ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2013 ЭКОНОМИКА Вып. 1(16)

РАЗДЕЛ II. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.929 + 330.4

ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФУКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ

В.П. Максимов, д. ф.-м. наук, проф. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Электронный адрес: maksimov@econ.psu.ru
А.Л. Чадов, соискатель кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Электронный адрес: alchadov@yandex.ru
Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Динамические модели, рассматриваемые в этой работе, охватывают широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом эффектов последействия (запаздывания) и содержат одновременно как уравнения, описывающие динамику показателей в непрерывном времени на конечном промежутке, так и уравнения с дискретным временем, характерным для эконометрических моделей. Для таких моделей рассматриваются задачи управления, в которых цель управления задается конечной совокупностью линейных функционалов, число которых, вообще говоря, не связано с размерностью системы. Дается описание множества управлений, решающих задачу управления в классе управлений, генерируемых подсистемой с дискретным временем.

Ключевые слова: модели экономической динамики; функционально-дифференциальные уравнения; непрерывно-дискретные системы; задачи управления.

Введение

Исследованию задач управления для систем дифференциальных уравнений и их обобщений посвящена обширная литература [см., напр.: 1-5 а также библиографию в них]. Здесь мы рассматриваем задачи управления для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений, сдержащих как уравнения с непрерывным временем, так и уравнения с дискретным временем. Упомянутые системы часто называют гибридными, используя термин, применяемый в литературе в различных смыслах [см.: 3,4,6,7]. Чтобы избежать искажения смысла названия, мы используем термин «непрерывно-дискретные системы», подчеркивая разную природу независимой переменной в различных уравнениях системы. Кроме того, для краткости будем использовать термины «непрерывный» и «дискретный» применительно к соответствующим подсистемам. Для случая, когда непрерывная подсистема представляет собой линейную диффренциальную систему с постоянными запаздываниями в непрерывном аргументе, задачи управления с задаваемыми в качестве цели терминальными состояниями в различных постановках исследуются в работах [2-4]. Подчеркнем, что мы используем здесь в качестве непрерывной подсистемы общий случай линейной функционально-дифференциальной системы, разрешенной относительно производной [8,9]. Основной математический результат работы состоит в описании множества управлений, решающих задачу управления в классе управлений, генерируемых подсистемой с дискретным временем (теорема), он опубликован без доказательства в кратком сообщении [10].

1. Предварительные сведения

Для описания непрерывной подсистемы введем линейный оператор $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int_0^t K(t,s)\dot{x}(s)ds + A(t)x(0),\ t \in [0,T].$$

Здесь элементы $k_{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s): 0 \le s \le t \le T\}$ и таковы, что на этом множестве

$$|k_{ij}(t,s)| \le \kappa(t), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

где функция κ суммируема на $[0,T]$, элементы $n\times n$-матрицы A суммируемы на $[0,T]$. Обозначим через $AC^n[0,T]$ пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0;T]\to R^n$, $L^n[0,T]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $z:[0,T]\to R^n$,

$$\|x\|_{AC^n} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L^n}, \quad \|z\|_{L^n} = \int_0^T |z(t)|dt,$$

где $|\alpha| = \max_{i=1,\dots,n} |\alpha_i|$ для $\alpha = col(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R^n$.

Оператор $\mathcal{L}: AC^n[0;T] \to L^n[0;T]$ ограничен. Систематическое изложение теории уравнения $\mathcal{L}x = f$ дается в монографиях [11,12]. Функционально-дифференциальная система $\mathcal{L}x = f$ охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. Пространство всех решений однородной системы $\mathcal{L}x = 0$ имеет размерность n. Пусть $\{x_1,\dots,x_n\}$ - базис в этом пространстве. Матрица $X = (x_1,\dots,x_n)$ называется фундаментальной матрицей (для определенности будем считать, что $X(0) = E$, – единичная $n\times n$-матрица). Задача Коши

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha$$

однозначно разрешима при любых $f \in L^n[0,T]$ и $\alpha \in R^n$ и ее решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)\alpha + \int_0^t C_1(t,s) f(s)\,ds,$$

где $C_1(t,s)$ – матрица Коши [9, 11, 12]. Напомним, что всякий линейный ограниченный вектор-функционал $l: AC^n[0,T] \to R^N$ имеет представление

$$lx = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds,$$

где элементы $N\times n$-матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном на $[0,T]$, Ψ – постоянная $N\times n$-матрица. Условия $lx = \gamma$, которые мы будем использовать для задания цели управления, охватывают многочисленные классы конкретных краевых условий, встречающихся в приложениях, в том числе двух- и многоточечные, интегральные, нагруженные интегральные и др.

Для описания дискретной подсистемы введем оператор Λ:

$$(\Lambda y)(t_i) = y(t_i) - \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j), \tag{2}$$

$$i = 1,2,\dots,\mu, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\mu = T.$$

Здесь B_{ij} - постоянные $\nu\times\nu$-матрицы. Обозначим $J = \{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$, $FD^\nu(\mu)$ – пространство функций $y: J \to R^\nu$ с нормой $\|y\|_{FD^\nu(\mu)} = \sum_{i=0}^{\mu} |y(t_i)|$. Напомним некоторые факты об уравнении $\Lambda y = g$ [13]. Задача Коши

$$\Lambda y = g, \quad y(0) = \beta$$

однозначно разрешима при любых $g \in FD^\nu(\mu)$ и $\beta \in R^\nu$ и ее решение представимо в виде

$$y(t_i) = Y(t_i)\beta + \sum_{j\le i} C_2(i,j) g(t_j), \; i = 1,2,\dots,\mu,$$

где $Y(\cdot)$ – фундаментальная матрица, $C_2(\cdot,\cdot)$ – матрица Коши.

2. Задача управления. Построение дискретного управления

Рассмотрим систему управления

$$(\mathcal{L}x)(t) = \sum_{j:t_j<t} U_j(t) y(t_j) + f(t), \; t \in [0,T], \tag{3}$$

$$(\Lambda y)(t_i) = \sum_{j:t_j<t} A_{ij} x(t_j) + \sum_{j:t_j<t} H_{ij} v(t_j) + g(t_i), \tag{4}$$

$i = 1,2,\dots,\mu$, содержащую подсистему (3) с непрерывным временем и подсистему (4) с дискретным временем. Здесь A_{ij}, H_{ij} – постоянные матрицы размерности $\nu\times n$ и $\nu\times m$ соответственно, U_j – $\nu\times n$-матрицы с суммируемыми элементами. Эти подсистемы связаны между собой по состояниям, управление v входит только в дискретную подсистему, определяя поведение ее траекторий в зависимости от сечений $x(t_j)$ траекторий непрерывной подсистемы и воздействуя на нее с помощью компонент $y(t_j)$. Начальные состояния подсистем считаются заданными: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Цель управления задается с помощью целевого вектор-функционала $\lambda: AC^n[0,T]\times FD^\nu(\mu) \to R^N$:

$$\lambda(x,y) = \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds + \Psi x(0) + \sum_{j=0}^{\mu} G_j y(t_j) = \gamma \in R^N.$$

Для формулировки основной теоремы введем необходимые обозначения. Определим $\nu\times n$-матрицы D_{kj} и M_{ij} равенствами

$$D_{kj} = \int_{t_j}^{t_k} C_1(t_k,s) U_j(s)ds, \quad M_{ij} = \sum_{j<k<i} A_{ik} D_{kj}.$$

Обозначим через Λ_3 дискретную операцию

$$(\Lambda_3 y)(t_i) = (\Lambda y)(t_i) - \sum_{j<i} M_{ij} y(t_j),$$

а через $Y_3(\cdot)$ и $C_3(\cdot,\cdot)$ ее фундаментальную матрицу и матрицу Коши соответственно. Пусть, далее,

$$P_{i0} = \sum_{j\le i} C_3(i,j) \sum_{k<j} A_{jk} X(t_k); \ Q_{i0} = Y_3(t_i);$$

$$S_{ij} = C_3(i,j); \ W_{ij} = \sum_{j<k\le i} C_3(i,k) H_{kj};$$

$$R_i(s) = \sum_{j\le i} \chi_{[0,t_j]}(s) [\sum_{j<k\le i} C_3(i,k) A_{kj}] C_1(t_j,s),$$

$\chi_{[0,t_j]}(s)$ – характеристическая функция отрезка $[0,t_j]$; $\quad \Theta(s) = \Phi(s) + \int_s^T \Phi(\tau)[C_1(\tau,s)]'_\tau \, d\tau;$

$$D_j^1 = \int_{t_j}^T \Theta(s) U_j(s)\, ds, \ j = 0,\dots,\mu-1, \ D_\mu^1 = 0;$$

$$\Delta_j = D_j^1 + G_j; P_0^\lambda = \int_0^T \Phi(s)\dot{X}(s)\, ds + \Psi + \sum_{j=0}^{\mu} \Delta_j P_{j0};$$

$$Q_0^\lambda = \sum_{j=0}^{\mu} \Delta_j Q_{j0}; R^\lambda(s) = \Theta(s) + \sum_{j=0}^{\mu} \chi_{[0,t_j]}(s) \Delta_j R_j(s);$$

$$S_j^\lambda = \sum_{j\le k} \Delta_k S_{kj}; \quad W_j^\lambda = \sum_{j<k<\mu} \Delta_k W_{kj};$$

$$\delta = \gamma - P_0^\lambda x_0 - Q_0^\lambda y_0 - \int_0^T R^\lambda(s) f(s)\, ds - \sum_{j=0}^{\mu} S_j^\lambda g(t_j).$$

Теорема. *Множество управлений*

$$v = col(v(t_0),\dots,v(t_{\mu-1})),$$

решающих задачу управления (3)-(5), *исчерпывается решениями системы* $Wv = \delta$, *где*

$$W = (W_0^\lambda, .., W_{\mu-1}^\lambda).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением решения системы (3):

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t C_1(t,s) f(s)\, ds + \tag{6}$$

$$+ \int_0^t C_1(t,s) \sum_{j:s_j<s} U_j(s) y(s_j)\, ds, \quad t \in [0,T].$$

Отсюда для каждого сечения $x(t_j)$ имеем

$$x(t_j) = X(t_j)x_0 + \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) f(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k)\, ds.$$

После подстановки правой части этого равенства в систему (4) получаем систему относительно y:

$$y(t_i) = \sum_{j:t_j<t_i} A_{ij} \Big(X(t_j)x_0 + \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) f(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k)\, ds \Big) +$$

$$+ \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j) + \sum_{j:t_j<t_i} H_{ij} v(t_j) + g(t_i). \tag{7}$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые в правой части:

$$y(t_i) = \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j) + \sum_{j:t_j<t_i} A_{ij} \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) f(s)\, ds +$$

$$\sum_{j:t_j<t_i} A_{ij} X(t_j) x_0 + \sum_{j:t_j<t_i} A_{ij} \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k) ds +$$

$$+ \sum_{j:t_j<t_i} H_{ij} v(t_j) + g(t_i).$$

Покажем, что выражение

$$\int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k) ds$$

можно записать в виде

$$\sum_{k<j} D_{jk} y(t_k).$$

Действительно,

$$\int_0^{t_j} C_1(t_j,s) \sum_{k:s_k<s} U_k(s) y(s_k) ds = \int_0^{t_1} C_1(t_j,0) U_0(s) y(s_0) ds +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} C_1(t_j,s)[U_0(s)y(s_0) + U_1(s)y(s_1)] ds + \dots$$

$$+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} C_1(t_j,s)[U_0(s)y(s_0) + \dots + U_{j-1}(s)y(s_{j-1})] ds =$$

$$+ \int_0^{t_j} C_1(t_j,s) U_0(s)\, ds\, y(t_0) + \int_{t_1}^{t_j} C_1(t_j,s) U_1(s)\, ds\, y(t_1) + \dots$$

$$+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} C_1(t_j,s) U_{j-1}(s)\, ds\, y(t_{j-1}),$$

и остается положить

$$D_{jk} = \int_{t_k}^{t_j} C_1(t_j,s) U_k(s)\, ds.$$

Определим дискретную операцию Λ_3 равенством

$$(\Lambda_3 y)(t_i) = y(t_i) - \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j) - \sum_{j<i} A_{ij} \sum_{k<j} D_{jk} y(t_k).$$

Меняя порядок суммирования в повторной сумме, получим для Λ_3 эквивалентное представление

$$(\Lambda_3 y)(t_i) = y(t_i) - \sum_{j<i} B_{ij} y(t_j) - \sum_{j<i} M_{ij} y(t_j),$$

где

$$M_{ij} = \sum_{j<k<i} A_{ik} D_{kj}.$$

Используя фундаментальную матрицу $Y_3(\cdot)$ и матрицу Коши $C_3(\cdot,\cdot)$ операции Λ_3, запишем решение системы (7) в виде

$$y(t_i) = Y_3(t_i)y_0 + \sum_{j\le i} C_3(i,j)\Big(\sum_{k<j} A_{jk} \; [X(t_k)x_0 + $$
$$+\int_0^{t_k} C_1(t_k,s)f(s)\,ds] + \sum_{k<j} H_{jk}v(t_k) + g(t_i) \; \Big).$$

Раскрывая скобки и меняя порядок суммирования в повторных суммах, придадим этому представлению следующий вид:

$$y(t_i) = \Big(\sum_{j\le i} C_3(i,j) \sum_{k<j} A_{jk} \; X(t_k) \; \Big)x_0 + Y_3(t_i)y_0 +$$
$$+\int_0^{t_k} \Big(\sum_{j\le i} \chi_{[0,t_j]}(s)[\sum_{j\le k<i} C_3(i,k)A_{kj}]C_1(t_j,s) \; \Big) f(s)\,ds +$$
$$+\sum_{j\le i} C_3(i,j)g(t_j) + \sum_{j\le i}\sum_{j<k\le i} C_3(i,k)H_{kj}v(t_j).$$

Для сокращения дальнейших преобразований введем следующие обозначения:

$$P_{i0} = \sum_{j\le i} C_3(i,j)\sum_{k<j} A_{jk}X(t_k); \; Q_{i0} = Y_3(t_i);$$
$$R_i(s) = \sum_{j\le i} \chi_{[0,t_j]}(s)[\sum_{j<k\le i} C_3(i,k)A_{kj}]C_1(t_j,s),$$
$$S_{ij} = C_3(i,j); \; W_{ij} = \sum_{j<k\le i} C_3(i,k)H_{kj}.$$

С использованием этих обозначений представление для $y(t_j)$ принимает окончательный вид:

$$y(t_j) = P_{i0}x_0 + Q_{i0}y_0 + \int_0^{t_i} R_i(s)f(s)\,ds +$$
$$+\sum_{j\le i} S_{ij}g(t_j) + \sum_{j<i} W_{ij}v(t_j). \qquad (8)$$

Теперь можно воспользоваться представлениями (6) и (8) для вычисления значений целевого вектор-функционала λ на траекториях системы (3)-(4). Этот вектор-функционал содержит производную $\dot{x}$, для нахождения которой продифференцируем по t обе части равенства (6). При этом мы используем следующее свойство матрицы Коши $C(\cdot,\cdot)$ [9]:

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_0^t C_1(t,s)f(s)\,ds\Big) = \int_0^t \; [C_1(t,s)]'_t f(s)\,ds + f(t).$$

Таким образом получаем

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t)x_0 + \int_0^t [C_1(t,s)]'_t f(s)\,ds +$$
$$\int_0^t [C_1(t,s)]'_t \sum_{j:s_j<s} U_j(s)y(s_j)\,ds + f(t) + \sum_{j:t_j<t} U_j(t)y(t_j).$$

Подстановка правой части этого равенства и правой части равенства (8) в выражение для целевого вектор-функционала (5) приводит к равенству

$$\lambda(x,y) = [\int_0^T \Phi(s)\dot{X}(s)\,ds + \Psi]x_0 + \int_0^T \Theta(s)f(s)\,ds +$$
$$+\int_0^T \Theta(s)\sum_{j:s_j<s} U_j(s)y(s_j)\,ds + \sum_{j=0}^{\mu} G_j y(t_j), \quad (9)$$

где

$$\Theta(s) = \int_s^T \Phi(\tau)[C_1(\tau,s)]'_\tau\,d\tau + \Phi(s).$$

Третьему слагаемому в правой части (9) придадим вид $\sum_0^{\mu} D_j^1 y(t_j)$, вводя обозначение $D_j^1 = \int_{t_j}^T \Theta(s)U_j(s)\,ds, \; j = 0,\dots,\mu-1$, и полагая $D_\mu^1 = 0$. Наконец, обозначая $\Delta_j = D_j^1 + G_j$, получаем окончательное выражение для $\lambda(x,y)$ через x_0, f и $y(t_j)$:

$$\lambda(x,y) = [\int_0^T \Phi(s)\dot{X}(s)\,ds + \Psi]x_0 +$$
$$+\int_0^T \Theta(s)f(s)\,ds + \sum_{j=0}^{\mu} \Delta_j y(t_j).$$

Отсюда, вводя обозначения

$$\Delta_j = D_j^1 + G_j; P_0^\lambda = \int_0^T \Phi(s)\dot{X}(s)\,ds + \Psi + \sum_{j=0}^{\mu} \Delta_j P_{j0};$$
$$Q_0^\lambda = \sum_{j=0}^{\mu} \Delta_j Q_{j0}; R^\lambda(s) = \Theta(s) + \sum_{j=0}^{\mu} \chi_{[0,t_j]}(s)\Delta_j R_j(s);$$
$$S_J^\lambda = \sum_{j\le k} \Delta_k S_{kj}; \quad W_j^\lambda = \sum_{j<k<\mu} \Delta_k W_{kj};$$
$$\delta = \gamma - P_0^\lambda x_0 - Q_0^\lambda y_0 - \int_0^T R^\lambda(s)f(s)\,ds - \sum_{j=0}^{\mu} S_j^\lambda g(t_j),$$

получаем значение целевого вектор-функционала λ из (5) на траекториях системы (3) – (4):

$$\lambda(x,y) = P_0^\lambda x_0 + Q_0^\lambda y_0 + \int_0^T R^\lambda(s)f(s)\,ds +$$
$$\sum_{j=0}^{\mu} S_j^\lambda g(t_j) + \sum_{j=0}^{\mu-1} W_j^\lambda v(t_j).$$

Таким образом, заданное значение γ достигается целевым вектор-функционалом только под действием управления v, которое является решением системы $Wv = \delta$.

Эффективное исследование разрешимости задачи (3)-(5) с использованием доказанной теоремы может быть проведено на основе доказательного вычислительного эксперимента, основные этапы и алгоритмы которого описаны в [14-15]. Рассматриваемые здесь динамические модели расширяют возможности применения идей и результатов работ [16-20].

Приведем иллюстрирующий пример.

Пример. Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}_1(t) - 0.3x_2(t-1) = 0, \quad t \in [0.4],$$

$$\dot{x}_2(t) + 0.1x_2(t) = \sum_{j=0}^{3} (t - t_j)\chi_{[t_j,4]}(t) y_2(t_j),$$

$t_j = j,\ j = 0,1,2,3,4,$

$$\begin{pmatrix} y_1(t_i) \\ y_2(t_i) \end{pmatrix} = \sum_{j<i} B_{ij} \begin{pmatrix} y_1(t_j) \\ y_2(t_j) \end{pmatrix} + \sum_{j<i} \begin{pmatrix} 0 \\ v(t_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t_i) \\ f_2(t_i) \end{pmatrix},$$

$i = 1,2,3,4,$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 5,\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,$$

и заданными терминальными состояниями компонент непрерывной подсистемы:

$$x_1(4) = 10,\ x_2(4) = 100.$$

Матрицы B_{ij} заданы равенствами

$$B_{10} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix},\ B_{21} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.08 \\ -0.075 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$B_{20} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.05 \\ -0.05 & 0.2 \end{pmatrix}, B_{32} = \begin{pmatrix} 0.35 & -0.05 \\ -0.05 & 0.15 \end{pmatrix},$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.04 \\ -0.04 & 0.1 \end{pmatrix}, B_{30} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.03 \\ -0.03 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$B_{43} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.01 \\ -0.01 & 0.3 \end{pmatrix}, B_{42} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.01 \\ -0.01 & 0.2 \end{pmatrix},$$

$$B_{41} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.01 \\ -0.01 & 0.1 \end{pmatrix}, B_{40} = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.01 \\ -0.01 & 0. \end{pmatrix};$$

$$f(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix},\ f(t_2) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.1 \end{pmatrix},$$

$$f(t_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix},\ f(t_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что дискретная подсистема не является автономной (коэффициенты зависят от дискретного времени) и обладает полной памятью. Непрерывная подсистема может рассматриваться как модель двухотраслевой экономики, средства для развития первой отрасли поступают с запаздыванием как средства от реализации продукции второй отрасли, для которой задана динамика производственных фондов с коэффициентом амортизации 0.1 и которая развивается в соответствии с инвестициями, поступающими от дискретного исполнительного механизма, описываемого уравнениями дискретной подсистемы. Управляющие воздействия $v(0), v(1), v(2)$ входят только во второе уравнение дискретной подсистемы.

Матрица Коши $C_1(t,s)$ непрерывной подсистемы имеет элементы

$$C_1^{11}(t,s) = 1, \quad C_1^{12}(t,s) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad t \in [0,1],\ 0 \le s \le t; \\ 0,\ t \in (1,4],\ t-1 < s \le t; \\ 3(1 - e^{-0.1(t-1-s)}),\ t \in (1,4],\ 0 \le s \le t-1; \end{cases}$$

$$C_1^{21}(t,s) = 0,\ C_1^{22}(t,s) = e^{-0.1(t-s)}.$$

Фундаментальная матрица $X(t)$ непрерывной подсистемы имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & \begin{cases} 0, & t \in [0,1], \\ 3(1 - e^{-0.1(t-1)}), & t \in (1,4] \end{cases} \\ 0 & e^{-0.1t} \end{pmatrix}.$$

Матрица $C_2(i,j)$ дискретной подсистемы определяется равенствами

$$C_2(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2(2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2(2,1) = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.08 \\ -0.075 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$C_2(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2(3,2) = \begin{pmatrix} 0.35 & -0.05 \\ -0.05 & 0.15 \end{pmatrix},$$

$$C_2(3,1) = \begin{pmatrix} 0.47875 & -0.0830 \\ -0.07625 & 0.1490 \end{pmatrix},$$

$$C_2(4,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2(4,3) = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.01 \\ -0.01 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$C_2(4,2) = \begin{pmatrix} 0.4405 & -0.0315 \\ -0.0285 & 0.2455 \end{pmatrix},$$

$$C_2(4,1) = \begin{pmatrix} 0.5430125 & -0.071690 \\ -0.0576625 & 0.206330 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица $Y(\cdot)$ дискретной подсистемы определяется равенствами

$$Y(t_1) = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, Y(t_2) = \begin{pmatrix} 0.658 & -0.124 \\ -0.1175 & 0.2975 \end{pmatrix},$$

$$Y(t_3) = \begin{pmatrix} 0.590175 & -0.130275 \\ -0.110525 & 0.184825 \end{pmatrix},$$

$$Y(t_4) = \begin{pmatrix} 0.63675025 & -0.12713325 \\ -0.094139251175 & 0.14849025 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в приведенных численных значениях элементов матриц C_2 и Y все цифры верные.

Все управления $v(0), v(1), v(2)$, решающие поставленную задачу управления, определяются системой

$0.39540648\ v(0)+.0487746v(1) = 10 - 5.307495399,$

$4.715822191v(0)+1.945636580v(1) +$

$+ 0.48374180v(2)=100 -12.59389468.$

Эта система имеет однопараметрическое семейство решений

$v(1) = 23.05174954 - 0.3546687920\ v(2),$

$v(0) = 9.024042139 + 0.04374948145\ v(2).$

Оставшаяся степень свободы может быть использована для достижения некоторой дополнительной цели. Например, если целесообразно воспользоваться управлением с минимальной в данном классе нормой, скажем, суммой абсолютных величин всех компонент, то, решая задачу

$$[|\,v(0)\,|+|\,v(1)\,|+|\,v(2)\,|] \to \min,$$

получаем управление

$v(0) = 9.024042139,\ v(1) = 23.05174954,\ v(2) = 0,$

дающее минимальную величину общих расходов на управление, не превосходящую 32.08 ед.

Список литературы

1. *Андреева Е.А.,* Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 312 с.

2. *Agranovich G. A.* Observability criteria of linear discrete-continuous systems //Functional Differential Equations. 2009. V. 16, № 1. P. 35-51.

3. *De la Sen M.* On the controller synthesis for linear hybrid systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2001. V. 18. P. 503-529.

4. *Марченко В.А.,* Зачкевич З. Представление решений управляемых гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 12. С. 1775-1786.

5. *Габасов Р.,* Кириллова Ф.М. , Павленок Н.С. Оптимизация динамических систем в классе дискретных управлений конечной степени // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 12. С. 3-30.

6. *Максимов В.П.,* Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Экономика. 2011. № 2. С. 13-23.

7. *Chadov A.L.,* Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. 2012. V. 19, №1-2.P. 49-62.

8. *Максимов В.П.,* Рахматуллина Л.Ф. О представлении решений линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 6. С. 1026- 1036.

9. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13, №4. С. 601-606.

10. *Максимов В.П.,* Чадов А.Л. Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 9. С. 72-76.

11. *Азбелев Н.В.,* Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.

12. *Azbelev N.V.,* Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.

13. *Андрианов Д.Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 3-16.

14. *Максимов В.П.,* Румянцев А.Н. Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 56-71.

15. *Максимов В.П.* Арифметика рациональных чисел и компьютерное исследование интегральных уравнений // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 3. С. 121-126.

16. *Максимов В.П.* Об одном подходе к задаче наведения системы в окрестность нормативной траектории // Вестник Пермского университета. Экономика. 2008. № 8. С. 108-112.

17. *Максимов В.П.* Импульсная коррекция управления для динамических моделей с последействием // Вестник Пермского университета. Экономика. 2009. № 1. С. 91- 95.

18. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Симонов П.М. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. № 1. С. 3-23.

19. *Максимов В.П.,* Поносов Д.А., Чадов А.Л. Некоторые задачи экономико-математического моделирования // Вестник Пермского университета. Экономика. 2010. № 2. С. 45-50.

20. *Azbelev N.V.,* Maksimov V.P., Simonov P.M. Theory of functional differential equations and applications // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2011. V. 69, No. 2. P. 203-235.