Shock Solutions of the Higher Order Nonlinear Schrodinger Equation,* Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 723-726.

[15] Hong B., Lu D., *New Jacobi functions solitons for the higher-order nonlinear Schrodiger equation,* Inter. Journal of Nonlinear Science 7 (2009) 360-367.

[16] Karpman V.I., *The extended third-order nonlinear Schrodinger equation and Galilean transformation,* The European Physical Journal B 39 (2004) 341-350.

[17] Gromov E.M., Talanov V.I., *Nonlinear Dynamics of Short Wave Trains in Dispersive Media,* Zh. Eksp. Teor. Fiz. 110 (1996) 137; JETP. 83 (1996) 73–79;

[18] Gromov E.M., Talanov V.I., *Short Optical Solitons in Fibers,* Chaos. 10 (2000) 551–558.

[19] Gromov E.M., Piskunova L.V., TyutinV.V., *Dynamics of wave packets in the frame of third-order nonlinear Schrödinger equation*, Physics Letters A. 256 (1999) P.153.

[20] Tsitsas N.L., Rompolis N., Kourakis I., Kevrekidis P.G. and Frantzeskakis D.J., *Higher-order effects and ultrashort solitons in left-handed metamaterials*, Phys. Rev. E. 79 (2009) 037601.

[21] Kivshar Yu.S., Dark-soliton dynamics and shock waves induced by the stimulated Raman effect in optical fibers, Phys. Rev. A. 42. N.3 (1990) P.1757-1761.

[22] Kim J., *A coupled higher-order nonlinear Schrodiger equation including higher-order bright and dark soltons*, ETRI Journal 23 (2001) 9-15.

[23] Lu F., Lin W.H., Knox W.H., Agrawal G.P., *Vector soliton fission*, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 183901.

[24] Gromov E.M., TyutinV.V., Vorontzov D.E., *Short vector soliton*, Physics Letters A. 287 (2001) 233–239.

[25] Aseeva N.V., Gromov E.M., TyutinV.V., *Phase interaction of Short Vector Solitons*, Physics Letters A. (2012) accepted for publication.

[26] AMARENDRA K SARMA and AJIT KUMAR, *Perturbative effects on ultra-short soliton self-switching*, Pramana – J. Phys. 69. N. 4. (2007) 575–587.

[27] F. Biancalana, D.V. Skryabin and A.V. Yulin, *Theory of the soliton self-frequency shift compensation by the resonant radiation in photonic crystal fibers*, Phys. Rev. E. **70** (2004), 016615

[28] A. Andrianov, S. Muraviev, A. Kim, A. Sysoliatin, *DDF-based all-fiber optical source of femtosecond pulses smoothly tuned in the telecommunication range*, Laser Physics **17**, (2007) 1296–1302

[29] R.-J. Essiambre, G. P. Agrawal, *Timing jitter of ultrashort solitons in highspeed communication systems. II. Control of jitter by periodic optical phase conjugation*, Journal of the Optical Society of America B **14**, (1997) 323–330

[30] S. Chernikov, E. Dianov, D. Richardson, D. Payne, *Soliton pulse compression in dispersion-decreasing fiber*, Optics letters **18**, (1993) 476–478