УДК 519.17

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССАХ ГРАФОВ III

В.Е. Алексеев, [1] ***В.А. Замараев,*** [2,1] ***Д.В. Захарова,*** [1]
Д.С. Малышев, [2,1] ***Д.Б. Мокеев,*** [2,1] ***С.В. Сорочан*** [1]

[1]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского
[2]Нижегородский филиал Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

dsmalyshev@rambler.ru

Поступила в редакцию 04.06.2013

Рассматриваются вопросы асимптотического перечисления наследственных классов графов и их структурного описания, исследуется сложность некоторых задач на таких классах.

Ключевые слова: наследственный класс графов, запрещенный порожденный подграф, фильтрованный класс графов, вычислительная сложность, эффективный алгоритм, упаковки графов, покрытия графов.

Введение

Целью настоящей статьи является подведение итогов работ в области теории графов, выполненных в течение года коллективом авторов. Исследования велись в разных направлениях, и статья состоит из шести частей, тематически слабо связанных между собой. Мы не приводим здесь доказательств, развернутое изложение будет дано в отдельных публикациях по каждой теме.

Объединяет части данной статьи то, что в них рассматриваются *наследственные классы графов*, т.е. множества графов, замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин. Эквивалентно – это класс, который можно задать запрещенными порожденными подграфами. Если **X** – множество графов, то через *Free*(**X**) обозначается класс всех графов, не содержащих порожденных подграфов, изоморфных графам из **X**. Множество графов **Y** является наследственным классом тогда и только тогда, когда **Y**=*Free*(**X**) для некоторого **X**. Наследственный класс называется *монотонным*, если он замкнут еще и относительно удаления ребер. Наследственный класс графов, замкнутый относительно удалений и стягиваний ребер, называется *минорно замкнутым*.

В первой части настоящей статьи рассматривается понятие фильтрованного класса графов и показывается, что для любого такого класса задача о клике полиномиально разрешима.

Во второй части рассматривается задача редактирования графа и показывается, что эта задача полиномиально разрешима для графов, близких в смысле расстояния Хемминга к бессвязному объединению двух клик.

В третьей части выявляются новые случаи полиномиальной разрешимости задачи о раскраске.

В четвертой части исследуется связь между полной квазиупорядоченностью наследственного класса по отношению «быть (порожденным) подграфом» и числом графов в этом классе.

Пятая часть посвящена вопросам асимптотического перечисления наследственных классов графов с раскрашенными ребрами.

В шестой части рассматриваются графы, у которых для каждого порожденного подграфа совпадают мощности наименьшего покрытия и наибольшей упаковки 4-путей. Они интересны тем, что для них отсутствует разрыв двойственности в соответствующих задачах целочисленного линейного программирования. В этой работе найдены некоторые запрещенные порожденные подграфы для рассматриваемого класса графов.

В работе использованы следующие обозначения для графов: P_n и C_n – простые путь и цикл с n вершинами; O_n и K_n – пустой и полный графы с n вершинами; $K_n - e$ – результат удаления из K_n произвольного ребра; $K_{p,q}$ – полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле; H_i – граф, получающийся соединением простым путем длины i двух вершин степени два в двух экземплярах графа P_3; $hammer$ – граф с множеством вершин $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и множеством ребер $\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_3),(x_1,x_4),(x_4,x_5)\}$; $\overline{G}$

– граф, дополнительный к G; $G_1 \oplus G_2$ – объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин; pG – бессвязное объединение p экземпляров графа G.

Сложность задачи о клике для классов графов, замкнутых относительно пересечения графов

Множество вершин графа, порождающее полный подграф, называют *кликой*, а порождающее пустой подграф – *независимым множеством*, то есть в клике все вершины попарно смежны, а в независимом множестве – попарно несмежны. В задачах о клике и о независимом множестве требуется найти соответствующее множество наибольшей мощности. Такие задачи принадлежат к числу классических NP-трудных задач теории графов. Имеется много работ, в которых устанавливается трудность либо полиномиальная разрешимость этих задач для тех или иных классов графов. При этом, несмотря на тесную связь между двумя задачами, их сложностной статус для одного и того же класса может различаться. Например, для планарных графов задача о независимом множестве NP-трудна, а задача о клике тривиальным образом решается за полиномиальное время. Систематическое исследование сложности задачи о независимом множестве на наследственных классах графов было начато в работе [1].

В семействе всех наследственных классов ситуация со сложностью задач о клике и о независимом множестве зеркально симметричная: сложностной статус задачи о клике для наследственного класса $\mathbf{X}$ такой же, как у задачи о независимом множестве для класса графов, дополнительных к графам из $\mathbf{X}$. Для монотонных классов картина другая. В [2] проведено четкое разграничение по сложности этой задачи в семействе всех монотонных конечно определенных (т.е. определенных конечными множествами запрещенных подграфов) классов. Именно, для всех таких классов, включающих некоторый класс $\mathbf{T}$, задача о независимом множестве NP-трудна, а для тех, которые его не включают, она решается за полиномиальное время. Для задачи о клике разграничение тривиально: для класса всех графов она NP-трудна, а для любого другого монотонного класса решается за полиномиальное время. Это происходит оттого, что для всякого нетривиального монотонного класса имеется запрещенный полный граф, а значит, мощность наибольших клик в графах из такого класса ограничена. В связи с этим представляет интерес ситуация со сложностью задачи о клике в семействе классов графов, промежуточном между семействами монотонных и наследственных классов. Такое семейство было рассмотрено в [3], составляющие его классы названы в этой работе фильтрованными.

Пересечением графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. *Фильтрованный класс графов* – это класс, замкнутый относительно пересечений. В [3] установлено, что всякий монотонный класс является фильтрованным, а всякий фильтрованный – наследственным, оба включения строгие. По некоторым данным, семейство фильтрованных классов кажется более близким к семейству монотонных, нежели к семейству наследственных. Приводимый ниже результат о сложности задачи о клике на фильтрованных классах подтверждает это впечатление. Класс графов называем *нетривиальным*, если он отличен от класса всех графов.

Теорема 1. Для любого нетривиального класса фильтрованных графов задача о клике решается за полиномиальное время.

Отметим, что нетривиальный фильтрованный класс в отличие от нетривиального монотонного класса может содержать графы со сколь угодно большими кликами. Таков, например, класс всех полных графов, и это не единственный пример, так как объединение любого фильтрованного класса с классом всех полных графов является фильтрованным классом. Ниже приводятся утверждения, из которых следуют сформулированная теорема, а также некоторые свойства фильтрованных классов, которые могут быть полезны для их дальнейшего изучения.

Лемма 1. Для любого нетривиального фильтрованного класса существует такое p, что граф $K_p - e$ не принадлежит этому классу.

Лемма 2. Для любого нетривиального фильтрованного класса существует такое p, что граф $\overline{pK_2}$ не принадлежит этому классу.

Лемма 3. Для любого нетривиального фильтрованного класса существует такое k, что в графах из этого класса любые две клики имеют не более k общих вершин.

Лемма 4 [4]. Если наследственный класс графов не содержит графа pK_2, то число максимальных независимых множеств в графах из этого класса ограничено сверху полиномом степени $p-1$ от числа ребер.

Лемма 5 [5]. Существует алгоритм, который находит все максимальные независимые множества в графе с n вершинами, m ребрами и

s максимальными независимыми множествами за время $O(nms)$.

Алгоритмы решения задач редактирования и кластеризации для симметрических линейных пространств графов

Редактирование графа – это семейство задач, в которых требуется превратить данный граф в граф с предписанным свойством, изменяя (добавляя или удаляя) наименьшее число ребер. Для многих свойств эта задача NP-трудна, для некоторых решается за полиномиальное время (см., например, [8]). В этой работе в качестве «целевых» классов (свойств) рассматриваются симметрические линейные пространства графов. Рассмотрение именно линейных пространств навеяно аналогией задачи редактирования графа с задачей декодирования помехоустойчивого кода. Линейные коды – наиболее популярный вид помехоустойчивых кодов, и в большинстве случаев алгоритмы декодирования разрабатываются именно для них. Симметричность понимается как замкнутость относительно изоморфизма, и это вполне естественное требование, когда речь идет о классах графов.

Линейные пространства графов можно рассматривать как частный вид помехоустойчивых кодов, один класс таких кодов известен как теоретико-графовые коды [7]. В другой интерпретации задачи редактирования граф изображает результаты некоторых экспериментов. Каждый отдельный эксперимент устанавливает наличие или отсутствие ребра между двумя вершинами. Известно, что в результате всех экспериментов (для всех пар вершин) должен получиться граф с некоторыми свойствами. Но результаты некоторых экспериментов могут оказаться ошибочными. При естественных предположениях о вероятностях таких ошибок решение задачи редактирования дает «правильный» граф, с наибольшей вероятностью согласующийся с результатами экспериментов.

Симметрическое линейное пространство графов – это множество графов с одним и тем же множеством вершин V, замкнутое относительно перестановок вершин и суммы графов по модулю 2. Все симметрические линейные пространства графов описаны в [6]. При любом фиксированном числе вершин их имеется не более 14, причем они делятся на два отчетливо выраженных типа. В классах первого типа принадлежность графа к классу определяется четностью или нечетностью степеней и числа ребер. Это классы

- $\mathbf{B}_1$ – все графы с множеством вершин V,
- $\mathbf{B}_2$ – графы с четным числом ребер,
- $\mathbf{B}_3$ – графы, у которых степени всех вершин имеют одинаковую четность,
- $\mathbf{B}_4$ – графы, у которых степени всех вершин имеют одинаковую четность, совпадающую с четностью числа ребер,
- $\mathbf{B}_5$ – графы с четными степенями всех вершин,
- $\mathbf{B}_6 = \mathbf{B}_2 \cap \mathbf{B}_3$,
- $\mathbf{B}_7 = \mathbf{B}_2 \cap \mathbf{B}_5$.

Отметим, что при нечетном числе вершин $\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_5$, $\mathbf{B}_4 = \mathbf{B}_6 = \mathbf{B}_7$.

Теорема 2. Для каждого из классов $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_7$ задача редактирования решается за линейное время.

Классы второго типа состоят из полных двудольных графов и двойных клик (графов, дополнительных к полным двудольным) с различными ограничениями на четность степеней. Это классы

- $\mathbf{L}_1$ – все полные двудольные графы и двойные клики,
- $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{B}_5$,
- $\mathbf{L}_3$ – полные двудольные графы с четными степенями и двойные клики с нечетными степенями всех вершин,
- $\mathbf{L}_4$ – все полные двудольные графы,
- $\mathbf{L}_5 = \mathbf{L}_4 \cap \mathbf{B}_5$,
- $\mathbf{L}_6$ – полный и пустой графы,
- $\mathbf{L}_7$ – пустой граф.

Для двух последних классов задача редактирования тривиальна, для остальных справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Задача редактирования для каждого из классов $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_5$ NP-трудна.

Доказательство основано на известном факте NP-трудности задачи кластеризации с двумя кластерами [9]. В этой задаче требуется превратить данный граф в двойную клику наименьшим числом изменений ребер, то есть это задача редактирования, в которой целевой класс – двойные клики. Класс всех двойных клик сам не является линейным пространством, но он – зеркальное отражение пространства $\mathbf{L}_4$ и смежный класс пространства $\mathbf{L}_1$ относительно $\mathbf{L}_4$.

Для классов $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_5$ предлагаются полиномиальные по времени алгоритмы редактирования, дающие точные решения, когда входной граф достаточно близок к целевому классу.

Пусть d – наименьшее различие между графами в данном классе. Тогда предлагаемые алгоритмы дают оптимальное решение во всех случаях, когда входной граф находится на расстоянии не более $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ от целевого класса. Это аналогично декодированию помехоустойчивых кодов, исправляющему все ошибки, исправление которых гарантируется кодовым расстоянием.

Все алгоритмы для классов $\mathbf{L_1}-\mathbf{L_5}$ основаны на базовом алгоритме для задачи кластеризации. Он действует следующим образом.

Множество вершин графа произвольным образом разбивается на два подмножества, и вычисляется расстояние от данного графа до двойной клики, в которой эти подмножества являются кликами. Затем рассматриваются все графы, получаемые переносом одной вершины из одного множества в другое, и для каждого из них тоже вычисляется соответствующее расстояние. Если для какой-то вершины оно оказывается меньше исходного расстояния, то эта вершина действительно переносится. Это повторяется, пока переносы не прекратятся.

Теорема 4. Если данный граф отличается от двойной клики не более чем на $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ ребер, то описанный алгоритм найдет оптимальное решение задачи кластеризации.

О сложности задачи о раскраске для классов графов, определяемых запрещенными фрагментами небольшого размера

Задача о раскраске графа состоит в том, чтобы раскрасить вершины заданного графа в минимальное число цветов так, чтобы соседние вершины графа были окрашены в разные цвета. Данная задача является одной из классических задач теории графов, изучению ее вычислительного статуса для тех или иных классов графов посвящено немало работ. Иногда такое исследование проводится для интересного с той или иной точки зрения наследственного класса, а иногда сразу для некоторых семейств, состоящих из наследственных классов [10–14]. В публикации [15] было доказано, что данная задача является полиномиально разрешимой в классе $Free(\{H\})$, если H – порожденный подграф пути P_4 или графа $P_3 \oplus K_1$, и NP-полной в противном случае. В работе [16] для всех (кроме $Free(\{K_{1,3}, O_4\})$, $Free(\{K_{1,3}, K_2 \oplus 2K_1\})$ и $Free(\{K_{1,3}, O_4, K_2 \oplus 2K_1\})$) наследственных классов, у которых запрещенные фрагменты содержат не более четырех вершин, был определен вычислительный статус задачи о раскраске. Полиномиальная разрешимость задачи о раскраске имеет место для некоторых классов, определенных порожденными запретами с не более чем пятью вершинами.

Теорема 5. Задача о раскраске полиномиально разрешима в классах графов $Free(\{K_{1,3}, P_5\})$, $Free(\{K_{1,3}, C_3 \oplus K_2\})$ и $Free(\{K_{1,3}, hammer\})$.

О связи полной квазиупорядоченности наследственного класса с числом графов в этом классе

В данном разделе рассматриваются обыкновенные графы, вершины которых помечены натуральными числами. Если $\mathbf{X}$ – множество графов, то через $\mathbf{X_n}$ обозначается подмножество n-вершинных графов из $\mathbf{X}$. Говорят, что класс графов $\mathbf{X}$ *не более чем факториальный*, если существуют положительные константы c и n_0, такие, что $|\mathbf{X_n}| \le n^{cn}$ для всех $n > n_0$.

Бинарное отношение $\le$ на множестве S называется *квазипорядком*, если оно обладает свойствами рефлексивности и транзитивности. Множество S с заданным на нем квазипорядком $\le$ называется *квазиупорядоченным* и обозначается парой $(S, \le)$. Два элемента $x, y \in S$ называются *несравнимыми*, если ни $x \le y$, ни $y \le x$. Подмножество S попарно несравнимых элементов называется *антицепью*. Квазиупорядоченное множество $(S, \le)$ называется *вполне квазиупорядоченным*, если оно не содержит бесконечных антицепей и любое его непустое подмножество имеет минимальный элемент. Для всех здесь рассматриваемых отношений условие наличия минимального элемента в любом непустом подмножестве выполнено всегда, поэтому далее изучается только вопрос наличия или отсутствия бесконечных антицепей.

Теорема 6 [17]. Класс всех графов вполне квазиупорядочен отношением «быть минором».

Однако теорема 6 неверна для отношений «быть подграфом» или «быть порожденным подграфом». Нетрудно видеть, что множество простых циклов $\{C_3, C_4, C_5, \ldots\}$ является бесконечной антицепью для каждого из этих отношений. С другой стороны, некоторые классы графов могут оказаться вполне квазиупорядоченными по указанным отношениям. Например, класс $Free(\{P_4\})$ вполне квазиупорядочен отношением «быть порожденным подграфом» [18]. Однако его надкласс $Free(\{P_5\})$ содержит бесконечную антицепь по этому же отношению, состоящую из дополнений к простым циклам. Помимо этого отличия упомянутые выше классы существенно различаются еще и по мощности. Известно, что число n-вершинных графов в первом из этих классов есть $n^{\Theta(n)}$, а во втором – $2^{\Theta(n^2)}$ (см., например, [19]). Это наблюдение согласуется с интуитивным чувством, что чем шире класс графов, тем больше шансов найти в нем бесконечную антицепь, и наоборот.

Известно, что любой минорно замкнутый класс, отличный от класса всех графов, не более чем факториальный [20]. Таким образом, с учетом теоремы 6 любой минорно замкнутый класс не более чем факториален тогда и только тогда, когда он отличен от класса всех графов.

Кроме множества простых циклов и множества дополнений к простым циклам ещё одной бесконечной антицепью по отношению «быть (порожденным) подграфом» является множество мостов $\{H_1, H_2, H_3, \ldots\}$. Для монотонных классов G. Ding доказал следующий критерий.

Теорема 7 [21]. Монотонный класс графов вполне квазиупорядочен отношением «быть подграфом» тогда и только тогда, когда в нем содержится конечное число простых циклов и конечное число мостов.

В.Е. Алексеев в [22] показал, что любой монотонный класс, не содержащий хотя бы одно дерево, является не более чем факториальным. Отсюда и из теоремы 7 следует, что всякий монотонный класс, вполне квазиупорядоченный отношением «быть подграфом», является не более чем факториальным. Это наблюдение побудило В.В. Лозина предположить, что аналогичное утверждение справедливо и для наследственных классов. Именно, любой наследственный класс графов, вполне квазиупорядоченный отношением «быть порожденным подграфом», не более чем факториальный. Далее гипотеза Лозина проверяется для двух семейств наследственных классов.

Двудольный граф называется *хордальным двудольным*, если всякий его цикл с не менее чем шестью вершинами имеет хорду.

Теорема 8. Всякий наследственный подкласс класса хордальных двудольных графов, вполне квазиупорядоченный отношением «быть порожденным подграфом», является не более чем факториальным.

Обозначим через **Bip** множество двудольных графов.

Теорема 9. Любой наследственный класс $\mathbf{X} \subseteq Free(\{K_{s,s}\}) \cap \mathbf{Bip}$, где $s \in \mathrm{N}$, вполне квазиупорядоченный отношением «быть порожденным подграфом», является не более чем факториальным.

Если количество графов в наследственном классе растет не очень быстро, то он является вполне квазиупорядоченным по отношению «быть порожденным подграфом».

Теорема 10. Если $\mathbf{X}$ – наследственный класс и $|\mathbf{X_n}| < n^{(1+o(1))n}$, то $\mathbf{X}$ вполне квазиупорядочен отношением «быть порожденным подграфом».

Энтропийно минимальные классы цветных графов

Пусть $\mathbf{X_n}$ – множество всех графов из наследственного класса $\mathbf{X}$, имеющих ровно n вершин. В работе [23] получено асимптотическое выражение для логарифма числа графов в этом множестве:

$$\log_2 |\mathbf{X_n}| = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{c(\mathbf{X})} + o(1)\right).$$

Величина $h(\mathbf{X}) = 1 - 1/c(\mathbf{X})$ называется *энтропией наследственного класса* $\mathbf{X}$. Она является предельным «коэффициентом сжатия» при кодировании графов из $\mathbf{X}$ с ненулевой энтропией, поскольку самое экономное двоичное представление графа с n вершинами из $\mathbf{X}$ асимптотически использует $\frac{n^2 h(\mathbf{X})}{2}$ бит [23].

При изучении областей значений энтропии целесообразно рассматривать обобщения обыкновенных графов – ориентированные и цветные графы. Напомним, что *ориентированным* называется граф с ориентированными ребрами, а *цветным* называется граф с раскрашенными ребрами (более конкретно, q*-графом* называется граф, каждое ребро которого покрашено в один из q цветов множества цветов Q). Для данных типов графов удается обнаружить принципиально новое явление – существование бесконечного множества точек сгущения энтропии классов из таких графов [24], в то время как в случае обыкновенных графов такая точка единственна.

С целью более детального изучения классов графов с заданным значением энтропии недавно было введено понятие *энтропийно минимального класса графов* как наследственного класса, не содержащего собственных наследственных подклассов с тем же значением энтропии. Все энтропийно минимальные классы обыкновенных графов были найдены и описаны в [23]. Именно, каждый такой класс, отличный от множества всех графов, совпадает с классом

$\mathbf{K}^i\mathbf{O}^j$ при некоторых i и j. Обыкновенные графы можно рассматривать как 2-графы, поскольку каждое ребро любого такого графа можно покрасить в первый цвет и добавить несколько ребер до полного графа, покрашенных во второй цвет. Оказывается, что:

Теорема 11. Все энтропийно минимальные классы обыкновенных графов с произвольно раскрашенными в q цветов ребрами являются также и энтропийно минимальными классами q-графов при любом $q > 2$.

Каждый q-граф имеет следующее матричное представление. Рассмотрим произвольное разбиение множества вершин текущего графа на такие части $V_1, V_2, ..., V_k$, что для любых двух подмножеств V_i и V_j цвет каждого ребра $(x, y) \subseteq V_i \times V_j$ принадлежит некоторому подмножеству $Q_{i,j} \subseteq Q$. Элементы соответствующей матрицы – множества цветов $Q_{i,j}$. Поскольку разбиение на подмножества не единственно, то и матричных представлений может быть несколько. При $q = 2$ упомянутые выше классы энтропийно минимальных обыкновенных графов описываются матрицами, у которых все множества, стоящие на диагонали, имеют мощность 1, а все остальные – мощность 2.

Пусть M – симметричная матрица, элементами которой являются произвольные непустые подмножества множества Q. Обозначим через $\mathbf{K}(M)$ множество тех q-графов, которые допускают матричное представление M. Пусть N – произвольная подматрица M, получающаяся вычеркиванием из M строки и столбца с одинаковыми номерами. Если для любой такой подматрицы N выполняется неравенство $h(\mathbf{K}(N)) < h(\mathbf{K}(M))$, то матрицу M назовем *энтропийно неприводимой.*

Теорема 12. Класс $\mathbf{K}(M)$ является энтропийно минимальным тогда и только тогда, когда матрица M является энтропийно неприводимой.

Класс $\mathbf{K}(M)$ – частный случай композиции наследственных классов q-графов, введенной в работе [25], а энтропийно неприводимым матрицам соответствуют классы, названные в [26] правильными регулярными композициями. Полученный результат усиливает результат из [26], где доказано, что правильные регулярные композиции являются минимальными по включению композициями с данным значением энтропии.

Разработка алгоритма распознавания кениговых графов относительно 4-пути

Пусть $\mathbf{X}$ – некоторое множество графов. $\mathbf{X}$-*упаковкой* графа G называется множество его непересекающихся порожденных подграфов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь графу из $\mathbf{X}$. $\mathbf{X}$-*покрытием графа* G называется множество вершин, после удаления которых получается граф, не содержащий порожденных подграфов, принадлежащих $\mathbf{X}$. Граф G называется *кениговым* графом относительно множества $\mathbf{X}$, если для любого его порожденного подграфа H наибольшее число подграфов в $\mathbf{X}$-упаковке равно мощности наименьшего $\mathbf{X}$-покрытия. Класс всех кениговых графов относительно $\mathbf{X}$ обозначается через $K(\mathbf{X})$. Этот класс при любом $\mathbf{X}$ является наследственным и, следовательно, может быть описан множеством минимальных запрещенных (порожденных) подграфов. Понятие кенигова графа было введено в работе [27], где были также найдены некоторые запрещенные подграфы для класса $K(\{P_3\})$. Также известен подобный результат для класса $K(\boldsymbol{C})$, где $\boldsymbol{C}$ – множество всех простых циклов (в работе [28]). В данной работе рассматривается класс $K(\{P_4\})$.

Для того чтобы сформулировать итоговый результат, необходимо ввести некоторые определения и обозначения.

Операция замены вершины x кографом состоит в том, что эта вершина удаляется из графа, к нему добавляется t новых вершин, каждая из них соединяется ребром с каждой вершиной, с которой была смежна x, ребра между добавленными вершинами выстраиваются так, чтобы никакие 4 из них не порождали 4-путь.

Граф, получаемый из графа G разбиением каждого циклового ребра одной вершиной, а затем заменой некоторых его новых вершин и вершин степени 1 и 2, не принадлежащих циклам, кографами (возможно, различными), назовем *расширением* графа G.

Введем обозначения для бесконечных множеств графов:

$\mathbf{C}$ – множество всех циклов, длина которых больше 3 и не кратна 4;

$\mathbf{A}$ – множество всех графов, которые можно получить добавлением к циклу, длина которого кратна 4, двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, причем расстояние между этими вершинами цикла должно быть нечетно;

$\mathbf{B}$ – множество всех графов, которые можно получить добавлением к циклу, длина которого кратна 4, двух вершин, не смежных между собой, одна из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, а другая – с тремя подряд идущими вершинами цикла, причем расстояние между добавленными вершинами должно быть сравнимо с 1 по модулю 4;

B′ – множество всех графов, которые можно получить добавлением к циклу, длина которого кратна 4, двух вершин, не смежных между собой, одна из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, а другая – с двумя вершинами цикла, образуя цикл длины 4, причем расстояние между добавленными вершинами должно быть сравнимо с 1 по модулю 4;

D – множество всех графов, которые можно получить из циклов длиной, кратной 4, путем замены 2-кликами или графами из 2 несмежных вершин четырех вершин цикла, разбивающих цикл на отрезки, длина каждого из которых не меньше 5 и сравнима с 1 по модулю 4;

E – множество графов, дополнительных к графам из $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{B}' \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D}$.

Теорема 13. Графы из множества $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{B}' \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D} \cup \mathbf{E}$ являются запрещенными графами для множества $K(\{P_4\})$.

Теорема 14. Любое расширение произвольного двудольного графа является кениговым графом относительно P_4.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-01-00749-а, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.», номер ГК 14.B37.21.0393, лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0057, при поддержке гранта Президента РФ МК-1148.2013.1. Исследование осуществлено в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2013–2014 гг., проект № 12-01-0035.

Список литературы

1. Алексеев В.Е. О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // В сб.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике / Под ред. А.А. Маркова. Горький: Изд-во ГГУ. 1982. С. 3–13.

2. Alekseev V.E. On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. 2004. V. 132. P. 17–26.

3. Алексеев В.Е., Захарова Д.В., Малышев Д.С. и др. Некоторые результаты о наследственных классах графов II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. Вып. 6(1). С. 115–120.

4. Алексеев В.Е. Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа // Дискретная математика. 2007. Т. 19. № 3. С. 84–88.

5. Tsukigama S., Ide M., Ariochi H., Ozaki H. A new algorithm for generating all the maximal independence sets // SIAM J. Comput. 1977. V. 6. P. 505–517.

6. Natanzon A., Shamir R., Sharan R. Complexity classification of some edge modification problems // Discrete Appl. Math. 2001. V. 113. P. 109–118.

7. Hakimi S.L., Brederson J.G. Graph-theoretic error-correcting codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1968. V. 14. P. 584–591.

8. Захарова Д.В. Симметрические линейные пространства графов // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 2. С. 103–107.

9. Shamir R., Sharan R., Tsur D. Cluster graph modification problems // Discrete Appl. Math. 2004. V. 144. P. 173–182.

10. Малышев Д.С. О количестве граничных классов в задаче о 3-раскраске // Дискретная математика. 2009. Т. 21. № 4. С. 129–134.

11. Малышев Д.С. О бесконечности множества граничных классов в задаче о реберной 3-раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. № 1. С. 37–43.

12. Малышев Д.С. Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. № 5. С. 41–51.

13. Korpelainen N., Lozin V.V., Malyshev D., Tiskin A. Boundary properties of graphs for algorithmic graph problems // Theoretical Computer Science. 2011. V. 412. P. 3545–3554.

14. Малышев Д.С. О пересечении и симметрической разности семейств граничных классов для задач о раскраске и о хроматическом числе // Дискретная математика. 2012. Т. 24. № 2. С. 75–78.

15. Kral D., Kratochvil J., Tuza Z., Woeginger G.J. Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Lecture Notes in Computer Science. 2001. V. 2204. P. 254–262.

16. Lozin V.V., Malyshev D.S. Vertex coloring of graphs with few obstructions // Theoretical Computer Science (submitted).

17. Robertson N., Seymour P.D. Graph Minors. XX. Wagner's conjecture // J. Combin. Theory. Ser. B. 2004. V. 92. P. 325–357.

18. Damaschke P. Induced subgraphs and well-quasi-ordering // J. Graph Theory. 1990. V. 14. P. 427–435.

19. Lozin V.V., Mayhill C., Zamaraev V. Locally bounded coverings and factorial properties of graphs // European Journal of Combinatorics. 2012. V. 33(4). P. 534–543.

20. Norine S., Seymour P., Thomas R., Wollan P. Proper minor-closed families are small // J. Combin. Theory. Ser. B. 2006. V. 96. P. 754–757.

21. Ding G. Subgraphs and Well-Quasi-Ordering // J. Graph Theory. 1992. V. 16. P. 489–502.

22. Алексеев В.Е. О нижних ярусах решётки наследственных классов графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1997. Т. 4. № 1. С. 3–12.

23. Алексеев В.Е. Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная математика. 1992. Т. 4. № 2. С. 148–157.

24. Алексеев В.Е., Сорочан С.В. Об энтропии наследственных классов цветных графов // Дискретная математика. 2000. Т. 12. № 2. С. 99–102.

25. Сорочан С.В. Об энтропии композиций наследственных классов цветных графов // Дискрет-

ный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2002. Т. 9. № 1. С. 59–83.

26. Сорочан С.В. О регулярных композициях наследственных классов цветных графов // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 1. С. 79–104.

27. Алексеев В.Е., Мокеев Д.Б. Кёниговы графы относительно 3-путей // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. № 4. С. 3–14.

28. Ding G., Xu Z., Zang W. Packing cycles in graphs, II // Journal of Combinatorial Theory. Ser. B. 2003. V. 87. P. 244–253.

SOME RESULTS ON HEREDITARY CLASSES OF GRAPHS. III

V.E. Alekseev, V.A. Zamaraev, D.V. Zakharova, D.S. Malyshev, D.B. Mokeev, S.V. Sorochan

The problems of asymptotic enumeration and structural description of hereditary graph classes are considered. The complexity of some problems on such graph classes is studied.

Keywords: hereditary graph class, forbidden induced subgraph, filtered graph class, computational complexity, efficient algorithm, graph packings, graph coverings.