

УДК 517.9

Осреднение и дисперсионные эффекты в задаче о распространении волн, порожденных локализованным источником¹

В. В. Грушин^{2,3,4}, С. Ю. Доброхотов^{3,5,6}, С. А. Сергеев^{3,5,7}

Поступило в сентябре 2012 г.

Построены асимптотические решения волнового уравнения с быстро осциллирующей на плавно меняющемся фоне скоростью и локализованными начальными возмущениями. Сначала с помощью адиабатического приближения в операторной форме проводится осреднение, приводящее к уравнению типа линеаризованного уравнения Буссинеска с гладкими коэффициентами и слабой “аномальной” дисперсией. Далее с помощью модифицированного канонического оператора Маслова строятся асимптотические решения этого и, как следствие, исходного уравнений, которые для начальных возмущений специального вида выражаются через комбинации произведений функций Эйри комплексного аргумента. На основе полученных явных формул проведено исследование влияния быстрых осцилляций скорости на фронты решения и профили в окрестности фронта.

DOI: 10.1134/S0371968513020143

1. ВВЕДЕНИЕ

В линейных задачах для уравнений в частных производных методы осреднения работают в ситуациях, когда их коэффициенты — быстро осциллирующие функции. Имеется огромное количество публикаций по методам осреднения, посвященных как очень серьезным теоретическим математическим вопросам, так и приложениям (см., например, [1–4]). Как правило, они применяются для построения таких асимптотических решений исходного уравнения, главный член которых — уже достаточно гладкая (не быстро осциллирующая) функция. С другой стороны, во многих физических задачах интерес представляют ситуации, когда и главный член асимптотического решения — также быстро меняющаяся функция. В этом случае в асимптотическом решении могут проявляться дисперсионные эффекты, для учета которых соответствующий метод осреднения следует скорректировать. В этой работе мы иллюстрируем сказанное на примере задачи Коши с быстро убывающими начальными данными для волнового уравнения на плоскости $\mathbb{R}_x^2$ с осциллирующими коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\langle \nabla, C^2 \left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, x \right) \nabla \right\rangle u, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_x^2, \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = V \left(\frac{x}{\mu} \right), \quad u_t|_{t=0} = 0. \quad (1.2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00973, 11-01-12058).

²Московский институт электроники и математики НИУ ВШЭ, Москва, Россия.

³Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия.

⁴E-mail: vvgrushin@mail.ru

⁵Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

⁶E-mail: dobr@ipmnet.ru

⁷E-mail: SergeevSe1@yandex.ru

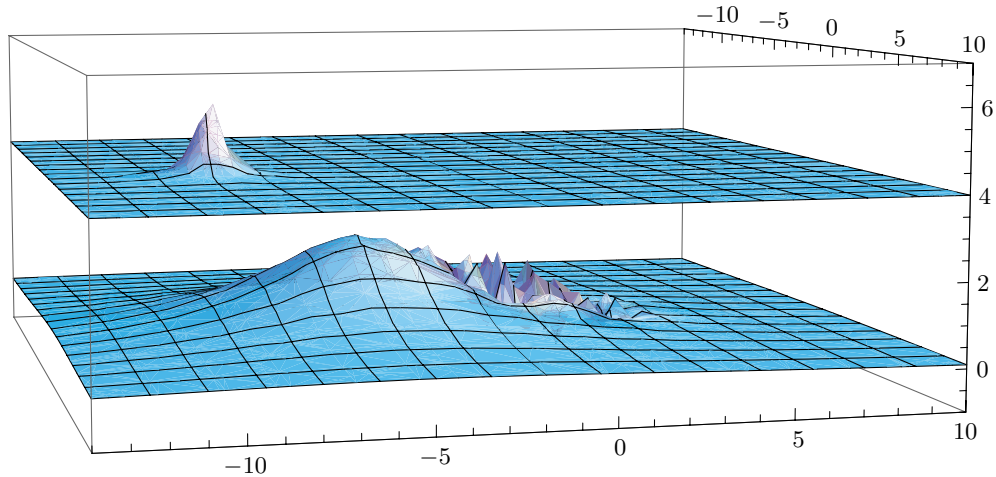


Рис. 1. Начальное возмущение (слева на поверхности воды) и дно в виде медленно меняющейся подводной банки с быстро осциллирующим участком

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает вещественное евклидово скалярное произведение, $\Theta(x)$ — гладкая вещественнозначная либо скалярная, либо векторная функция $\Theta(x) = (\Theta_1, \Theta_2)$, $C(y, x)$ — гладкие вещественные функции, гладкая функция $C^2(y, x) > \kappa_0 > 0$ имеет период 2π по скалярной переменной y в первом случае и по каждой из переменных y_1, y_2 во втором, при этом предполагается, что фазы Θ_j локально не коллинеарны, т.е. что матрица Θ_x , составленная из строк $((\Theta_1)_{x_k}, (\Theta_2)_{x_k})$, $k = 1, 2$, невырождена. Функция $V(z)$ предполагается убывающей при $|z| \rightarrow +\infty$ не медленнее чем $1/|z|^\alpha$, $\alpha > 1$.

Параметры ε и μ , характеризующие скорость осцилляций коэффициентов и скорость затухания начальных данных, предполагаются малыми; более того, мы будем считать их связанными формулой $\mu = \varepsilon^\kappa$, где $1 > \kappa \geq 0$ — некоторое число. В простейшем случае функция Θ — линейная функция аргументов x . Нелинейная зависимость означает, что в каких-то областях плоскости $\mathbb{R}_x^2$ осцилляции скорости становятся более частыми, а в каких-то — более редкими, амплитуда осцилляций может медленно зависеть от переменных x , функцию $C^2(y, x)$ удобно представить в виде

$$C^2(y, x) = C_0^2(x) + \tilde{a}(y, x), \quad (1.3)$$

где $\tilde{a}(y, x)$ — финитная (для простоты) по x функция с нулевым средним по переменным y . Сразу отметим, что эффективные асимптотические формулы для решения можно получить в том случае, когда осцилляционная часть $\tilde{a}$ скорости “не очень большая” по сравнению со “средней” неосциллирующей частью C_0^2 , поэтому введем еще один параметр δ и положим $\tilde{a} = \delta a(y, x)$, $C^2 = C_0^2(x) + \delta a(y, x)$. В качестве примера можно привести функции $a(y, x) = a_1(x) \cos y$ или $a(y, x) = a_1(x) \cos y_1 + a_2(x) \cos y_2$, где $a_1(x)$, $a_2(x)$ — гладкие финитные функции, причем их носители отделены от начала координат (т.е. от точки, где локализована начальная функция $V(\frac{x}{\mu})$). Таким образом, в рассматриваемой задаче имеется три малых параметра μ , ε и δ .

Задачи такого типа возникают, в частности, при исследовании распространения волн цунами в так называемой поршневой модели (см., например, [5]), тогда функция u — превышение свободной поверхности — описывает (длинную) волну на поверхности океана над быстро меняющимися областями дна (характер дна иллюстрируется рис. 1), порожденную мгновенным перемещением сравнительно небольшого участка дна. При этом скорость $C = \sqrt{gD(x)}$, где $D(x)$ — функция, описывающая глубину, g — ускорение свободного падения. Применительно к задаче цунами (до выхода на берег) параметры можно трактовать следующим образом. Если обозначить характерный размер области, где распространяется волна, через L , характерную

глубину через D_0 , горизонтальный размер начального возмущения через l_0 , характерный размер “быстрых” горизонтальных и вертикальных изменений дна через l_1 и d соответственно, то $\mu = l_0/L$, $\varepsilon = l_1/L$, $\delta = d/D_0$. При этом время распространения волны в изучаемой области оказывается приблизительно равным $L/\sqrt{gD_0}$. Забегая вперед, скажем, что в конечном итоге в асимптотические разложения параметры ε и δ входят в виде ε^2 и δ^2 , что делает возможным рассмотрение ситуаций, когда, например, $l_1/l_0 \sim d/D_0 \sim 1/3$. Рассматриваемая задача (1.1), (1.2) записана в безразмерных переменных.

Если бы скорость C не зависела нерегулярным образом от параметра ε , то решение задачи определялось бы с помощью асимптотических формул, полученных в работах [6–8] и апеллирующих к гамильтоновой системе в четырехмерном фазовом пространстве с гамильтонианом $|p|C(x)$. В рассматриваемой ситуации прямо теория, развитая в указанных работах, становится неприменимой, и здесь сначала следует использовать методы типа методов осреднения. Это и продлевается в настоящей работе, причем мы применяем вариант осреднения, развитый в [9] и позволяющий учесть “осредненное” влияние на распространяющуюся волну отражений от неоднородностей скорости C , приводящее как к изменению ее фронта, так и к осцилляциям профиля, определяемым появлением в осредненных уравнениях четвертых (и, возможно, более высоких) производных, т.е. дисперсионных эффектов. Отметим также, что при наличии нелинейных слагаемых дисперсия играет еще более важную роль (см., например, [10, 11]), мы, однако, рассматриваем только линейный (двумерный) случай.

В качестве важного примера функций $V(z)$ в (1.2) мы выбираем обобщающие [12, 13] алгебраические функции вида (см. [14])

$$V(z) = A \left(1 + \left(\frac{z_1}{b_1} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{b_2} \right)^2 \right)^{-3/2}, \quad (1.4)$$

где $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, A — константы. Преобразования Фурье функций такого вида имеют простую форму, благодаря чему во многих линейных и нелинейных задачах общие асимптотические формулы упрощаются и ответы выражаются через элементарные или известные специальные функции. В рассматриваемой задаче асимптотическое решение выражается через комбинацию произведений функций Эйри. Отметим также, что, имея асимптотическое решение задачи Коши с функциями (1.4), с помощью операций дифференцирования можно получить широкий класс других асимптотических решений, имеющих осцилляции при $t = 0$, образующих в некотором смысле базис в подходящем пространстве функций (см. [8, 15]).

Мы используем результаты и формулы, выведенные в [6, 9], при этом приводим лишь такие рассуждения и выкладки, которые дают конструктивные асимптотические формулы; их обоснование — доказательства соответствующих оценок (аналогичных приведенным в [6, 9]) — мы опускаем, они требуют существенно больше места и будут опубликованы в более подробной работе. Мы активно используем операторные и геометрические конструкции из [16–19], переносящие процедуру решения дифференциальных уравнений в “операторно-алгебраическую” область и область динамических систем. Тем не менее, несмотря на в некотором смысле “абстрактный” характер, такой подход приводит к вполне элементарным “реальным” асимптотическим формулам, содержащимся в утверждениях 1, 2, которые достаточно легко и быстро реализуются с помощью программы “Wolfram Mathematica”.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 мы объясняем, как выводится осредненное уравнение с учетом дисперсионных поправок. Решение осредненного уравнения и исходной задачи (основной результат статьи) содержится в разд. 3. Некоторые вычисления, приводящие к формулам из разд. 2, 3, отсутствующие в работах [6, 9], вынесены в разд. 4 (в приложения).

2. ОСРЕДНЕННОЕ УРАВНЕНИЕ СО СЛАБОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Кратко изложим подход, предложенный и развитый в [20, 21, 9] (см. также [22]). Мы используем здесь и ниже элементарные объекты и обозначения теории функций от некоммутирующих операторов (см. [16, 17]). Сначала решение задачи (1.1), (1.2) представляется в виде

$$u = U\left(x, t, \frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, \varepsilon, \mu\right), \quad (2.1)$$

где 2π -периодическая по y или (y_1, y_2) функция $U(x, t, y, \varepsilon, \mu)$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^2 U_{tt} = -\langle (-i\varepsilon \nabla_x - i\nabla_y^\Theta), C^2(y, x)(-i\varepsilon \nabla_x - i\nabla_y^\Theta) \rangle U, \quad \nabla_y^\Theta = \Theta_x(x) \nabla_y. \quad (2.2)$$

Это уравнение относится к уравнениям, известным в математической литературе (см. [18, 17]) как уравнения с “операторнозначным символом”. Смысл введения новых переменных y состоит в регуляризации коэффициентов: в (2.2) они зависят от ε при $\varepsilon \rightarrow +0$ уже гладким образом. Цель методов осреднения — адиабатического приближения состоит в исключении переменных y , т.е. понижении размерности уравнений (2.2). Хотя реального уменьшения числа переменных по отношению к исходным уравнениям в таких задачах не происходит, тем не менее быстрые фазы можно до известной степени считать независимыми с переменными x , поэтому их исключение в дальнейших вычислениях тоже можно рассматривать как понижение размерности.

Использование адиабатического приближения в операторной форме [21, 17, 9] позволяет найти некоторые решения (2.2) в виде⁸

$$U(x, t, y, \varepsilon, \mu) = \hat{\chi} w \equiv \chi\left(\overset{2}{x}, -i\varepsilon \nabla_x, y, \varepsilon\right) w(x, t, \varepsilon, \mu). \quad (2.3)$$

Здесь $\hat{\chi}$ — “сплетающий” псевдодифференциальный оператор с символом, допускающим разложение

$$\chi(x, p, y, \varepsilon) = \chi_0(x, p, y) + \varepsilon \chi_1(x, p, y) + \dots, \quad (2.4)$$

а новая неизвестная функция $w(x, t, \varepsilon, \mu)$ удовлетворяет “редуцированному осредненному уравнению”

$$\varepsilon^2 w_{tt} = -L\left(\overset{2}{x}, -i\varepsilon \nabla_x, \varepsilon\right) w, \quad (2.5)$$

с оператором⁹ $\hat{L}$, заданным символом L , также допускающим регулярное разложение по ε :

$$L(x, p, \varepsilon) = L_0(x, p) + \varepsilon L_1(x, p) + \dots \quad (2.6)$$

Векторная переменная p , называемая *импульсной* переменной, соответствует оператору дифференцирования $-i\varepsilon \nabla_x$. Функция $H_{\text{eff}}(p, x) = L_0(x, p)$ называется (классическим) *эффективным гамильтонианом*. Для построения главного члена асимптотического решения исходной задачи достаточно найти L_0 , L_1 и χ_0 . Применение операторных методов в сочетании с теорией возмущений по параметру ε дает семейство зависящих от x и p периодических по y задач для определения L_0 и χ_0 :

$$\mathcal{H}_0 \chi_0(x, p, y) = L_0(x, p) \chi_0(x, p, y), \quad \mathcal{H}_0 = \langle (p - i\nabla_y^\Theta), C^2(y, x)(p - i\nabla_y^\Theta) \rangle. \quad (2.7)$$

⁸Мы используем здесь упорядочение Фейнмана–Маслова (некоммутирующих) операторов умножения на переменные x_j и дифференцирования $\partial/\partial x_k$. Оператор с цифрой 1 над ним действует сначала, а оператор с цифрой 2 над ним — после первого оператора.

⁹В физической литературе (в физике твердого тела) построение оператора $L(\overset{2}{x}, -i\varepsilon \nabla_x, \varepsilon)$ по функции $L(x, p, \varepsilon)$ соответствует подстановке Пайерлса (см. [23] и более подробные объяснения в [17, 24, 25]).

Заметим также, что очевидной заменой заданный на периодических функциях оператор $\mathcal{H}_0$ приводится к виду оператора $\Delta_y^\Theta = \langle \nabla_y^\Theta, C^2(y, x) \nabla_y^\Theta \rangle$, заданному на блоховских функциях, при этом переменные (параметры) p выражаются линейным образом через квазиимпульсы этих функций. Ясно, что задача (2.7) имеет бесконечный набор решений — “мод” (собственных функций и значений). По причинам, излагаемым ниже, нас будет интересовать решение с минимальным собственным значением. Для такого решения справедливы следующие разложения по импульсным переменным p (см. [9]):

$$\begin{aligned}\chi_0(x, p, y) &= 1 + O(p), & L_0(x, p) &= L_0^{(2)}(x, p) + L_0^{(4)}(x, p) + O(p^6), \\ L_0^{(2)}(x, p) &= O(p^2), & L_0^{(4)}(x, p) &= O(p^4),\end{aligned}$$

где $L_0^{(k)}$ — однородные полиномы k -й степени по p . Но даже такое решение не представляется возможным найти явно уже для функций $C^2(y, x)$ с очень специальной зависимостью от переменной y , поэтому здесь можно говорить только о приближенных решениях.

Примем во внимание тот факт, что рассматриваемая задача содержит еще один малый параметр μ . Отвлечемся на время от начальных условий вида (1.2) и рассмотрим аналогичную задачу Коши с начальными условиями в виде быстро осциллирующей экспоненты $A_0(x)e^{iS_0(x)/\mu}$, где $A_0(x)$, $S_0(x)$ — гладкие функции, $S_0(x) \neq 0$. Тогда решение редуцированного уравнения (2.5) представляется в аналогичном виде (в виде ВКБ-решения) $A(x, t)e^{iS(x, t)/\mu}$. Если действовать стандартным для метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) и лучевых разложений образом, т.е. подставить эту функцию в уравнение (2.5), произвести дифференцирование, собрать слагаемые при разных значениях параметра μ , то с учетом равенства $\hat{p} = -i\varepsilon \nabla_x$ получится уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\varepsilon^2}{\mu^2} S_t^2 = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} L_0\left(x, \frac{\varepsilon}{\mu} \nabla S\right) = L_0^{(2)}(x, \nabla S) + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} L_0^{(4)}(x, \nabla S) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4} O(1).$$

Для амплитуды A получается (линейное) уравнение переноса, которое нам сейчас не понадобится; отметим только, что при определении амплитуды требуется вычислить L_1 или по крайней мере его линейную часть по переменной p (см. [9, 25] и лемму 1). Если $\mu = \varepsilon^\kappa$, $1 > \kappa \geq 0$, то, очевидно, в предположении, что время t меняется на промежутке $t = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, уже второе слагаемое можно рассматривать как поправку и пытаться учесть его в уравнении переноса для амплитуды $A(x, t)$. Нетрудно выяснить (см. [9, 25]), что “граничное” значение κ , при котором эту поправку можно не учитывать в фазе, но нужно учитывать в амплитуде, равно $\kappa = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \mu = \varepsilon^{2/3} \Leftrightarrow \varepsilon = \mu^{3/2}$. При такой связи между параметрами на указанных временах проявляются “слабодисперсионные” эффекты, про которые можно сказать, что они не влияют на фронт (фронты) решения, но приводят к осцилляциям в амплитуде. Похожие рассуждения можно провести и для задачи (1.1), (1.2), где указанные эффекты особенно хорошо проявляются. Такую ситуацию мы в основном и будем рассматривать, считая, что по крайней мере $\kappa \leq 2/3$. Укажем еще на следующее обстоятельство: при выводе асимптотических формул сначала приходится строить разложения с некоторым запасом слагаемых, явный вид которых, однако, не требуется для написания главного члена асимптотики, а требуется факт их существования и удовлетворения подходящим свойствам. Соответствующие построения мы здесь опускаем (см. [6, 25]).

В силу сказанного для нахождения минимального собственного значения и соответствующей собственной функции задачи (2.7) можно воспользоваться теорией возмущений по переменным p . Приведем соответствующие формулы из работы [9].

Для любой функции $w(y, x, p)$, 2π -периодической по переменным y_1, y_2 , т.е. для функции, заданной на двумерном торе $\mathbb{T} = \{y_1 \in [0, 2\pi], y_2 \in [0, 2\pi]\}$, обозначим ее среднее через

$$\langle w \rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} w(y, x, p) dy_1 dy_2.$$

Далее дополнительно к оператору $\Delta_y^\Theta = \langle \nabla_y^\Theta, C^2(y, x) \nabla_y^\Theta \rangle$ введем оператор $D = \langle p, \nabla_y^\Theta \rangle$ и рассмотрим уравнение (“на ячейке”)

$$\Delta_y^\Theta F = f, \quad \langle f \rangle_{\mathbb{T}} = 0, \quad (2.8)$$

где $f(y, x, p)$ — гладкая 2π -периодическая по переменным y_j функция. У этого уравнения существует единственное (гладкое) решение с нулевым средним $\langle F \rangle_{\mathbb{T}} = 0$. Это решение обозначим через $F(y, x) = (\Delta_y^\Theta)^{-1} f(y, x)$. Имеем $C_0^2 = \langle C^2 \rangle_{\mathbb{T}}$, $\tilde{a}(y, x) = C^2(y, x) - C_0^2$. Введем зависящие линейно от p операторы $D = \langle p, \Theta_x(x) \nabla_y \rangle$ и $Q = DC^2 - C^2D$. Обозначим через $g_0(y, x)$, $g_1(y, x, p)$, $g_2(y, x, p)$ зависящие от p, x как от параметров решения с нулевыми средними задачи на ячейке

$$g_0 = \frac{1}{\Delta_y^\Theta}(\tilde{a}), \quad g_1 = \frac{1}{\Delta_y^\Theta}(D\tilde{a}), \quad g_2 = \frac{1}{\Delta_y^\Theta}(Qg_1 - \langle Qg_1 \rangle_{\mathbb{T}}), \quad \langle g_{0,1,2} \rangle_{\mathbb{T}} = 0. \quad (2.9)$$

Заметим, что $g_1(y, x, p)$ — линейная однородная функция p , $g_2(y, x, p)$ — однородный многочлен второго порядка по p .

Лемма 1. При x , принадлежащих компакту K , и достаточно малых p минимальное собственное значение $L_0(x, p)$ оператора $\mathcal{H}_0$ невырождено и аналитично по p , функции $\chi_0(x, p, y)$ и χ_1 можно также выбрать аналитическими по p , так что справедливы равенства $L_0(x, p) = L_0^{(2)}(x, p) + L_0^{(4)}(x, p) + O(|p|^6)$, $L_1(x, p) = -\frac{i}{2} \langle \nabla_x, \nabla_p \rangle L_0^{(2)} + O(p^2)$, где

$$L_0^{(2)}(x, p) = p^2 C_0^2 - \langle Qg_1 \rangle_{\mathbb{T}}, \quad (2.10)$$

$$L_0^{(4)}(x, p) = p^4 \langle g_0 \tilde{a} \rangle_{\mathbb{T}} + 2p^2 \langle g_1 Qg_0 \rangle_{\mathbb{T}} + \langle g_1^2 \rangle_{\mathbb{T}} \langle Qg_1 \rangle_{\mathbb{T}} + p^2 \langle g_1^2 \tilde{a} \rangle_{\mathbb{T}} + \langle g_2 Qg_1 \rangle_{\mathbb{T}}, \quad (2.11)$$

причем для $\chi_0(x, p, y)$ будут справедливы равенства

$$\chi_0 = 1 - ig_1(y, x, p) + p^2 g_0(y, x) - g_2(y, x, p) - \frac{1}{2} \langle g_1^2 \rangle_{\mathbb{T}} + O(|p|^3), \quad (2.12)$$

$$\left\| 1 - ig_1(y, x, p) + p^2 g_0(y, x) - g_2(y, x, p) - \frac{1}{2} \langle g_1^2 \rangle_{\mathbb{T}} \right\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1 + O(|p|^3), \quad \chi_1 = O(p). \quad (2.13)$$

Формулы для $L_0^{(2)}(x, p)$ и $L_1(x, p)$ хорошо известны в теории осреднения (см., например, [1]). При $n = 1$ полученные формулы можно, в принципе, реализовать в квадратурах, однако они оказываются достаточно громоздкими даже для простой зависимости C от y . При $n = 2$ явное обращение оператора Δ_y^Θ если и возможно, то в исключительных случаях, и, как уже отмечалось, с точки зрения аналитических методов здесь речь также может идти только о теории возмущений по отношению $(C^2 - C_0^2)/C_0^2$, если считать $\tilde{a} = \delta a$. При этом, поскольку в разложении функций $L_0^{(2)}$ и $L_0^{(4)}$ появляется параметр δ^2 , в ряде задач можно ограничиться только первыми нетривиальными поправками, приводящими к деформации фронта и осцилляциям профиля.

Лемма 2. Предположим, что $C^2(y, x) = C_0^2(x) + \delta a(y, x)$, $C_0^2(x) > 0$ при x , принадлежащих компакту K , и $a(y, x)$ — гладкая вещественная 2π -периодическая по переменным y_j

функция с нулевым средним значением, т.е. $\langle a \rangle_{\mathbb{T}} = 0$, имеющая следующее разложение в ряд Фурье:

$$a(y, x) = \sum_{\nu \neq 0} a_{\nu}(x) \exp(i\langle \nu, y \rangle). \quad (2.14)$$

Здесь вектор-столбец (мультииндекс) ν с компонентами ν_1, ν_2 принимает значения на целочисленной решетке. Тогда

$$L_0^{(2)}(x, p) = p^2 C_0^2 - \delta^2 R(x, p) + O(\delta^3), \quad R = \frac{1}{C_0^2} \sum_{\nu \neq 0} \frac{\langle p, \Theta_x \nu \rangle^2}{\langle \Theta_x \nu, \Theta_x \nu \rangle} |a_{\nu}|^2, \quad (2.15)$$

$$L_0^{(4)}(x, p) = -\delta^2 M(x, p) + \mu O(\delta^3), \quad M = \frac{1}{C_0^2} \sum_{\nu \neq 0} \left(p^2 - 2 \frac{\langle p, \Theta_x \nu \rangle^2}{\langle \Theta_x \nu, \Theta_x \nu \rangle} \right)^2 \frac{|a_{\nu}|^2}{\langle \Theta_x \nu, \Theta_x \nu \rangle}. \quad (2.16)$$

В случае, когда a — конечная сумма вида (2.14), формулы (2.15), (2.16) также имеют конечное число слагаемых, поэтому вычисление правых частей этих формул в таких случаях сводится к конечному числу чисто алгебраических операций с коэффициентами Фурье для a и элементами матрицы Θ_x . Последние формулы описывают и “однофазовый” случай, т.е. когда Θ — скалярная функция и y — скалярная переменная. Тогда следует считать, что ν — это индекс, и формулы для $L_0^{(2)}, L_0^{(4)}$ несколько упростятся. Именно

$$R(x, p) = \frac{1}{C_0^2} \frac{\langle p, \Theta_x \rangle^2}{\Theta_x^2} \sum_{\nu \neq 0} |a_{\nu}|^2, \quad M(x, p) = \frac{1}{C_0^2 \Theta_x^2} \left(p^2 - 2 \frac{\langle p, \Theta_x \rangle^2}{\Theta_x^2} \right)^2 \sum_{\nu \neq 0} \frac{|a_{\nu}|^2}{\nu^2}.$$

Доказательство формул (2.15) и (2.16) мы приведем в п. 4.1.

Заменяя в уравнении (2.5) L на

$$L_{\text{appr}} = p^2 C_0^2 - \delta^2 R(x, p) - \delta^2 M(x, p) - \frac{i\varepsilon}{2} \langle \nabla_x, \nabla_p \rangle (p^2 C_0^2 - \delta^2 R(x, p)), \quad (2.17)$$

а затем импульсную переменную p на $-i\varepsilon \nabla_x$, мы получим уравнение типа линеаризованного уравнения Буссинеска. Мы его не выписываем, поскольку для построения асимптотических решений это не нужно, полученных формул для $R(x, p), M(x, p)$ уже достаточно. Забегая вперед, скажем, что поправочное слагаемое $-\delta^2 R(x, p)$ приводит к уменьшению скорости движения и искажению фронта решения, выражение $-\delta^2 M(x, p)$ (“слабодисперсионное” слагаемое) приводит к появлению осцилляций у профиля волны. Обратим внимание на знак “—” в этой формуле, из-за которого при небольших p функция $L_0^{(4)}$ отрицательна и который отличается от знака соответствующего слагаемого для известного в теории поверхностных волн (линеаризованного) уравнения Буссинеска. Такая “аномальная” дисперсия приводит к появлению осцилляций профиля “головы волны”, а не к осцилляциям “хвоста волны”, как это имеет место для уравнения Буссинеска (см. следующий раздел и рис. 3 ниже).

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ

Теперь приведем асимптотическое решение исходной задачи Коши. Как уже отмечалось, это решение получается в результате применения оператора $\chi(\frac{2}{\varepsilon}x, -i\varepsilon \nabla_x, y, \varepsilon)$ к решению w редуцированного уравнения (2.5). В качестве начальных условий для последнего мы выберем исходные начальные условия (1.2). Заметим, что, вообще говоря, в асимптотике решения исходного уравнения могут принимать участие все собственные функции (“моды”) оператора $\mathcal{H}_0$

(см. (2.7)). Моды, отличные от выбранной моды χ_0 , приводят к появлению быстрых осцилляций ($\sim 1/\varepsilon$) у решения, которые, однако, оказываются достаточно малыми и могут быть включены в поправки. Этот факт особенно легко устанавливается при предположении о том, что носитель начального возмущения и области быстрых осцилляций скорости C не пересекаются. Действительно, тогда легко видеть, что $\chi(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\overset{1}{\nabla}_x, y, \varepsilon) = 1$ в окрестности точки $x = 0$ и построенная функция $\chi(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\overset{1}{\nabla}_x, y, \varepsilon)w$ будет удовлетворять условиям (1.2), если им удовлетворяет w . Рассматриваемый пример — функция (1.4), вообще говоря, “размазана” по всей плоскости, однако, она тем не менее достаточно сильно локализована в окрестности начала координат, и поэтому учет “возбужденных” мод (т.е. отличных от выбранной собственной функции оператора $\mathcal{H}_0$) вносит в асимптотику решения малый вклад. При применении оператора $\chi(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\overset{1}{\nabla}_x, y, \varepsilon)$ к асимптотическому решению w редуцированного уравнения этот оператор можно заменить на единичный, ошибка при этом имеет порядок $O(\varepsilon/\mu)$ и несущественна при определении главного члена асимптотики. Тем самым главный член асимптотики решения исходной задачи (1.1), (1.2) совпадает с главным членом асимптотики решения той же задачи Коши (1.2), но уже для редуцированного “осредненного” уравнения (2.5) с оператором $L(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\overset{1}{\nabla}_x, \varepsilon)$, задаваемым разложением (2.17) его символа¹⁰. Скажем несколько слов о его поведении.

Сначала решение локализовано в окрестности точки $x = 0$, а затем с течением времени — в окрестности замкнутой кривой $\gamma_t = \{x = X(\psi, t), \psi \in [0, 2\pi]\}$, называемой *фронтом* на координатной плоскости $\mathbb{R}_x^2$, ψ — параметр на этой кривой. При малых временах γ_t — гладкая кривая, почти совпадающая с окружностью (в точности окружность для постоянного дна), но затем с изменением времени на ней, в зависимости от структуры дна, могут появляться нерегулярные точки: угловые точки (точки поворота или фокальные точки, в них $X_\psi = 0$) и точки самопересечения (рис. 2). Отметим, что под фронтом мы не понимаем множество точек, где профиль решения (профиль волны) будет максимальным или минимальным, решение будет только локализовано в его окрестности. Если траектории не проходят через области, где скорость C быстро осциллирует, то профиль волны (сечение функции u по нормали к фронту) представляет собой “уединенную волну”; если же траектории проходят через область быстрых осцилляций скорости C , то в этой области начинают играть роль дисперсионные эффекты и уже в главном члене у “головы” профиля волны (ввиду “аномальности дисперсии”) появляются осцилляции с длиной волны порядка μ (т.е. с длиной волны начального возмущения; см. рис. 3), которые нарастают со временем при прохождении через эту область и сохраняются даже после того, как траектория выйдет из этой области¹¹. Если учесть поправки к главному члену асимптотики, то они будут содержать осцилляции с длиной волны порядка ε , т.е. с длиной волны порядка осцилляций скорости C (или дна). Такого сорта осцилляции в поправках хорошо известны в задачах осреднения (см. [1]). Заметим также, что формулы для асимптотики волнового поля неодинаковы в окрестности регулярных точек фронта и фокальных точек. Развитые в [6] методы дают максимально простые интегральные формулы в окрестности как регулярных, так и нерегулярных точек, и они могут быть упрощены только при специально

¹⁰Условие “разнесенности” носителей начального возмущения и быстрых осцилляций не кажется существенным. Конечно, если это условие не выполнено, то в асимптотику решения начинают вносить вклад более высокие моды χ , но они имеют осцилляции с длиной волны $\sim \varepsilon$, и прикидочные вычисления показывают, что по этой причине их вклад в главный член асимптотики решения с начальным условием с длиной волны $\mu \gg \varepsilon$ оказывается малым.

¹¹Появление дисперсионных эффектов и связанных с ними осцилляций с длиной волны $\sim \mu$ можно объяснить следующим образом. Быстрые осцилляции дна приводят к отражению “назад” падающей на них волны, которая после этого отражается “вперед” уже пройденными осцилляциями и т.д. Осреднение этих отражений и дает указанные осцилляции профиля. Несколько неожиданным для авторов оказался эффект появления “дисперсных” осцилляций в его “голове”.

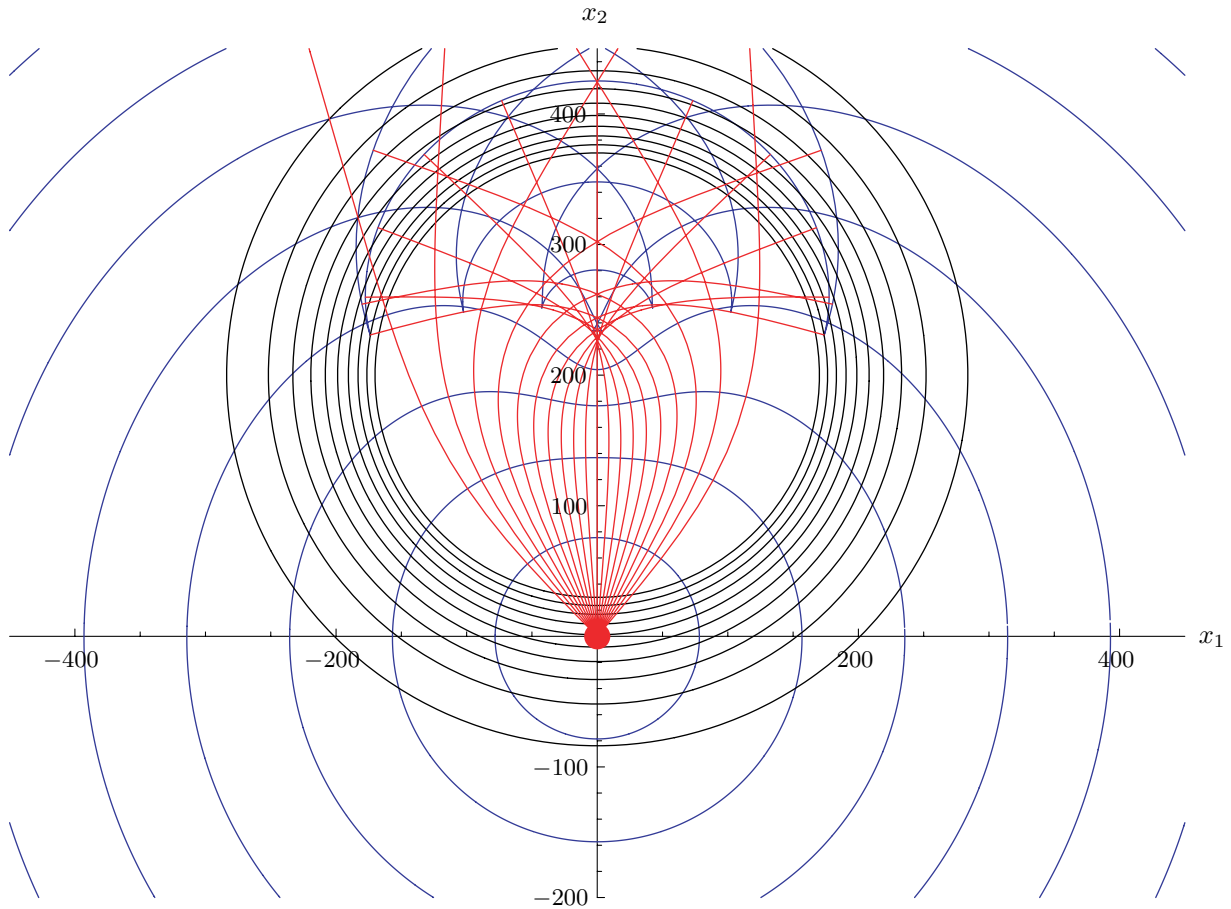


Рис. 2. Фронт и фокальные точки над банкой. Фронты сначала имеют вид окружностей, затем на них появляются точки поворота — фокальные точки. Профиль волны зависит от того, проходит соответствующая траектория фокальную точку или нет. Соответствующие профили изображены на рис. 3 ниже

выбранном начальном возмущении $V(z)$ в (1.4). Такое (по-видимому, в некотором смысле уникальное) возмущение описывается “алгебраической” функцией $V(z)$ вида (1.4), обладающей простым преобразованием Фурье — в этом случае даже в присутствии дисперсионных эффектов профиль волны явно определяется с помощью известных специальных функций. При этом получаемые формулы позволяют описать метаморфозу профиля волны после прохождения фокальных точек, связанную со скачками известных индексов Маслова и Морса. Соответствующие формулы и конструкции мы приводим ниже.

3.1. Асимптотика решения вне окрестности фокальных точек. Сначала опишем фронты γ_t . Вообще говоря, фронт волны описывается с помощью системы Гамильтона с функцией $\sqrt{L_0^{(2)}(x, p)}$ ($L_0^{(2)}(x, p)$ строго положительна). Для упрощения формул мы “переместим” добавку $-\delta^2 R(x, p)$ в уравнение для амплитуды и включим в гамильтониан лишь $p^2 C_0^2(x)$. Введем обозначение $H(x, p) = |p|C_0(x)$ и рассмотрим в 4-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{px}^4$ с координатами p_1, p_2, x_1, x_2 гамильтонову систему

$$\dot{p} = -H_x, \quad \dot{x} = H_p. \quad (3.1)$$

Поставим для нее при $t = 0$ следующие начальные условия:

$$p|_{t=0} = \mathbf{n}(\psi), \quad x = 0, \quad \mathbf{n}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}, \quad \psi \in [0, 2\pi]. \quad (3.2)$$

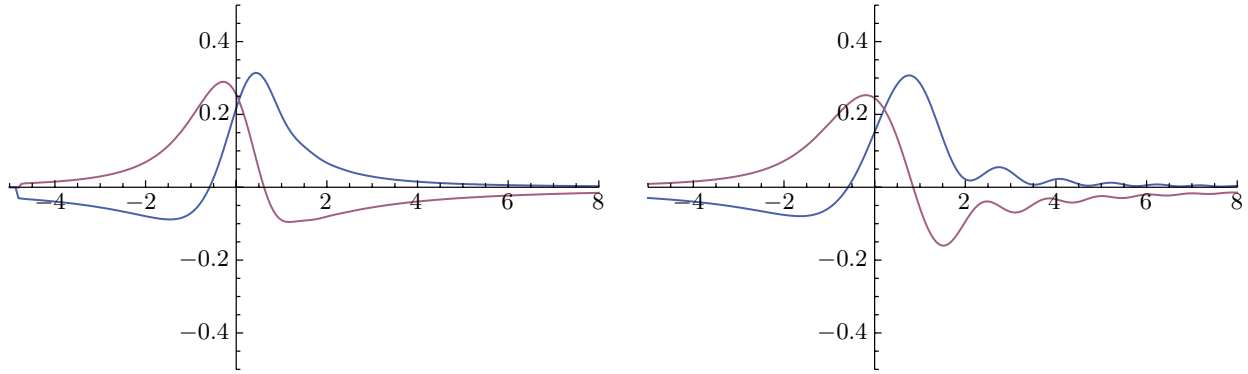


Рис. 3. Профили волн в окрестности фронта (источник расположен слева, волна бежит направо). Слева профили без учета осцилляций дна до прохождения (без впадины впереди, индекс Морса равен 0) и после прохождения (с впадиной впереди, индекс Морса равен 1) одной фокальной точки, справа аналогичные профили с осцилляциями в голове волны, вызванными осцилляциями дна

В фазовом пространстве $\mathbb{R}_{px}^4$ они задают окружность, параметризуемую углом ψ , проектирующуюся в точку $x = 0$ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $P(\psi, t), X(\psi, t)$ решения этой системы; при каждом фиксированном t множество $\Gamma_t = \{p = P(\psi, t), x = X(\psi, t)\}$, $\psi \in [0, 2\pi]$, определяет гладкую кривую в $\mathbb{R}_{px}^4$ — фронт (волны) в фазовом пространстве, а его проекция на плоскость $\mathbb{R}_x^2$ — фронт $\gamma_t = \{x = X(\psi, t)\}$, $\psi \in [0, 2\pi]$. В отличие от γ_t фронты Γ_t в $\mathbb{R}_{px}^4$ — всегда гладкие кривые; в частности, при $t = 0$ фронт γ_0 — точка $x = 0$, а Γ_0 — единичная окружность. Точки на фронте Γ_t или γ_t называются *регулярными* (неособыми), если $\partial X / \partial \psi \neq 0$, и *фокальными* (особыми), если $\partial X / \partial \psi = 0$ (см. рис. 2).

Пусть $\tilde{\gamma}_t$ — некоторая дуга фронта γ_t , состоящая из *нефокальных точек*. Точки x в ее окрестности будем характеризовать углом ψ и альтернированным расстоянием y . Именно, мы определяем окрестность волнового фронта для достаточно малой не зависящей от μ координаты y , введенной как отклонение точки x из окрестности волнового фронта от самого фронта. При этом примем, что $y \geq 0$ для внешней подобласти окрестности волнового фронта и $y \leq 0$ для внутренней подобласти. Тогда точка x в окрестности волнового фронта характеризуется двумя координатами: $\psi(t, x)$ и $v(t, x)$, где угол $\psi(t, x)$ определяется условием, что вектор $v = x - X(\psi, t)$ ортогонален вектору, касательному к волновому фронту в точке $X(\psi, t)$ такой, что $\langle v, X_\psi(\psi, t) \rangle = 0$.

Определим в окрестности дуги волнового фронта фазу волны

$$S(t, x) = \langle P(\psi(t, x), t), x - X(\psi(t, x), t) \rangle = \frac{C_0(0)}{C_0(X(\psi(t, x), t))} y. \quad (3.3)$$

Здесь второе равенство есть следствие ортогональности векторов P и X_ψ и сохранения гамильтониана $\mathcal{H}$ на траекториях системы (3.1) (см. [6–8]). Определим также топологическую характеристику $m(\tilde{\gamma}_t)$ дуги $\tilde{\gamma}_t$ — индекс Маслова, которая совпадает с индексом Морса траекторий, приходящих в эту дугу. Именно, зафиксируем некоторую траекторию $X(\psi, t)$, приходящую в $\tilde{\gamma}_t$ (т.е. некоторый угол ψ), тогда $m(\tilde{\gamma}_t)$ — это число нулей вектора X_ψ на траектории $X(\psi, \tau)$, $\tau \in [+0, t]$ (точнее, на траектории $\{P(\psi, \tau), X(\psi, \tau)\}$, $\tau \in [+0, t]$). При численных расчетах удобнее пользоваться эквивалентным определением: $m(\tilde{\gamma}_t)$ — это число изменений на траектории $\{P(\psi, \tau), X(\psi, \tau)\}$, $\tau \in [+0, t]$, знака $\det(P(\psi, \tau), X_\psi(\psi, \tau))$ (т.е. детерминанта матрицы, составленной из вектор-столбцов $P(\psi, \tau), X_\psi(\psi, \tau)$).

Утверждение 1. *Вне некоторой не зависящей от μ окрестности фронта решение равно $O(\mu)$. В окрестности нефокальных точек фронта асимптотическое решение задачи (1.1),*

(1.2) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_j \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{|X_\psi(\psi, t)|}} \sqrt{\frac{C_0(0)}{C_0(X(\psi, t))}} \operatorname{Re} \left(e^{-i\frac{\pi}{2}m(\psi, t)} F \left(\frac{S(x, t) + \delta^2 Y(\psi, t)}{\mu}, \psi, t \right) \right) \Big|_{\psi=\psi_j(x, t)} + o(\mu), \quad (3.4)$$

где

$$Y(\psi, t) = \frac{1}{2C_0(0)} \int_0^t R(X(\psi, t'), P(\psi, t')) dt',$$

суммирование ведется по всем j -м траекториям, в окрестность которых попала точка x , $m(\psi, t)$ — индекс Морса, отвечающий траектории $\psi = \psi_j(x, t)$. Функция $F(\xi, \psi, t)$ определяется начальными возмущениями (1.2) и выражается через преобразование Фурье функции $V(z)$:

$$F(\xi, \psi, t) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)) \exp\{i\rho(\xi + \lambda q \rho^3)\} d\rho, \quad \tilde{V}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) e^{-i\langle k, z \rangle} dz.$$

Здесь

$$q(\psi, t) = \frac{1}{2C_0(0)} \int_0^t M(X(\psi, t'), P(\psi, t')) dt', \quad \lambda = \frac{\delta^2 \varepsilon^2}{\mu^3}.$$

Вывод формул этого утверждения мы обсудим в п. 4.3.

3.2. Асимптотика решения в случае начального возмущения специального вида (1.4). Приведем формулы решения для функции $V(z)$ вида (1.4). Преобразование Фурье этой функции равно $\tilde{V}(k) = b_1 b_2 e^{-\sqrt{k_1^2 b_1^2 + k_2^2 b_2^2}}$. Введем обозначение $\beta(\psi) = \sqrt{b_1^2 \cos^2 \psi + b_2^2 \sin^2 \psi}$, тогда с помощью элементарных преобразований приходим к виду

$$F(y, \psi, t) = b_1 b_2 \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\rho} e^{i\rho y - \beta \rho + i\lambda q \rho^3} d\rho.$$

Определим функцию

$$\mathcal{F}(\xi, \beta, q) = -\frac{\pi}{\sqrt{2\lambda q}} \frac{d(\operatorname{Ai}^2(z) + i \operatorname{Ai}(z) \operatorname{Bi}(z))}{dz} \Big|_{z=Z(\xi, q, \lambda)}, \quad Z = \frac{(-\xi + i\beta(\psi))}{2\sqrt[3]{\lambda q}}, \quad (3.5)$$

где $\operatorname{Ai}(z)$ и $\operatorname{Bi}(z)$ — функции Эйри. Положим

$$\mathcal{F}_1(\xi, \psi, t) = b_1 b_2 \operatorname{Re}\{\mathcal{F}(\xi, \beta(\psi), q(\psi, t))\}, \quad \mathcal{F}_2(\xi, \psi, t) = b_1 b_2 \operatorname{Im}\{\mathcal{F}(\xi, \beta(\psi), q(\psi, t))\}.$$

Утверждение 2. Если в качестве функции $V(z)$ взять функцию вида (1.4), то в (3.4) $\operatorname{Re}(e^{-i\frac{\pi}{2}m} F(\xi, \psi, t))$ становится равной

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}_2(\xi, \psi, t) & \quad \text{для} \quad m = 0 + 4n, \\ -\mathcal{F}_1(\xi, \psi, t) & \quad \text{для} \quad m = 1 + 4n, \\ \mathcal{F}_2(\xi, \psi, t) & \quad \text{для} \quad m = 2 + 4n, \\ \mathcal{F}_1(\xi, \psi, t) & \quad \text{для} \quad m = 3 + 4n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство этого утверждения мы приведем в п. 4.3.

Графики функций $\operatorname{Re}(e^{-i\frac{\pi}{2}m}F(\xi, \psi, t))$ для $m = 0$ и $m = 1$ без учета и с учетом дисперсионных эффектов приведены на рис. 3.

3.3. Асимптотика с учетом фокальных точек в виде модифицированного канонического оператора Маслова. Утверждение 1 является следствием более общего утверждения, дающего решение задачи Коши (1.1), (1.2) во всех точках, включая фокальные. Достаточно подробное изложение соответствующих конструкций можно найти в [6–8]. Один из центральных объектов в конструкции канонического оператора — семейство зависящих от времени t лагранжевых многообразий, предложенных в указанных выше работах. Эти многообразия $\Lambda_t^2 = g_H^t \Lambda_0^2 \equiv \{p = \mathcal{P}(\psi, \alpha, t), x = \mathcal{X}(\psi, \alpha, t)\}$ получаются из многообразия

$$\Lambda_0^2 = \{p = n(\psi), x = \alpha \mathbf{n}(\psi); \psi \in [0, 2\pi], \alpha \in \mathbb{R}\} \quad (3.7)$$

с помощью сдвига g_H^t по траекториям гамильтоновой системы (3.1). Построим на Λ_t^2 канонический оператор Маслова $K_{\Lambda_t^2}^h$, положим $h = \mu/\rho$ и применим далее конструкцию, предложенную в [6, 8], с изменениями, сводящимися по сравнению с формулами из указанных работ к включению в “бездисперсионную” амплитуду $\tilde{V}$ множителя (3.9). Именно этот множитель сдвигает фронт и меняет форму профиля решения в его окрестности.

Утверждение 3. *Асимптотическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) имеет вид*

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{2\pi i}} \int_0^{+\infty} K_{\Lambda_t^2}^{\mu/\rho} [\sqrt{\rho} \tilde{V}(\rho n(\psi)) A(\rho, \alpha, \psi, t)] d\rho \right\} + o(\sqrt{\mu}), \quad (3.8)$$

$$A = \exp \left(i \int_0^t \frac{1}{2C_0(\alpha \mathbf{n}(\psi))} \left(\rho \frac{\delta^2}{\mu} R(x, p) + \rho^3 \lambda M(x, p) \right) \Big|_{x=\mathcal{X}(\psi, \alpha, t'), p=\mathcal{P}(\psi, \alpha, t')} dt' \right). \quad (3.9)$$

Важная модификация канонического оператора в этой формуле состоит во введении дополнительного параметра ρ и интегрированию по нему. Именно это наблюдение позволяет переходить от быстро осциллирующих решений к решениям, убывающим в окрестности фронта (см. [6, 8]). Подчеркнем также, что в отличие от многих нестационарных волновых задач, где фокальные точки появляются лишь с течением времени или даже не появляются вообще, в рассматриваемой ситуации фокальная точка $x = 0$ имеется с самого начала, именно поэтому здесь нужно привлекать конструкции, основанные на каноническом операторе Маслова. Упрощение формулы (3.8) вне окрестности фокальных точек, аналогичное проведенному в [6, 8], дает формулу (3.4). В окрестности фокальных точек ответ также может быть упрощен, однако в отличие от случая волнового уравнения с гладкими коэффициентами (см. [7]) выразить его прямо через известные специальные функции не удастся (по крайней мере пока). Наконец заметим, что на самом деле в асимптотике (3.4) принимают участие траектории двух гамильтоновых систем, соответствующих Гамильтонианам $\pm |p|C_0(x)$, однако асимптотика устроена таким образом, что в ответе можно сохранить только траектории, отвечающие $|p|C_0(x)$, и взять вещественную часть от соответствующей функции (см. [6]).

4. ПРИЛОЖЕНИЯ

4.1. Вычисление разложения символа L_0 по параметру δ . Мы уже отмечали, что в рассматриваемой ситуации L_0 можно находить в виде разложения по параметрам δ и импульсам p , причем для главного члена асимптотики достаточно ограничиться конечным числом

членов разложения. В этой работе мы ограничимся построением первой нетривиальной поправки теории возмущений L_0 по параметру δ .

Воспользуемся следующими известными элементарными формулами теории возмущений самосопряженных операторов (см., например, [26]). Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — самосопряженные операторы в некотором гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, λ', ϕ — невырожденное собственное значение и нормированная собственная функция оператора $\mathcal{A} + \delta\mathcal{B}$:

$$(\mathcal{A} + \delta\mathcal{B})\phi = \lambda'\phi, \quad (\phi, \phi) = 1.$$

Тогда если λ' и ϕ аналитичны по δ в окрестности $\delta = 0$ и $\phi = \phi_0 + \delta\phi_1 + \delta^2\phi_2 + O(\delta^3)$, $\lambda' = \lambda_0 + \delta\lambda_1 + \delta^2\lambda_2 + O(\delta^3)$, то

$$\lambda_1 = (\phi_0, \mathcal{B}\phi_0), \quad \lambda_2 = (\phi_1, (\mathcal{B} - \lambda_1)\phi_0). \quad (4.1)$$

Здесь $\phi_1 = -(\mathcal{A} - \lambda_0)^{-1}(\mathcal{B} - \lambda_1)\phi_0$, $(\phi_0, \phi_1) = 0$. В нашем случае

$$\mathcal{A} = \langle (p - i\nabla_y^\Theta), C_0^2(x)(p - i\nabla_y^\Theta) \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle (p - i\nabla_y^\Theta), a(y, x)(p - i\nabla_y^\Theta) \rangle, \quad \lambda' = L_0.$$

В качестве пространства $\mathbf{H}$ выберем пространство $L_2(\mathbb{T})$ на торе $\mathbb{T}$ с “нормированным” скалярным произведением $(\phi_1, \phi_2) = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{T}} \overline{\phi_1} \phi_2 dy^2$. Все собственные функции оператора $\mathcal{A}$ легко угадываются и равны $\exp\{i\langle \nu, y \rangle\}$, где ν — вектор-столбец с целочисленными компонентами $\nu_{1,2}$; нас интересует только $\phi_0 = \chi_{0,0} = 1$. Тогда соответствующее собственное значение $\lambda_0 = L_{0,0} = C_0^2(x)p^2$. Поэтому

$$\lambda_1 = L_{0,1} = (1, \langle (p - i\nabla_y^\Theta), a(y, x)(p - i\nabla_y^\Theta) \rangle 1) = p^2 \langle a \rangle_{\mathbb{T}} = 0.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \phi_1 = \chi_{0,1} &= -\frac{1}{C_0^2} (\Delta_y^\Theta + 2i\langle p, \nabla_y^\Theta \rangle)^{-1} \langle p - i\nabla_y^\Theta, a(y, x)(p - i\nabla_y^\Theta) \rangle 1 = \\ &= -\frac{1}{C_0^2} (\Delta_y^\Theta + 2i\langle p, \nabla_y^\Theta \rangle)^{-1} (p^2 - ip\nabla_y^\Theta) a(y, x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lambda_2 = L_{0,2} = -\left(\frac{1}{C_0^2} (\Delta_y^\Theta + 2i\langle p, \nabla_y^\Theta \rangle)^{-1} (p^2 - ip\nabla_y^\Theta) a(y, x), (p^2 - ip\nabla_y^\Theta) a(y, x) \right).$$

Представляя теперь функцию $a(y, x)$ в виде ряда Фурье и учитывая равенство $\nabla_y^\Theta \exp\{i\langle \nu, y \rangle\} = i \exp\{i\langle \nu, y \rangle\} \Theta_x \nu$ и ортогональность экспонент $\exp\{i\langle \nu, y \rangle\}$ с разными ν , получим

$$\begin{aligned} L_{0,2} &= \frac{1}{C_0^2} \sum_{\nu \neq 0} \left(|a_\nu(x)|^2 (\langle \Theta_x \nu, \Theta_x \nu \rangle + 2\langle p, \Theta_x \nu \rangle)^{-1} (p^2 + \langle p, \Theta_x \nu \rangle) (p^2 + \langle p, \Theta_x \nu \rangle) \right) = \\ &= \frac{1}{C_0^2} \sum_{\nu \neq 0} \left(|a_\nu(x)|^2 (\langle \Theta_x \nu, \Theta_x \nu \rangle + 2\langle p, \Theta_x \nu \rangle)^{-1} (p^2 + \langle p, \Theta_x \nu \rangle)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{C_0^2} \sum_{\nu \neq 0} \frac{|a_\nu(x)|^2}{\langle \Theta_x \nu, \Theta_x \nu \rangle} \left(|p|^4 + 2|p|^2 \langle p, \Theta_x \nu \rangle - \langle p, \Theta_x \nu \rangle^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{2|p|^2 \langle p, \Theta_x \nu \rangle^2 + \langle p, \Theta_x \nu \rangle^3}{\langle \Theta_x \nu, \Theta_x \nu \rangle} + 4 \frac{\langle p, \Theta_x \nu \rangle^4}{\langle \Theta_x \nu, \Theta_x \nu \rangle^2} \right) + O(|p|^5). \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие кубические по p выражения, нечетны по ν и пропадают после суммирования. Теперь, отделяя в этой формуле однородные полиномы второй и четвертой степеней, получим формулы (2.15), (2.16).

4.2. Вывод формул для амплитуды асимптотики решения редуцированного уравнения. Следуя работам [6, 8], будем искать решения редуцированного уравнения (2.5) в виде модифицированного канонического оператора Маслова (3.8), заданного на лагранжевом многообразии $\Lambda_t^2 = g_H^t \Lambda_0^2 \equiv \{p = \mathcal{P}(\psi, \alpha, t), x = \mathcal{X}(\psi, \alpha, t)\}$, действующего на неизвестную амплитуду A на Λ_t^2 . Цель последующих рассуждений — вывод уравнения для амплитуды A . Сначала перепишем редуцированное уравнение: разделим его на ε^2 и умножим на μ^2 , что приведет его к виду с оператором $-i\mu\nabla_x$ вместо оператора $-i\varepsilon\nabla_x$:

$$\mu^2 w_{tt} + \tilde{L}(\overset{2}{x}, -i\mu\nabla_x, \mu, \varepsilon, \delta) w = 0, \quad (4.2)$$

где символ $\tilde{L}$ имеет (асимптотическое) разложение

$$\tilde{L}(x, p, \mu, \varepsilon, \delta) = \tilde{L}_0(x, p) + \mu \tilde{L}_1(x, p) + o(\mu) Q(x, p, \mu, \varepsilon, \delta), \quad (4.3)$$

$$\tilde{L}_0 = p^2 C_0^2, \quad \tilde{L}_1 = -\frac{i\mu}{2} \langle \nabla_x, \nabla_p \rangle L_0 + \left(\frac{\delta^2}{\mu} R(x, p) + \lambda M(x, p) \right).$$

Здесь Q — символ псевдодифференциального оператора, устроенного так, что он дает функцию $O(1)$ при действии на функцию (3.8) (при условии, что выполнены соотношения между параметрами ε , μ и δ). Мы хотим воспользоваться известной формулой коммутации псевдодифференциального оператора и канонического оператора. Уравнение (4.2), однако, имеет второй порядок по времени, и по техническим соображениям его удобно факторизовать, представив (по крайней мере формально) в виде

$$\left(i\mu \frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{\tilde{L}(x, -i\mu\nabla_x, \mu, \varepsilon, \delta)} \right) \left(i\mu \frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\tilde{L}(x, -i\mu\nabla_x, \mu, \varepsilon, \delta)} \right) w = 0. \quad (4.4)$$

Для последующих вычислений оператор $\sqrt{\tilde{L}(x, -i\mu\nabla_x, \mu, \varepsilon, \delta)}$ следует представить в виде функции от операторов x , $-i\mu\nabla_x$: $\sqrt{\tilde{L}(x, -i\mu\nabla_x, \mu, \varepsilon, \delta)} = \mathcal{L}(x, -i\mu\nabla_x, \mu)$, задача состоит в вычислении символа $\mathcal{L}(x, p, \mu)$ этого оператора (зависимость от параметров δ , ε мы опускаем). Разумеется, точно это сделать не удастся, и речь может идти только об асимптотическом разложении по μ этого символа: $\mathcal{L}(x, p, \mu) = \mathcal{L}_0(x, p) + \mu \mathcal{L}_1(x, p) + \mu \mathcal{L}_2(x, p) + \dots$, при этом для построения главного члена асимптотики достаточно вычислить $\mathcal{L}_0(x, p)$, $\mathcal{L}_1(x, p)$. Для этого воспользуемся следующим приемом. Мы имеем операторное равенство

$$\tilde{L}(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\nabla_x, \mu, \varepsilon, \delta) = \left(\mathcal{L}(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\nabla_x, \mu) \right)^2 = \mathcal{L}(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\nabla_x, \mu) \mathcal{L}(\overset{2}{x}, -i\varepsilon\nabla_x, \mu).$$

Переходя с помощью известной формулы [16, 17] теории функций от некоммутирующих операторов от операторного равенства к равенству для символов этих операторов, получим уравнение $\mathcal{L}(\overset{2}{x}, p - i\varepsilon\nabla_x, \mu) \mathcal{L}(x, p, \mu) = L(x, p, \mu)$. Решая его с помощью теории возмущений, найдем $\mathcal{L}_0^2 = \sqrt{L_0}$, $2\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1 + i\mathcal{L}_0\langle \nabla_x, \nabla_p \rangle \mathcal{L}_0 = L_1$. Мы понимаем под квадратным корнем $\sqrt{\tilde{L}}$ неотрицательный оператор, поэтому из двух решений первого уравнения мы выбираем положительное. В результате получаем

$$\mathcal{L}_0 = |p| C_0(x), \quad \mathcal{L}_1 = -\frac{i}{2} \langle \nabla_x, \nabla_p \rangle \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2\mathcal{L}_0} \left(\frac{\delta^2}{\mu} R(x, p) + \lambda M(x, p) \right). \quad (4.5)$$

Заметим, что коэффициенты разложения $\mathcal{L}_j$ имеют степенные особенности при $p = 0$. Наличие этого обстоятельства не влияет на формулы для главного члена асимптотики рассматриваемой задачи (соответствующие особенности “убиваются” при интегрировании в (3.8) по

параметру ρ), однако оно требует дополнительного и не вполне тривиального исследования — введения “срезающей” функции, оценок и т.д. Соответствующие рассуждения, аналогичные приведенным в работе [6], мы опускаем.

Теперь мы применим формулу коммутации оператора $i\mu \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}(x, -i\mu \nabla_x, \mu)$ и канонического оператора (см. [18, лемма 7.13]) с учетом наличия дополнительного параметра ρ . Принимая во внимание определение лагранжева многообразия Λ_t^2 , получим

$$\begin{aligned} & \left(i\mu \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}(x, -i\mu \nabla_x, \mu) \right) \int_0^{+\infty} K_{\Lambda_t^2}^{\mu/\rho} [\sqrt{\rho} \tilde{V}(\rho n(\psi)) A(\alpha, \psi, t)] d\rho = \\ & = i\mu \int_0^{+\infty} K_{\Lambda_t^2}^{\mu/\rho} \left\{ \rho \left[\frac{d}{dt} - i \left(\frac{\delta^2}{\mu} \frac{R(x, p)}{2C_0(0)|p|} + \rho^3 \lambda \frac{M(x, p)}{2C_0(x)|p|} \right) \right]_{x=\mathcal{X}(\psi, \alpha, t), p=\mathcal{P}(\psi, \alpha, t)} + o(\mu) \right\} A d\rho. \end{aligned}$$

Множители ρ и ρ^3 появились здесь из-за того, что вместо параметра μ в нашей конструкции “проинтегрированного” канонического оператора стоит параметр μ/ρ . Функции $\mathcal{P}(\psi, \alpha, t)$, $\mathcal{X}(\psi, \alpha, t)$ определяют многообразие Λ_t^2 . Приравнявая к нулю старшую часть подынтегрального выражения, приходим к уравнению переноса на лагранжевом многообразии Λ_t^2 :

$$\frac{dA}{dt} - i \left(\frac{\delta^2}{\mu} \frac{R(\mathcal{X}, \mathcal{P})}{2C_0(\mathcal{X})|\mathcal{P}|} + \rho^3 \lambda \frac{M(\mathcal{X}, \mathcal{P})}{2C_0(\mathcal{X})|\mathcal{P}|} \right) A = 0,$$

где аргументы у $\mathcal{X}$, $\mathcal{P}$ — это (ψ, α, t) . Интегрирование этого уравнения с учетом сохранения гамильтониана $|p|C_0(x)$ на траекториях дает решение в виде

$$A = A_0(\psi, \alpha) \exp \left(i \int_0^t \frac{1}{C_0(\alpha \mathbf{n}(\psi))} \left(\frac{\delta^2}{\mu} R(\mathcal{X}, \mathcal{P}) + \rho^3 \lambda M(\mathcal{X}, \mathcal{P}) \right) dt \right),$$

где $A_0(\psi, \alpha)$ — константа интегрирования. В работе [6] показано, что если A_0 выбрать равной 1, то функция (3.8) будет удовлетворять начальным условиям (1.2). Эти рассуждения приводят к формулам утверждения 3, а их упрощение вне окрестности фокальных точек, аналогичное [6], — к формулам утверждения 1.

4.3. Представление асимптотики решения в случае специальных начальных данных через функции Эйри. Сначала докажем равенство (ср. [27, 28])

$$\mathcal{F}(y, \beta, q) \equiv \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho} e^{i\rho y - \beta\rho - i\lambda q\rho^3} d\rho = -\frac{\pi}{\sqrt{12q\lambda}} \frac{d(\text{Ai}^2(z) + i \text{Ai}(z) \text{Bi}(z))}{dz} \Big|_{z=\frac{x+i\beta}{(12q\lambda)^{1/3}}}, \quad (4.6)$$

где Ai , Bi — функции Эйри. Пусть функция $v(x)$ — решение уравнения Эйри $v''(x) - xv(x) = 0$. Прямое дифференцирование легко проверить (ср. [27]), что функция $f(x) = v'v$ удовлетворяет уравнению

$$f'''(x) - 4xf'(x) - 6f(x) = 0. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что комбинации функций Эйри и их производных $f_1(x) = \text{Ai}(x) \text{Ai}'(x)$, $f_2(x) = \text{Ai}(x) \text{Bi}'(x) + \text{Bi}(x) \text{Ai}'(x)$, $f_3(x) = \text{Bi}(x) \text{Bi}'(x)$ будут решениями этого уравнения. Поэтому решение $f(x)$ уравнения (4.7) можно представить в виде линейной комбинации $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x)$.

Далее рассмотрим функцию $\mathcal{F}(x, 0, q)$. Подставим ее в уравнение (4.7). Получим

$$i \int_0^{+\infty} \rho^3 \sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3} d\rho + 4xi \int_0^{+\infty} \rho \sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3} d\rho + 6 \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3} d\rho = 0.$$

Заметим, что

$$4\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3}) = 2\sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3} + 4ix\rho \sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3} + 12(-i\lambda q)\rho^3 \sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3}.$$

Подставим полученное равенство в уравнение для функции $\mathcal{F}(x, 0, q)$ и получим

$$i(1 + 12\lambda q) \int_0^{+\infty} \rho^3 \sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3} d\rho + 4 \int_0^{+\infty} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3}) d\rho + 4 \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3} d\rho = 0.$$

Проинтегрируем $\int_0^{+\infty} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{\rho} e^{i\rho x} e^{-iq\lambda\rho^3}) d\rho$ по частям и учтем, что подстановка на бесконечности обращается в нуль. Тогда при $q = -\frac{1}{12\lambda}$ функция $\mathcal{F}(x, 0, -1/(12\lambda))$ будет решением уравнения (4.7) и, как следствие, является комбинацией функций Эйри.

Перейдем в комплексную плоскость. Функция $\mathcal{F}(z, 0, -1/(12\lambda))$ также будет решением уравнения (4.7) в комплексной плоскости. При этом $\mathcal{F}(z, 0, -1/(12\lambda)) = \mathcal{F}(x, \beta, -1/(12\lambda))$ при $z = x + i\beta$. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(x, \beta, q) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho} e^{i\rho(x+i\beta)} e^{iq\lambda\rho^3} d\rho.$$

Перейдем к новой переменной интегрирования ρ' так, чтобы выполнялось условие $q\lambda\rho^3 = \rho'^3/12$. Тогда после преобразований получим

$$\mathcal{F}(x, \beta, q) = \frac{1}{\sqrt{12\lambda q}} \mathcal{F}(\zeta, 0, -1/(12\lambda)), \quad \text{где } \zeta = \frac{x + i\beta}{(12\lambda q)^{1/3}}.$$

Далее, опираясь на [29], рассмотрим асимптотическое поведение функций Эйри и сравним с поведением функции $\mathcal{F}(x + iv, 0, -1/(12\lambda))$. Это позволит нам определить коэффициенты a_i , $i = 1, 2, 3$. Для функций Эйри имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\text{Ai}(z) = \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{z}} (1 + O(z)), \quad |\arg z - \pi| < \pi - \varepsilon, \quad (4.8)$$

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{z}} \left(e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right) \right) + ie^{\frac{2}{3}z^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right) \right) \right), \quad |\arg z - \pi| < \varepsilon. \quad (4.9)$$

Под $\sqrt{z}$ и $\sqrt[4]{z}$ понимаются главные ветви многозначных функций. Асимптотика для Bi получается из асимптотик (4.8) и (4.9), а также формулы

$$\text{Bi}(z) = i\omega^2 \text{Ai}(\omega^2 z) - i\omega \text{Ai}(\omega z), \quad \omega = e^{i\frac{2}{3}\pi}. \quad (4.10)$$

Заметим, что функция $\mathcal{F}(x + iv, 0, -1/(12\lambda))$ гладкая и ограниченная при $v > 0$ и убывает при $|x| \rightarrow \infty$. Сравнивая формулы для $f_i(x + iv)$, $i = 1, 2, 3$, с формулами (4.8)–(4.10), получаем, что f_1 и f_2 ограничены при $x \rightarrow +\infty$, однако функция f_3 экспоненциально возрастает. Поэтому $a_3 = 0$. Поскольку при $x \rightarrow -\infty$ функции f_1 и f_2 экспоненциально возрастают,

единственная возможность получить ограниченную функцию при $x \rightarrow -\infty$ — это выбрать $a_2 = ia_1/2$. Таким образом, имеем

$$\mathcal{F}(x, \beta, q) = \frac{1}{\sqrt{12q\lambda}} \mathcal{F}(z, 0, -1/(12\lambda)) = \frac{a_1}{2\sqrt{12q\lambda}} \frac{d(\text{Ai}^2(z) + i \text{Ai}(z) \text{Bi}(z))}{dz} \Big|_{z=\frac{x+i\beta}{(12q\lambda)^{1/3}}}.$$

Теперь осталось определить коэффициент a_1 . Устремим в последней формуле q к нулю. Из (4.8)–(4.10) следует, что

$$\text{Bi}(z) = \frac{e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{z}} (1 + O(z)), \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} - \varepsilon.$$

Тогда при $q \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, \beta, +0) &= \lim_{q \rightarrow +0} \frac{a_1 i}{2\sqrt{12q\lambda}} \frac{d(\text{Ai}(z) \text{Bi}(z))}{dz} \Big|_{z=\frac{x+i\beta}{(12q\lambda)^{1/3}}} = - \lim_{q \rightarrow +0} \frac{a_1 i}{2\sqrt{12q\lambda}} \frac{1}{4\pi z^{3/2}} \Big|_{z=\frac{x+i\beta}{2\sqrt{12q\lambda}}} = \\ &= - \frac{a_1 i}{8\pi(x+i\beta)^{3/2}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из определения функции $\mathcal{F}$ следует $\mathcal{F}(x, \beta, +0) = \frac{i}{2\sqrt{2}(x+i\beta)^{3/2}}$. Отсюда получаем $a_1 = -2\pi\sqrt{2}$.

Теперь выразим через функцию $\mathcal{F}(y, \beta, q)$ интеграл

$$\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho} e^{i\rho y} e^{-\beta\rho} e^{i\lambda q\rho^3} d\rho.$$

Для этого возьмем комплексное сопряжение этой функции, изменим знак аргумента y и домножим полученное выражение на $e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Получим

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \overline{\mathcal{F}}(-y, \beta, q) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\rho} e^{i\rho y} e^{-\beta\rho} e^{i\lambda q\rho^3} d\rho.$$

Анализируя теперь выражение $\text{Re}[e^{-i\frac{\pi}{2}m} e^{-i\frac{\pi}{2}} \overline{\mathcal{F}}(-y, \beta, q)]$ и учитывая, что m принимает только целые значения, получим формулы (3.6).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приводятся достаточно эффективные асимптотические формулы (утверждения 1–3), описывающие решения задачи Коши с локализованным начальным условием малого размера μ для двумерного волнового уравнения со скоростью, состоящей из “медленно меняющегося фона” и наложенными на него быстрыми осцилляциями размера $\varepsilon \ll \mu$. Асимптотики строятся при помощи модифицированного канонического оператора Маслова в сочетании с методом осреднения, модифицированного на основе операторного варианта адиабатического приближения. Такой подход позволил применить метод осреднения для решений, имеющих быстрые изменения уже в главном члене асимптотики, и учесть появление (аномальных) дисперсионных эффектов, приводящих к осцилляциям профиля решения впереди фронта волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах: Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984.
2. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.

3. Марченко В.А., Хруськов Е.Я. Усредненные модели микро неоднородных сред. Харьков: Физ.-техн. ин-т низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, 2003.
4. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
5. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: Ин-т прикл. физики, 1996.
6. Dobrokhotov S.Yu., Shafarevich A.I., Tirozzi B. Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations // Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15, N 2. P. 192–221.
7. Dobrokhotov S.Yu., Tirozzi B., Vargas C.A. Behavior near the focal points of asymptotic solutions to the Cauchy problem for the linearized shallow water equations with initial localized perturbations // Russ. J. Math. Phys. 2009. V. 16, N 2. P. 228–245.
8. Dobrokhotov S.Yu., Nekrasov R.V., Tirozzi B. Asymptotic solutions of the linear shallow-water equations with localized initial data // J. Eng. Math. 2011. V. 69, N 2–3. P. 225–242.
9. Брюнинг Й., Грушин В.В., Доброхотов С.Ю. Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 2. С. 163–180.
10. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Классические и неклассические разрывы и их структуры в нелинейно-упругих средах с дисперсией и диссипацией. М.: МИАН, 2007. (Совр. пробл. математики; вып. 7).
11. Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Автомодельные асимптотики, описывающие нелинейные волны в упругих средах с дисперсией и диссипацией // ЖВМиМФ. 2010. Т. 50, № 12. С. 2261–2274.
12. Доценко С.Ф., Сергеевский Б.Ю., Черкесов Л.В. Пространственные волны цунами, вызванные знакопеременным смещением поверхности океана // Исследования цунами. М.: Междувед. геофиз. ком., 1986. Вып. 1. С. 7–14.
13. Wang S. The propagation of the leading wave // Coastal hydrodynamics: Proc. ASCE Specialty Conf., Univ. Delaware, June 28–July 1, 1987. New York: ASCE, 1987. P. 657–670.
14. Доброхотов С.Ю., Волков Б.И., Секерж-Зенькович С.Я., Б.Тироцци Асимптотическое описание волн цунами в рамках поршневой модели: общие конструкции и явно решаемые примеры // Фунд. и прикл. геофизика. 2009. № 2. С. 15–29.
15. Доброхотов С.Ю., Секерж-Зенькович С.Я. Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 6. С. 942–945.
16. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
17. Belov V.V., Dobrokhotov S.Yu., Tudorovskiy T.Ya. Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics // J. Eng. Math. 2006. V. 55, N 1–4. P. 183–237.
18. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965.
19. Маслов В.П., Федоряк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
20. Доброхотов С.Ю. Приложение теории Маслова к двум задачам для уравнений с операторнозначным символом: электрон-фононное взаимодействие и уравнение Шрёдингера с быстроосциллирующим потенциалом // УМН. 1984. Т. 39, № 4. С. 125.
21. Берлянд Л.В., Доброхотов С.Ю. “Операторное разделение переменных” в задаче о коротковолновой асимптотике для дифференциальных уравнений с быстро меняющимися коэффициентами // ДАН СССР. 1987. Т. 296, № 1. С. 80–84.
22. Буслаев В.С. Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. 1987. Т. 42, № 6. С. 77–98.
23. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. Ч. 2: Теория конденсированного состояния. М.: Наука, 1978.
24. Грушин В.В., Доброхотов С.Ю. Подстановка Пайерлса и операторный метод Маслова // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 554–571.
25. Брюнинг Й., Грушин В.В., Доброхотов С.Ю., Тудоровский Т.Я. Обобщенное преобразование Фолди-Вутхайзена и псевдодифференциальные операторы // ТМФ. 2011. Т. 167, № 2. С. 171–192.
26. Kato T. Perturbation theory for linear operators. Berlin: Springer, 1966. Рус. перев.: Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
27. В.А. Боровиков, М.Я. Кельберт Поле вблизи фронта волны в задаче Коши-Пуассона // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 2. С. 173–174.
28. Sekerzh-Zenkovich S.Ya. Simple asymptotic solution of the Cauchy-Poisson problem for head waves // Russ. J. Math. Phys. 2009. V. 16, N 2. P. 315–322.
29. Федоряк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.