

Динамика солитонов неинтегрируемой версии модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза

О. Е. Куркина^{+×*}, А. А. Куркин^{1)×}, Е. А. Рувинская⁺, Е. Н. Пелиновский^{+°}, Т. Соомере^{*}

⁺Национальный исследовательский университет – Высшая школа Экономики, 603155 Н.Новгород, Россия

[×]Нижегородский государственный технический университет им. Алексеева, 603950 Н.Новгород, Россия

^{*}*Institute of Cybernetics, Tallinn University of Technology, 12618 Tallinn, Estonia*

[°]Институт прикладной физики РАН, 603950 Н.Новгород, Россия

Поступила в редакцию 8 сентября 2011 г.

После переработки 21 ноября 2011 г.

Обсуждается нелинейная волновая динамика в рамках расширенного модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза (мКдВ), содержащего комбинацию нелинейных слагаемых третьей и пятой степени и справедливого для волн в трехслойной жидкости с так называемой симметричной стратификацией. Полученное уравнение имеет решения в виде уединенных волн различной полярности. При малых амплитудах они близки к солитонам уравнения мКдВ. Однако амплитуда больших возмущений имеет предел, при приближении к которому уединенные волны расширяются, принимая платообразную форму, подобно солитонам уравнения Гарднера. Столкновение солитонов выведенного уравнения оказывается неупругим, что подтверждено численными расчетами. Неупругость наиболее заметна при взаимодействии однополярных импульсов. Направление сдвига фазы солитона большей амплитуды при разнополярном взаимодействии зависит от амплитуд импульсов.

Локализованные возмущения внутренних гравитационных волновых полей – неотъемлемая и важная составляющая нелинейных волновых движений стратифицированной жидкости. Важность их изучения объясняется тем, что очень часто эти волны проявляются как весьма значительные энергонесущие образования и играют ведущую роль в процессах, происходящих в окружающей их среде. Так, если говорить об океанических приложениях, то в шельфовых зонах океана они влияют на процессы транспорта донных наносов, распространения загрязнений и примесей в толще жидкости и на ее поверхности, перемешивания воды и диссипации энергии, передачи акустических сигналов и т.п. Понимание механизмов такого воздействия невозможно без подробных исследований непосредственно свойств изолированных долгоживущих импульсов, уточнения их характеристик, особенностей динамики при различных сочетаниях условий в среде, да и самого вопроса существования локализованных неизлучающих волновых форм в зависимости от внешних факторов среды.

Модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза с кубической нелинейностью встречается во многих физических задачах, обладающих симметрией. Для волн в жидкости анизотропия связана с направ-

лением силы тяжести. Поэтому в первом приближении теории возмущений для слабонелинейных и слабодисперсионных волн в жидкости получается классическое уравнение Кортевега–де Вриза, впервые выведенное именно для волн на воде. Между тем в стратифицированной жидкости структура волнового поля определяется вертикальным распределением поля плотности, точнее распределением частоты плавучести (частоты Вэйселя–Брента). Оно может быть симметричным, в частности содержать два одинаковых пикноклина (области с сильным изменением плотности). В этом случае определяющим является модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза [1]. Более того, при определенном положении пикноклинов кубическая нелинейность становится аномально малой, и даже обращается в нуль [1]. В этом случае необходимо модифицировать теорию возмущений и учитывать члены следующего порядка. Такое расширенное модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза недавно выведено в работе [2]. Оно не является интегрируемым, и динамика солитонов в рамках этого уравнения имеет свои особенности, изучаемые в настоящей работе.

Прежде всего определим ситуацию, которая описывается таким уравнением. Рассматривается трехслойный (по плотности) водный поток, находящийся в поле силы тяжести. Поток ограничен по вертикали

¹⁾ e-mail: aakurkin@gmail.com

двумя горизонтальными поверхностями: дном и свободной поверхностью. Последнюю можно заменить на твердую (это приближение в океанологии называется условием твердой крышки; оно справедливо при слабых вариациях плотности, что типично для несжимаемой стратифицированной жидкости). Обозначим толщину нижнего и верхнего слоев через h , полную глубину жидкости через H , плотности нижнего, среднего и верхнего слоев через $\rho_1 = \rho$ и $\rho_2 = \rho + \Delta\rho$, $\rho_3 = \rho_2 + \Delta\rho = \rho + 2\Delta\rho$ соответственно, нижнюю границу раздела через $\eta(x, t)$, а верхнюю – $\zeta(x, t)$. Будем также считать, что относительные скачки плотности на границах слоев малы (приближение Буссинеска): $\Delta\rho/\rho \ll 1$.

Мы рассматриваем длинные волны малой (по сравнению с глубиной жидкости) амплитуды. Поэтому мы вводим малые параметры нелинейности ($\varepsilon = a/H$) и дисперсии ($\bar{\mu} = H/L$, $\mu = \bar{\mu}^2$) (здесь a – характерный масштаб амплитуды смещений границ раздела слоев, L – характерный горизонтальный масштаб волновых движений). В жидкости с симметричной трехслойной стратификацией существуют две моды внутренних гравитационных волн. Для низшей моды (отклонение интерфейсов для которой происходит в одну сторону) коэффициент квадратичной нелинейности и один из коэффициентов нелинейной дисперсии тождественно обращаются в нуль при любом соотношении толщин слоев. Обращение в нуль коэффициента квадратичной нелинейности нарушает классическую иерархию малых членов асимптотического разложения. При получении уточненного уравнения мКдВ с помощью асимптотических разложений при симметричных стратификациях стандартное масштабирование уравнения Кортевега–де Вриза (т.е. соотношение между малыми параметрами нелинейности и дисперсии $\varepsilon = \mu$) требует модификации $\varepsilon^2 = \mu$ для учета дисперсионных и нелинейных эффектов в одном порядке. При этом должна возрастать роль следующих по нелинейности членов в асимптотическом разложении волнового поля. Выполнив масштабирование с учетом соотношения между малыми параметрами $\varepsilon^2 = \mu$, получим уравнение вида

$$\begin{aligned} \zeta_t + c\zeta_x + \alpha_1\zeta^2\zeta_x + \beta\zeta_{xxx} + \varepsilon(\alpha_2^*\zeta^3\zeta_x + \\ + \gamma_2^*\zeta_x\zeta_{xx}) + \varepsilon^2(\alpha_3\zeta^4\zeta_x + \gamma_{31}\zeta_x^3 + \gamma_{32}\zeta\zeta_x\zeta_{xx} + \\ + \gamma_{33}\zeta^2\zeta_{xxx} + \beta_1\zeta_{5x}) + O(\varepsilon^3) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где коэффициенты определяются формулами, данными в [2]. В (1) в дополнение к слагаемым уравнения мКдВ присутствуют высшие поправочные слагаемые (нелинейные, нелинейной дисперсии и линейной дисперсии) порядков $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$. Уравнение

для $\eta(x, t)$ отличается от (1) только противоположным знаком коэффициентов, помеченных индексом "звездочка".

Отметим, что коэффициент кубической нелинейности α_1 обращается в нуль при $h = h_{cr} = 9H/26$. Раскладывая выражения для коэффициентов уравнения (1) в ряд Тейлора в окрестности точки h_{cr} ($\Delta = (h - h_{cr})/H$) (для параметров стратификации, близких к рассматриваемым, для учета дисперсионных и нелинейных эффектов в одном порядке соотношение между малыми параметрами Δ и ε должно быть следующим: $\Delta = \varepsilon^2$) и вновь изменяя масштабирование параметров для баланса нелинейности и дисперсии, получаем расширенное модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза с комбинированной нелинейностью:

$$\zeta_t + \alpha_1\zeta^2\zeta_x + \alpha_3\zeta^4\zeta_x + \beta\zeta_{xxx} = 0, \quad (2)$$

где $\alpha_1 H^2/c = -3(26l-9)/(8l^3)$, $\alpha_3 H^4/c = -9(1324l^3 - 1508l^2 + 513l - 45)/(128l^7)$, $\beta/(cH^2) = -(4l^2 - 3l)/12$, $l = h/H$. Коэффициент α_2 нелинейности четвертой степени обращается в нуль и меняет знак при $h = h_{cr}$. Его значение в окрестности исследуемой точки мало. При проведении описанного масштабирования слагаемое с коэффициентом α_2 оказывается более высокого порядка малости, чем удержанные в (2) слагаемые.

Уравнение (2), как и классическое уравнение мКдВ для трехслойной симметричной стратификации, оказалось универсальным, т.е. одинаковым для обеих границ раздела слоев. Уравнение (2) уточняет характер волновой динамики вблизи точки нулевой кубической нелинейности ($\Delta \ll 1$) за счет нелинейности пятого порядка. Непрерывные стратификации с подобными свойствами встречаются и в естественных условиях [3, 4].

Хотя уравнение (2) является неинтегрируемым (невозможность интегрирования с помощью метода Захарова–Шабата уравнений вида $\zeta_t + \zeta^n\zeta_x + \zeta_{xxx} = 0$ для $n > 2$ отмечалась в [5, 6]), оно всегда имеет сохраняющиеся интегралы массы $\left(M = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta dx\right)$ и энергии

$\left(E = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^2 dx\right)$, которые не сохраняются в уравнении (1) в общем случае.

С точки зрения волновой динамики важными являются знаки коэффициентов нелинейных слагаемых в уравнении (2). Необходимо отметить, что коэффициент кубической нелинейности α_1 при $h \approx h_{cr}/H$ меняет знак, а коэффициент нелинейности пятой степени α_3 отрицателен в окрестности этой точки.

Известно, что солитоны уравнений КдВ-иерархии высокого порядка по нелинейности, $\zeta_t + \zeta^n \zeta_x + \zeta_{xxx} = 0$, неустойчивы при $n \geq 4$ [5]. Для таких уравнений гладкие локализованные начальные условия эволюционируют в сингулярные возмущения за конечное время (или на конечном расстоянии). Мы вывели уравнение (2) с комбинированной нелинейностью (третьей и пятой степени) в контексте внутренних гравитационных волн. Вместе с тем мы не встречали в литературе исследования интегрируемости и/или устойчивости солитонов для уравнения такого вида. В работах [7, 8] были получены два частных интеграла сохранения и односолитонные решения для более общего класса уравнений, представителем которого является и наше уравнение (2). Однако общие свойства подобных уравнений доказаны не были. Тем не менее все численные расчеты начальной задачи с гладкими локализованными начальными условиями, проведенные нами для полученного уравнения, демонстрировали вполне устойчивую волновую динамику без каких-либо особенностей или коллапсов. Поэтому можно предположить, что кубическая нелинейность в таком уравнении играет стабилизирующую роль, хотя, безусловно, этот вопрос нуждается в более строгом теоретическом доказательстве, которое выходит за рамки настоящей статьи.

В рамках уравнения (2) легко доказывается существование уединенных стационарных волн при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 < 0$ и оценивается влияние высшей нелинейности на их форму.

Стационарные локализованные решения (2), $\zeta_s(x - Vt)$ выражаются через интеграл:

$$Y - Y_0 = \sqrt{\beta} \int_{v_0}^{v_s} \left(V \zeta^2 - \frac{\alpha_1}{6} \zeta^4 - \varepsilon \frac{\alpha_3}{15} \zeta^6 \right)^{-1/2} d\zeta,$$

где V – скорость волны, $Y = x - Vt$. При $\alpha_1 > 0$ он вычисляется аналитически, приводя к выражению

$$\zeta(Y) = \pm \sqrt{\frac{60V}{5\alpha_1 + \sqrt{25\alpha_1^2 + 240\alpha_3 V} \cosh\left(\frac{2Y\sqrt{V}}{\sqrt{\beta}}\right)}}. \quad (3)$$

Амплитуда солитона (3) определяется выражением

$$a = \sqrt{\frac{60V}{5\alpha_1 + \sqrt{25\alpha_1^2 + 240\alpha_3 V}}}. \quad (4)$$

Скорость солитона может быть определена через амплитуду a :

$$V = \frac{\alpha_1}{6} a^2 + \frac{\alpha_3}{15} a^4.$$

Выражение под корнем в знаменателях (3) и (4) должно быть неотрицательным. Поэтому значение

скорости V не должно превышать $V_{\text{lim}} = -5\alpha_1^2/48\alpha_3$. Тогда амплитуда солитонов не может быть больше (по модулю) предельного значения

$$a_{\text{lim}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5\alpha_1}{-\alpha_3}}. \quad (5)$$

Максимальная амплитуда (5) определяется через относительную толщину l верхнего и нижнего слоев:

$$\frac{a_{\text{lim}}}{H} = 2l^2 \sqrt{15} \sqrt{\frac{9 - 26l}{1324l^3 - 1508l^2 + 513l - 45}}. \quad (6)$$

Максимальное значение предельной амплитуды достигается при $h/H \approx 0.286$. Оно равно $a_{\text{lim}} \approx 0.0864H$. Наивысшее возможное положение нижней границы раздела $h + a_{\text{lim}}$ при положительной полярности солитона соответствует $z \approx 0.397H$. При этом $h \approx 0.3243H$, т.е. весьма близко к h_{cr} .

На рис. 1 построены профили уединенных волн уравнения мКдВ и солитонов (3) для различных зна-

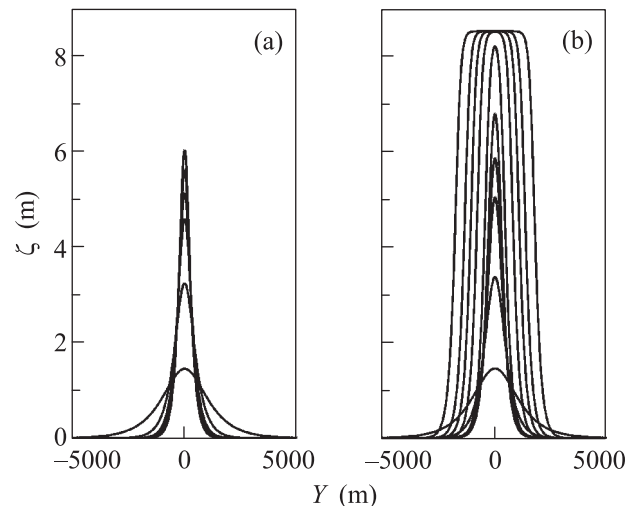


Рис. 1. Форма солитонов уравнения мКдВ (а) и уточненного уравнения мКдВ (2) (b) для значений скорости солитонов $V = 0.001, 0.005, 0.01, 0.0125, 0.015, 0.0172, 0.017294, 0.01729412, 0.01729412063, 0.01729412063364$ (м/с) (снизу вверх)

чений амплитуды скорости V для выбранной стратификации: полная глубина $H = 100$ м; относительный скачок плотности $\Delta\rho/\rho = 1 \cdot 10^{-3}$; толщина нижнего и верхнего слоев $h = 30$ м; $c = 1.72$ м/с; $\alpha = 0$ с $^{-1}$; $\beta = 771.98$ м 3 /с; $\alpha_1 = 0.0028$ (м·с) $^{-1}$; $\alpha_3 = -0.000049$ (м 3 ·с) $^{-1}$; $a_{\text{lim}} = 8.52$ м; $V_{\text{lim}} = 0.01729$ м/с. Для небольших скоростей в уравнении (2) реализуются классические солитоны уравнения мКдВ. Затем, при приближении скорости к значению V_{lim} они уширяются до бесконечности. При

этом амплитуда солитона стремится к a_{lim} . Полярность солитонов может быть любой.

Подобными платообразными решениями обладает и уравнение Гарднера в случае отрицательной кубической нелинейности (что соответствует примеру двухслойной воды). Солитоны также оказываются ограниченными по амплитуде. При приближении к предельной высоте солитон бесконечно уширяется. Для этого уравнения продемонстрирована новая волновая динамика по сравнению с классическими уравнениями КдВ и мКдВ: распространение солитонов по гребню близкого к предельному “широкого” солитона, формирование двух цугов солитонов различной полярности на начальной стадии разрушения предельного импульсного возмущения (при этом “широкий” солитон играет роль пьедестала) [9–11]. Начальное возмущение прямоугольной формы оказалось топологически особенным для задачи Коши в рамках уравнения Гарднера: ее решения сильно различаются для прямоугольного и гладкого начального импульса. Существование “широкого” солитона и возможность распространения по нему других солитонов были подтверждены в рамках более общих нелинейных моделей [12–14].

Исследование нелинейной динамики в рамках уравнения (2) проведено с помощью численного интегрирования на основе неявной псевдо-спектральной схемы [15] с контролем сохранения интегралов массы и энергии. Пространственный интервал выбирался исходя из предполагаемой скорости возмущений и времени эволюции и при необходимости расширялся. Численная схема тестировалась на точных солитонных решениях уравнений мКдВ и (2). Кроме того, проводилось сопоставление полученных результатов с аналогичными результатами, полученными при удвоенном числе разрешающих точек.

При численных расчетах фактически использовалась безразмерная форма уравнения (2):

$$q_\theta + q^2 q_\chi - q^4 q_\chi + q_{\chi\chi\chi} = 0,$$

где

$$\theta = \left| \frac{\alpha_1^3}{\alpha_3} \right|^{3/4} t, \quad \chi = \left| \frac{\alpha_1^3}{\alpha_3} \right|^{1/4} x, \quad q = \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right|^{1/2} \zeta. \quad (7)$$

При этом пространственный шаг $\Delta\chi$ был равен 0.2, а временной шаг $\Delta\theta$ выбирался равным 0.1. Тесты показали, что численная ошибка схемы при выбранных значениях параметров имеет порядок 10^{-6} (при этом значения малого параметра μ выбираются не менее $4 \cdot 10^{-2}$).

В качестве начального возмущения была использована суперпозиция двух солитонов (большой и

меньшей амплитуды: 1 и ± 0.5 в безразмерных переменных (7) при безразмерной предельной амплитуде $\sqrt{5}/2 \approx 1.118$; соответствующие размерные амплитуды равны 7.62 и ± 3.81 м). Сначала была рассмотрена эволюция каждого из солитонов в отдельном численном эксперименте до момента $\theta = 4000$. При этом все возникающие погрешности (колебания амплитуды солитона из-за дискретного представления его формы и амплитуда генерируемого волнового следа) не превышали $1 \cdot 10^{-6}$. Из этих солитонов было составлено начальное возмущение: впереди помещен меньший солитон, сзади – больший. Расстояние между их центрами составляло 150 единиц. Вычисления продолжались до $\theta = 4000$. За это время процесс взаимодействия завершился. Он приведен на рис. 2а.

Эволюция однополярных положительных импульсов происходила по обменному сценарию, описанному в [16] для классических уравнений КдВ и мКдВ. В отличие от интегрируемых уравнений в нашем случае при столкновении формируется практически не распространяющееся (так как оно очень длинное) локализованное возмущение отрицательной полярности. На временах вычислений заметно дисперсионное разрушение сформировавшейся волны. Величина генерируемых при взаимодействии солитонов возмущений, составляла около $4 \cdot 10^{-2}$, что превосходит погрешность вычислений, которая не превышала $1 \cdot 10^{-6}$. Вместе с тем их амплитуда – порядка удерживаемых членов $O(\mu) = O(\Delta)$. Он оценивается как $4 \cdot 10^{-2}$. При этом смещение фаз происходит для обоих импульсов.

При взаимодействии разнополярных импульсов также генерируются осциллирующие волновые шлейфы (рис. 2б). Однако их амплитуда меньше, чем в предыдущем случае. Она не превышает $1 \cdot 10^{-2}$.

Картина взаимодействия в обоих случаях не изменилась при использовании вдвое меньшего интервала дискретизации поля. Это говорит о том, что наблюдаемые эффекты не связаны с погрешностями компьютерного эксперимента.

По результатам численного моделирования можно сделать вывод о неупругом характере соударений солитонов в рамках уравнения (2). Эффект неупругого взаимодействия слабо проявляется и в изменении амплитуд взаимодействующих солитонов. После взаимодействия они оказались равными 1.002 для большего солитона и 0.477 для меньшего для однополярных импульсов и 1.001 и -0.499 для разнополярных (эффект также оказывается порядка $O(\mu)$ или меньше). Эффект может стать более значительным, если взаимодействие солитонов с остальным волновым полем протекает в течение более длительного време-

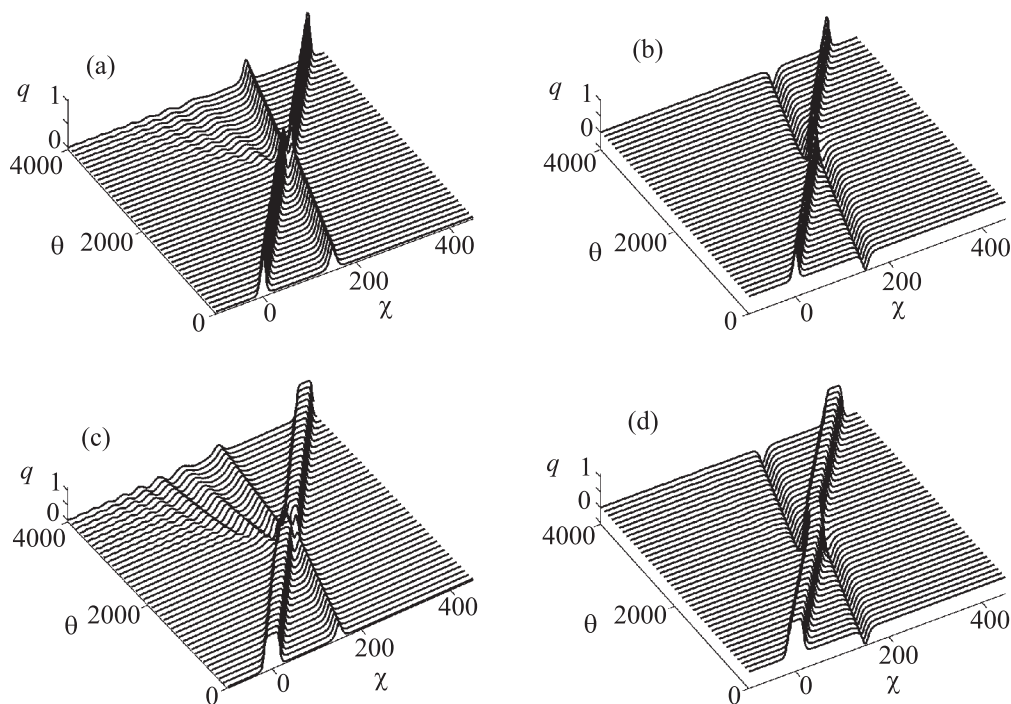


Рис. 2. Взаимодействие однополярных и разнополярных солитонов в рамках уравнения (2): (a) – солитоны с амплитудами 1 и 0.5; (b) – 1 и -0.5 ; (c) – 1.118 и 0.5; (d) – 1.118 и -0.5 . Графики построены в безразмерных координатах (7)

ни. В таком случае он может вести к медленному затуханию солитонов, а также к образованию новых солитоноподобных импульсов.

Для моделирования взаимодействий широкого солитона с солитоном умеренной амплитуды шаг по времени был уменьшен до значения $\Delta\theta = 0.01$, а по пространству – до $\Delta\chi = 0.1$. При этом численная ошибка при моделировании распространения широкого солитона по всей расчетной области не превосходит $1 \cdot 10^{-6}$. Взаимодействие уединенных волн одинаковой полярности, одна из которых имеет амплитуду, близкую к предельной, значительно отличается от рассмотренных ранее примеров (рис. 2c). Во-первых, волна меньшей амплитуды, проходя при столкновении по гребню широкого солитона, меняет свою полярность. Во-вторых, изменение амплитуды “маленькой” уединенной волны значительно по сравнению с предыдущими случаями. Оно составляет около 40% (с 0.5 до 0.298). Излучающиеся при взаимодействии волны имеют амплитуды, сравнимые по порядку величины с амплитудой меньшего солитона.

При взаимодействии разнополярных солитонов (рис. 2d), амплитуда одного из которых близка к предельной, изменение амплитуды меньшего солитона, имеющего отрицательную полярность, несколько

больше (с 0.5 до 0.498), чем в расчетах с солитонами неопредельных амплитуд. Волны, излучающиеся при взаимодействии, имеют амплитуды порядка $8 \cdot 10^{-3}$, не превосходя величины малого параметра.

Взаимодействие солитонов уравнения (2) происходит со сдвигом их фаз. Однако если однополярные солитоны изменяют свои фазы по классическому сценарию, известному для уравнений КдВ-иерархии [17], то при взаимодействии разнополярных солитонов сдвиг фаз для более быстрого солитона в зависимости от его амплитуды может иметь различный знак: при малых амплитудах динамика близка к случаю мКдВ и сдвиг положителен, а при значительных амплитудах, когда солитон становится “широким”, изменение его фазы отрицательно (рис. 2b и d).

Итак, в настоящей статье обсуждается нелинейная динамика волн в рамках расширенного модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза, содержащего нелинейные слагаемые третьей и пятой степени. Это уравнение встречается в теории внутренних волн в трехслойном стратифицированном потоке, находящемся в поле тяжести при определенных вертикальных распределениях плотности (симметричная стратификация). Найдены аналитические решения, характеризующиеся ограничением амплитуды и

ее уширением при приближении амплитуды к верхней границе. Проведено численное моделирование взаимодействия уединенных волн различной полярности, в том числе с участием “широких” солитонов. Расчеты демонстрируют неупругость столкновений. Амплитуда генерирующихся при этом шлейфов зависит от амплитуд и полярностей взаимодействующих импульсов. Она оказывается наибольшей для однополярных взаимодействий и возрастает с ростом амплитуды участвующих волн. Рассмотрен пример взаимодействия “широкого” солитона с обычным противоположной полярности. Такая ситуация не реализуется для известных уравнений КдВ-иерархии. В этом случае большая уединенная волна после взаимодействия приобретает отрицательный сдвиг фазы.

Представленные результаты получены при поддержке грантов Президента РФ для молодых российских ученых – докторов наук (# МД 99.2010.5), РФФИ (# 10-05-00199, 09-05-00204, 11-02-00483, 11-05-00216); программы “Нелинейная динамика”, целевого финансирования Министерства образования и науки Эстонии (грант # SF0140077s08), Научного фонда Эстонии (гранты # 7413, 9125), BONUS + проекта BalticWay.

1. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and T. Talipova, *Nonlinear Processes in Geophysics* **4**, 237 (1997).
2. Е. А. Рувинская, О. Е. Куркина, А. А. Куркин, *Труды НГТУ* **4**, 30 (2010).

3. M. Leppäranta and K. Myrberg, *Physical Oceanography of the Baltic Sea*, Berlin Heidelberg, N.Y.: Springer Praxis, 2009.
4. T. Soomere, *Nonlinear Process. Geophys.* **10**, 385 (2003).
5. М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, М.: Мир, 1987.
6. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, М.: Наука, 1980.
7. S. Hamdi, B. Morse, B. Halphen, and W. Schiesser, *Nat. Hazards*. **57**, 597 (2011).
8. S. Hamdi, B. Morse, B. Halphen, and W. Schiesser, *Nat. Hazards*. **57**, 609 (2011).
9. Е. Н. Пелиновский, А. В. Слюняев, *Письма в ЖЭТФ* **67**, 628 (1998).
10. А. В. Слюняев, Е. Н. Пелиновский, *ЖЭТФ* **116**, 318 (1999).
11. А. В. Слюняев, *ЖЭТФ* **119**, 606 (2001).
12. H. Michallet and E. Barthelemy, *J. Fluid Mech.* **366**, 159 (1998).
13. R. M. Mirie and S. A. Pennel, *Phys. Fluids A* **1**, 986 (1989).
14. M. Miyata, *Nonlinear Water Waves* (ed. by K. Horikawa and H. Maruo), Springer **399** (1988).
15. B. Fornberg, *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press, 1998.
16. P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press, 1989.
17. Дж. Лем, *Введение в теорию солитонов*, М.: Мир, 1983.