МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2010 год, том 22, номер 4, стр. 110-117

УДК 517.958:533.7

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ДВУМЕРНОЙ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

© *2010 г.* ***А.А. Злотник***

Российский государственный социальный университет, каф. прикладной математики, 129226 Москва, ул. В. Пика, 4
Московский энергетический институт (технический университет), каф. математического моделирования, 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14
e-mail: azlotnik2007@mail.ru

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 08–01–90009–Бел, 08–06–00302 и 09–01–00600 и Министерства образования и науки РФ, программа «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/3276.

Изучена новая модифицированная двумерная квазигазодинамическая модель транспортных потоков. Выведены как достаточные, так и необходимые условия устойчивости гармонических по пространству возмущений по постоянному фону в линеаризованной постановке.

Ключевые слова: двумерная квазигазодинамическая модель, транспортные потоки.

ON STABILITY OF SMALL PERTURBATIONS FOR A MODIFIED TWO-DIMENSIONAL QUASI-GASDYNAMIC MODEL OF TRAFFIC FLOWS

A.A. Zlotnik

Russian State Social University, Department of Applied Mathematics, 129226 Moscow, W. Pieck 4
Moscow Power Engineering Institute (Technical University), Department of Mathematical Modelling, 111250 Moscow, Krasnokazarmennaya 14

A new modified two-dimensional quasi-gasdynamic model of traffic flows is studied. Both sufficient and necessary conditions are derived for stability of perturbations harmonic in space with respect to a constant background in linearized statement.

Key words: quasi-gasdynamic model, traffic flows.

1. Введение. Квазигазодинамическая система уравнений с успехом применяется при математическом моделировании разнообразных задач газо- и гидродинамики [1,2]. В [3] была предложена новая двумерная квазигазодинамическая система для моделирования транспортных потоков, а совсем недавно в [4] эта модель была существенно мо-

дифицирована. Вопросы устойчивости малых возмущений для квазигазодинамических систем уравнений исследовались в [5]-[8]. Модель [3] недавно была проанализирована в [9].

В настоящей работе изучается модель [4], в которой, в отличие от модели [3], боковая скорость зависит от градиента неизвестных и старшие производные по пространственным переменным имеют третий (а не второй) порядок, и модель уже не является параболической. Выписывается соответствующая линеаризованная система уравнений для малых возмущений по постоянному фону. Для гармонических по пространству возмущений устанавливаются необходимое и достаточное условия устойчивости в случае нулевой фоновой скорости, а также соответствующие необходимые условия устойчивости в общем случае.

2. Модифицированная двумерная квазигазодинамическая модель транспортных потоков, ее линеаризация и устойчивость малых возмущений. Модифицированную двумерную квазигазодинамическую систему уравнений транспортных потоков [4] можно записать в следующем виде:

$$\partial_t\rho+\partial_x(\rho u)+\partial_y(\rho v)=R_0[\rho,u]:=$$

$$:=\partial_x\{\tau_x[\partial_x(\rho u^2+p)+\partial_y(\rho uv)\}+\partial_y\{\tau_y[\partial_x(\rho uv)+\partial_y(\rho v^2)+\kappa\partial_y\rho]\}, \qquad (1)$$

$$\partial_t(\rho u)+\partial_x(\rho u^2+p)+\partial_y(\rho uv)=R_1[\rho,u]:= \qquad (2)$$

$$:=\partial_x\{\tau_x[\partial_x(\rho u^3+3pu)+\partial_y(\rho u^2v)]\}+\partial_y\{\tau_y[\partial_x(\rho u^2v)+\partial_y(\rho uv^2)+\kappa\partial_y(\rho u)]\}.$$

Эти уравнения представляют собой уравнение баланса массы и уравнение импульса соответственно. Искомые функции $\rho=\rho(x,y,t)>0$ и $u=u(x,y,t)$ – плотность и продольная скорость транспорта, x,y – координаты вдоль и поперек магистрали, t – время. Частные производные по x,y,t обозначены через ∂_x, ∂_y, ∂_t. Предполагается, что

$$p=p(\rho)>0,\quad p'(\rho)>0,\quad \kappa=\kappa(\rho)>0,\quad \tau_x=\tau_x(\rho,u)>0,\quad \tau_y=\tau_y(\rho,u)>0,$$
$$v=-k_\rho u\partial_y\rho+k_u\rho\partial_y u,\quad k_\rho>0,\quad k_u>0.$$

Функция v – это боковая скорость. В уравнениях опущены слагаемые, связанные с ускоряющей/замедляющей силой и с движением до определенной цели. С другой стороны, функции p,κ,τ_x,τ_y взяты в более общем виде, чем в [4]; они предполагаются гладкими. Функцию v также можно было бы взять в существенно более общем виде.

Рассмотрим классические решения (ρ,u) системы уравнений (1), (2), удовлетворяющие им для любых (x,y) и $t>0$. Преобразуем уравнение импульса (2) с помощью уравнения баланса массы (1) к виду

$$\partial_t u+u\partial_x u+v\partial_y u+\frac{1}{\rho}\partial_x p=\frac{1}{\rho}\left(R_1[\rho,u]-R_0[\rho,u]u\right). \qquad (3)$$

Рассмотрим решения системы (1), (3) вида $\rho=\bar\rho+\delta\rho$, $u=\bar u+\delta u$, где $\bar\rho>0$, $\bar u$ – постоянные фоновые значения неизвестных, а $\delta\rho$, δu – их малые возмущения. Подставим

такие решения в систему. Отбросив слагаемые более высокого, чем первый, порядка малости относительно возмущений (и их производных), выведем следующую линеаризованную систему для возмущений:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\delta\rho+\bar{u}\partial_x\delta\rho+\bar{\rho}\partial_x\delta u+\bar{\rho}(-k_\rho\bar{u}\partial_y^2\delta\rho+k_u\bar{\rho}\partial_y^2\delta u)=\\
&\quad=\bar{\tau}_x[(p'(\bar{\rho})+\bar{u}^2)\partial_x^2\delta\rho+2\bar{\rho}\bar{u}\partial_x^2\delta u]+\bar{\tau}_y\kappa(\bar{\rho})\partial_y^2\delta\rho+\\
&\quad+(\bar{\tau}_x+\bar{\tau}_y)\bar{\rho}\bar{u}(-k_\rho\bar{u}\partial_x\partial_y^2\delta\rho+k_u\bar{\rho}\partial_x\partial_y^2\delta u),
\end{aligned}$$

$$\partial_t\delta u+\bar{u}\partial_x\delta u+\frac{p'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}\partial_x\delta\rho=\bar{\tau}_x\left[2\frac{p'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}\bar{u}\partial_x^2\delta\rho+\left(3\frac{p(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}+\bar{u}^2\right)\partial_x^2\delta u\right]+\bar{\tau}_y\kappa(\bar{\rho})\partial_y^2\delta u.$$

Здесь $\bar{\tau}_x=\tau_x(\bar{\rho},\bar{u})$, $\bar{\tau}_y=\tau_y(\bar{\rho},\bar{u})$. Для упрощения обозначений условимся в рассуждениях ниже опускать черту над фоновыми значениями величин и аргумент $\bar{\rho}$ у функций.

Задав вектор-столбец возмущений $\delta\mathbf{z}:=(\delta\rho,\delta u)$ и нормировав возникающие матрицы, перепишем последнюю систему уравнений в векторной форме:

$$\partial_t\delta\mathbf{z}+\sqrt{p'}\,B^{(1)}\partial_x\delta\mathbf{z}=\tau_x p'A^{(20)}\partial_x^2\delta\mathbf{z}+\kappa A^{(02)}\partial_y^2\delta\mathbf{z}+\tau\sqrt{p'}A^{(12)}\partial_x\partial_y^2\delta\mathbf{z} \tag{4}$$

с матрицами

$$B^{(10)}:=\begin{bmatrix}\hat{u} & \dfrac{\rho}{\sqrt{p'}}\\[2ex] \dfrac{\sqrt{p'}}{\rho} & \hat{u}\end{bmatrix},\qquad A^{(20)}:=\begin{bmatrix}1+\hat{u}^2 & 2\dfrac{\rho}{\sqrt{p'}}\hat{u}\\[2ex] 2\dfrac{\sqrt{p'}}{\rho}\hat{u} & \dfrac{3}{\Gamma}+\hat{u}^2\end{bmatrix},$$

$$A^{(02)}:=\begin{bmatrix}\tau_y+\tilde{k}_\rho\hat{u} & -\tilde{k}_u\dfrac{\rho}{\sqrt{p'}}\\[2ex] 0 & \tau_y\end{bmatrix},\qquad A^{(12)}:=\begin{bmatrix}-\tilde{k}_\rho\hat{u}^2 & \tilde{k}_u\dfrac{\rho}{\sqrt{p'}}\hat{u}\\[2ex] 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tau:=\tau_x+\tau_y,\quad \hat{u}:=\frac{u}{\sqrt{p'}},\quad \Gamma(\rho):=\frac{\rho p'(\rho)}{p(\rho)},\quad \tilde{k}_\rho:=\frac{k_\rho\rho\sqrt{p'}}{\kappa},\quad \tilde{k}_u:=\frac{k_u\rho\sqrt{p'}}{\kappa}.$$

Величина $\Gamma(\rho)$ – это первый адиабатический показатель функции $p(\rho)$.

Следуя [8], перейдем к нормированному вектору возмущений

$$\delta\hat{\mathbf{z}}:=\left(\frac{\delta\rho}{\rho},\frac{\delta u}{\sqrt{p'}}\right)=P^{-1}\delta\mathbf{z},$$

состоящему из относительного возмущения плотности и возмущения скорости, отнесенного к фоновой скорости звука; здесь P – диагональная матрица 2-го порядка с

диагональными элементами ρ и $\sqrt{p'}$. Умножим систему уравнений (4) слева на P^{-1} и преобразуем ее к эквивалентному виду

$$\partial_t \delta\hat{\mathbf{z}} + \sqrt{p'}\,\hat{B}^{(10)}\partial_x \delta\hat{\mathbf{z}} = \tau_x p' \hat{A}^{(20)}\partial_x^2 \delta\hat{\mathbf{z}} + \kappa\hat{A}^{(02)}\partial_y^2 \delta\hat{\mathbf{z}} + \tau\sqrt{p'}\,\hat{A}^{(12)}\partial_x\partial_y^2 \delta\hat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

с матрицами

$$\hat{B}^{(10)} = \begin{bmatrix} \hat{u} & 1 \\ 1 & \hat{u} \end{bmatrix}, \qquad \hat{A}^{(20)} = \begin{bmatrix} 1+\hat{u}^2 & 2\hat{u} \\ 2\hat{u} & \dfrac{3}{\Gamma}+\hat{u}^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}^{(02)} = \begin{bmatrix} \tau_y + \tilde{k}_\rho \hat{u} & -\tilde{k}_u \\ 0 & \tau_y \end{bmatrix}, \qquad \hat{A}^{(12)} = \begin{bmatrix} -\tilde{k}_\rho \hat{u}^2 & \tilde{k}_u \hat{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

получающимися из исходных с помощью преобразования подобия $\hat{C} := P^{-1}CP,\ C = B^{(10)}$, $A^{(20)}, A^{(02)}, A^{(12)}$.

Для анализа устойчивости системы уравнений (5) рассмотрим гармонические по пространственным переменным комплекснозначные функции вида

$$\delta\hat{\mathbf{z}}(x,y,t) = \exp\left\{\lambda t + \mathbf{i}\left(\frac{\xi}{\sqrt{p'}}x + \frac{\eta}{\kappa}y\right)\right\}\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \neq 0,$$

где **i** – мнимая единица, а ξ,η – любые вещественные числа, одновременно не равные 0. Они являются решениями системы (5) при комплексных λ=λ(ξ,η), удовлетворяющих характеристическому уравнению

$$\det\left[\lambda(\xi,\eta)I + A(\xi,\eta)\right] = 0, \tag{6}$$

где комплексная матрица A=A(ξ,η) имеет вид

$$A(\xi,\eta) := \tau_x \xi^2 \hat{A}^{(20)} + \tau_y \eta^2 \hat{A}^{(02)} + \mathbf{i}\xi(\hat{B}^{(10)} + \tau\eta^2 \hat{A}^{(12)}),$$

а I – единичная матрица. Элементы A(ξ,η) таковы:

$$a_{11}(\xi,\eta) = \tau_x(1+\hat{u}^2)\xi^2 + (\tau_y + \tilde{k}_\rho\hat{u})\eta^2 + \mathbf{i}\left(\hat{u}\xi - \tau\tilde{k}_\rho\hat{u}^2\xi\eta^2\right),$$

$$a_{12}(\xi,\eta) = 2\tau_x\hat{u}\xi^2 - \tilde{k}_u\eta^2 + \mathbf{i}\left(\xi + \tau\tilde{k}_u\hat{u}\xi\eta^2\right), \qquad a_{21}(\xi,\eta) = 2\tau_x\hat{u}\xi^2 + \mathbf{i}\xi,$$

$$a_{22}(\xi,\eta) = \tau_x\left(\frac{3}{\Gamma} + \hat{u}^2\right)\xi^2 + \tau_y\eta^2 + \mathbf{i}\hat{u}\xi.$$

Систему уравнений (5) будем называть *устойчивой* относительно гармонических возмущений, если

$$\operatorname{Re}\lambda(\xi,\eta) < 0 \quad \text{при всех} \quad \xi,\eta \quad \text{таких, что} \quad \xi^2 + \eta^2 > 0. \tag{7}$$

Перепишем характеристическое уравнение (6) в стандартном виде

$$p_2(\lambda) := \lambda^2 + \operatorname{tr} A\lambda + \det A = 0,$$

где tr$A$ – это след A. В соответствии с [10] для анализа выполнения свойства (7) отделим вещественные и мнимые части tr$A$ и det$A$, т.е. запишем их в виде

$$\operatorname{tr} A = a_1 + \mathbf{i}b_1, \quad \det A = a_0 + \mathbf{i}b_0 \tag{8}$$

и рассмотрим квадратный трехчлен

$$-\mathbf{i}p_2(\mathbf{i}\alpha) = a_1\alpha + b_0 + \mathbf{i}(\alpha^2 + b_1\alpha - a_0).$$

Выпишем результант многочленов, составляющих его мнимую и действительную части (при вещественном α):

$$V_4 = V_4(\xi,\eta) := \det\begin{bmatrix} 1 & b_1 & -a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & -a_0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_0 \end{bmatrix} = a_1b_1b_0 + a_1^2a_0 - b_0^2.$$

Отметим, что его главный угловой минор 2-го порядка положителен:

$$V_2 := \det\begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} = a_1 = \tau_x\left(1 + \frac{3}{\Gamma} + 2\hat{u}^2\right)\xi^2 + (2\tau_y + \tilde{k}_\rho\hat{u})\eta^2 > 0 \tag{9}$$

при $\xi^2 + \eta^2 > 0$. Тем самым согласно обобщенному критерию Рауса-Гурвица [10] критерием выполнения свойства (7) служит неравенство

$$V_4(\xi,\eta) > 0 \quad \text{при всех} \quad \xi,\eta \quad \text{таких, что} \quad \xi^2 + \eta^2 > 0. \tag{10}$$

Выведем как достаточные, так и необходимые условия справедливости этого неравенства, а значит и свойства устойчивости (7).

Утверждение 1. *Пусть* $\bar{u} = 0$. *Тогда для справедливости свойства устойчивости* (7) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{k_u\bar{\rho}\sqrt{p'(\bar{\rho})}}{2\bar{\tau}_y\kappa(\bar{\rho})} \le 1. \tag{11}$$

Доказательство. При $\hat{u} = 0$ матрица A существенно упрощается:

$$A(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \tau_x\xi^2 + \tau_y\eta^2 & -\tilde{k}_u\eta^2 + \mathbf{i}\xi \\ \mathbf{i}\xi & \tau_x\dfrac{3}{\Gamma}\xi^2 + \tau_y\eta^2 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{tr} A = \tau_x\left(1+\frac{3}{\Gamma}\right)\xi^2 + 2\tau_y\eta^2, \quad \det A = (\tau_x\xi^2+\tau_y\eta^2)\left(\tau_x\frac{3}{\Gamma}\xi^2+\tau_y\eta^2\right)+\xi^2+\mathbf{i}\tilde{k}_u\xi\eta^2$$

и поэтому

$$V_4 = \left[\tau_x\left(1+\frac{3}{\Gamma}\right)\xi^2+2\tau_y\eta^2\right]^2\left[(\tau_x\xi^2+\tau_y\eta^2)\left(\tau_x\frac{3}{\Gamma}\xi^2+\tau_y\eta^2\right)+\xi^2\right]-\tilde{k}_u^2\xi^2\eta^4.$$

Перепишем V_4 в виде

$$V_4 = \xi^2\left[\tau_x^2\left(1+\frac{3}{\Gamma}\right)^2\xi^4+4\tau_x\tau_y\left(1+\frac{3}{\Gamma}\right)\xi^2\eta^2+(4\tau_y^2-\tilde{k}_u^2)\eta^4\right]+r_4(\xi^2,\eta^2),$$

где полином $r_4(\xi^2,\eta^2)>0$ при любых ξ,η, одновременно не равных 0, причем

$$r_4(\xi^2,\eta^2) = O\left((\xi^2+\eta^2)^4\right) \quad \text{при} \quad \xi\to 0,\ \eta\to 0.$$

Очевидно, при условии $4\tau_y^2-\tilde{k}_u^2\ge 0$ неравенство (10) выполнено. С другой стороны, рассмотрев $\xi \asymp \eta^{1+\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon\in(0,1)$, получим формулу

$$V_4 = (4\tau_y^2-\tilde{k}_u^2)\eta^{6+2\varepsilon}+O\left(\eta^{6+4\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad \eta\to 0,$$

поэтому то же самое условие необходимо для выполнения неравенства (10). Указанное условие эквивалентно (11).

***Утверждение* 2.** *Пусть* $\bar{u}\ge 0$. *Тогда для справедливости свойства устойчивости* (7) *необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{k_u\bar{\rho}\sqrt{p'(\bar{\rho})}}{2\bar{\tau}_y\kappa(\bar{\rho})}\left(1-\frac{k_\rho}{k_u}\frac{\bar{u}}{\sqrt{p'(\bar{\rho})}}\right)\le 1. \tag{12}$$

Если $\Gamma(\bar{\rho})>3$, *то необходимо также, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\Gamma(\bar{\rho})}\right)}\le\left|1-\frac{\bar{u}}{\sqrt{p'(\bar{\rho})}}\right|. \tag{13}$$

Доказательство. Вернемся к формулам (8) и вспомним выражение (9) для a_1. Кроме того, нетрудно видеть, что при $\xi\to 0$, $\eta\to 0$ имеем также

$$b_1 = 2\hat{u}\xi+O(\xi\eta^2), \quad a_0 = (1-\hat{u}^2)\xi^2+O((\xi^2+\eta^2)^2), \quad b_0 = \xi(a_1\hat{u}+a_2)+O(\xi\eta^2(\xi^2+\eta^2))$$

с $a_2 := -4\tau_x\hat{u}\xi^2+\tilde{k}_u\eta^2$. Поэтому

$$V_4 = \xi^2[a_1 2\hat{u}(a_1\hat{u}+a_2)-(a_1\hat{u}+a_2)^2+a_1^2(1-\hat{u}^2)]+O((\xi^2+\eta^2)^4)=$$
$$=\xi^2(a_1^2-a_2^2)+O((\xi^2+\eta^2)^4).$$

Тем самым верна формула

$$V_4=\xi^2\left(c_{11}\xi^4+2c_{12}\xi^2\eta^2+c_{22}\eta^4\right)+O\left((\xi^2+\eta^2)^4\right)$$

с коэффициентами

$$c_{11}=\tau_x^2\left[\left(1+\frac{3}{\Gamma}+2\hat{u}^2\right)^2-(4\hat{u})^2\right],\qquad c_{22}=(2\tau_y+\tilde{k}_\rho\hat{u})^2-\tilde{k}_u^2,$$

$$c_{12}=\tau_x\left(1+\frac{3}{\Gamma}+2\hat{u}^2\right)(2\tau_y+\tilde{k}_\rho\hat{u})+4\tau_x\hat{u}\tilde{k}_u>0.$$

Для выполнения неравенства (10) необходимо, чтобы $c_{11}\geq 0$, $c_{22}\geq 0$, т.е.

$$\frac{3}{\Gamma}-1+2(\hat{u}-1)^2\geq 0,\qquad 2\tau_y-(\tilde{k}_u-\tilde{k}_\rho\hat{u})\geq 0.$$

Первое из неравенств выполнено при $0<\Gamma\leq 3$ и эквивалентно (13) при $\Gamma>3$, а второе эквивалентно (12).

Согласно доказательству выполнение неравенств (12) и (13) необходимо для справедливости свойства устойчивости (7) даже только в низкочастотном случае $\xi\approx 0$, $\eta\approx 0$.

Отметим, что в случае $\eta=0$ матрица A совпадает с соответствующей матрицей линеаризованной одномерной квазигазодинамической системы в баротропном варианте [8]. Имеем

$$A(\xi,0)=\tau_x\xi^2\hat{A}^{(20)}+\mathbf{i}\xi B^{(10)},\quad \text{где}\quad \hat{A}^{(20)}=\begin{bmatrix} a & c\\ c & b\end{bmatrix},$$

с $a=1+\hat{u}^2$, $b=\dfrac{3}{\Gamma}+\hat{u}^2$, $c=2\hat{u}$. Подсчет приводит к формуле

$$V_4(\xi,0)=\tau_x^2\xi^6(\tau_x^2c_1\xi^2+c_0)$$

с коэффициентами

$$c_1=(a+b)^2(ab-c^2),\quad c_0=(a+b)^2-4c^2=(a-b)^2+4(ab-c^2).$$

Поэтому неравенство (10) при $\eta=0$ эквивалентно неравенству $ab-c^2\geq 0$ при $a\neq b$ либо $ab-c^2>0$ при $a=b$. Ясно, что

$$\det A_0=ab-c^2=\hat{u}^4+3\left(\frac{1}{\Gamma}-1\right)\hat{u}^2+\frac{3}{\Gamma},$$

а условие $a=b$ означает, что Г=3. Если Г<3, то $ab-c^2>0$ с учетом того, что

$$d := 9\left(\frac{1}{\Gamma}-1\right)^2 - 4\cdot\frac{3}{\Gamma} = 9\left(\frac{1}{\Gamma}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\Gamma}-3\right).$$

При Г=3 получаем условие $|\hat{u}|\neq 1$. (Заметим, что при Г=3, $\hat{u}=1$ имеем $a=b=c=2$ и поэтому $\lambda_1(\xi,0)=0,\ \lambda_2(\xi,0)=-2(\tau_x\xi^2+\mathbf{i}\xi)$). При Г>3 получаем условие

$$\left|\hat{u}^2-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{\Gamma}\right)\right| \geq \frac{\sqrt{d}}{2}.$$

С другой стороны, в случае $\xi=0$ свойство устойчивости (7), очевидно, выполнено (т.к. $a_{21}(0,\eta)=0$ и поэтому $\lambda_1(0,\eta)=-a_{11}(0,\eta)<0,\ \lambda_2(0,\eta)=-a_{22}(0,\eta)<0$ при $\eta\neq 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: МАКС Пресс, 2004.
2. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – М.: Научный мир, 2007.
3. *Карамзин Ю.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г.* Двумерная модель автомобильных потоков // Матем. моделирование, 2006, т.18, №6, с.85-95.
4. *Сухинова А.Б., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г.* Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков // Матем. моделирование, 2009, т.21, №2, с.118-126.
5. *Шеретов Ю.В.* Анализ задачи о распространении звука для линеаризованных КГД–систем // В сб.: Применение функционального анал. в теории приближений. – Тверь: Тверской ГУ, 2001, с.178-191.
6. *Дородницын Л.В.* Об устойчивости малых колебаний в квазигазодинамической системе уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2004, т.44, №7, с.1299-1305.
7. *Злотник А.А., Злотник И.А.* Критерий устойчивости малых возмущений для квазигазодинамической системы уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006, т.46, №2, с.262-269.
8. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2008, т.48, №3, с.445-472.
9. *Злотник А.А.* О некоторых свойствах уравнений двумерной квазигазодинамической модели транспортных потоков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №2, с.363-372.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 04.06.09