

Как из наблюдаемых корреляций оценить причинно-следственные связи? Сравнение подходов, используемых в экономике и компьютерных науках

Н. Г. Арефьев¹, С. А. Кузнецов², К. А. Пономарев³

1. Введение

Одной из стандартных задач в экономике является оценка причинно-следственных связей и структурных шоков, взаимодействие которых привело к наблюдаемым в данных ковариациям или другим, более общим зависимостям. В данной работе мы сравниваем подходы к решению этой задачи, разработанные в литературе, посвящённой методу инструментальных переменных, системам одновременных уравнений, структурным векторным авторегрессиям, а также в литературе, посвящённой вероятностным моделям на графах, активно изучаемым в компьютерных науках.

Вклад данной работы заключается в следующем. Во-первых, мы используем общий язык для представления результатов из разных областей литературы. А именно, все результаты представлены как в терминах, определенных в литературе по системам одновременных уравнений, так и в терминах

¹ НИУ ВШЭ, факультет экономики, кафедра макроэкономического анализа. Данная работа является частью более глобального проекта, за помощь в работе над которым я хотел бы поблагодарить Алину Арефьеву, Светлану Брызгалову, Илью Воскобойникова, Булата Гафарова, Бориса Демешева, Олега Ицхоки, Анатолия Пересецкого, Рамиса Хабибулина, Antoine d'Autume, Jean-Bernard Chatelain, Jean-Pierre Drugeon, Jean-Marie Dufour, James Hamilton, Maarten Janssen, Jessie Li, Judea Pearl, Christopher Sims, Alain Trognon, и Mark Watson. Я также благодарю участников групп 7inR, Macroteam и других коллег из НИУ ВШЭ и Университета Париж-1 за плодотворные дискуссии. Данное научное исследование (грант № 14-01-0088) выполнено при поддержке Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 гг.

² НИУ ВШЭ, факультет экономики, кафедра макроэкономического анализа.

³ НИУ ВШЭ, факультет экономики.

вероятностных моделей на графах. Это позволяет нам сравнить рассматриваемые теории. Во-вторых, в Разделе 8 мы предлагаем метод, который обобщает многие из перечисленных подходов. В отличие от литературы по системам одновременных уравнений и от литературы по структурным векторным авторегрессиям, предложенное обобщение позволяет более гибко выбирать ограничения на ковариационную матрицу остатков. В отличие от литературы по вероятностным моделям на графах, предложенное обобщение не предъявляет никаких требований к цикличности модели. В-третьих, мы показываем, что предложенный метод не только обобщает имеющиеся результаты, но и комбинируя их, позволяет доказать идентификацию новых моделей, что было невозможно сделать ни одним из приведенным методов по отдельности.

Работа построена следующим образом. В Разделе 2 представлена постановка задачи, которая является общей для литературы по системам одновременных уравнений (SEM, Simultaneous Equations Models), структурным векторным авторегрессиям (SVAR, Structural Vector Autoregressions), и вероятностным моделям на графах (PGM, Probabilistic Graphical Model). Затем в Разделах 3 – 6 мы делаем обзор различных методов идентификации: метод инструментальных переменных, условие ранга для SEM, условие Рубио-Рамиреса и др. для SVAR, метод частичной идентификации, идентификация на основе графических моделей, а также несколько менее значимых результатов. В Разделе 7 мы делаем короткий обзор теории, которая в последние годы возникла на стыке SVAR и PGM, теории данно-ориентированной идентификации. В Разделе 8 мы обсуждаем, что каждая из рассмотренных теорий может предложить для других разделов литературы, предлагаем обобщающий подход, а так же демонстрируем возможность идентификации новых моделей с помощью обобщенного подхода. В заключении мы поднимаем проблемы и нерешенные задачи, общие для всей литературы.

2. Постановка задачи

Большинство задач, рассмотренных в данной работе, могут быть записаны в форме системы одновременных уравнений, представленной в следующем виде:

$$(1) \quad AY = BZ + \varepsilon_Y,$$

где Y – вектор эндогенных переменных размерности $n \times 1$, Z – вектор экзогенных или predetermined переменных размерности $m \times 1$, именуемый в дальнейшем вектором инструментов, ε_Y – вектор структурных шоков размерности $n \times 1$, A и B – матрицы параметров соответствующей размерности. Матрица A не вырождена. Все переменные центрированы, поэтому константа в уравнении (1) опущена. Структурные шоки ε_Y имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и положительно определенной ковариационной матрицей Σ_Y . Переменные в векторе Z могут коррелировать друг с другом, однако они являются независимыми относительно структурных шоков ε_Y , что является основным их отличием от переменных в векторе Y , и что их делает инструментами.

В некоторых разделах данной работы мы полагаем, что переменные вектора Z были сгенерированы случайным гауссовым процессом вида:

$$(2) \quad SZ = \varepsilon_Z,$$

где матрица S является обратимой, а вектор ε_Z состоит из нормально распределенных случайных величин. По определению инструментов, векторы ε_Y и ε_Z должны быть независимыми. Вся модель может быть представлена в виде:

$$(3) \quad PX = \varepsilon,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} A & -B \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \end{pmatrix}$$

Мы используем y_i для обозначения эндогенной переменной из вектора Y , z_i для обозначения экзогенной переменной из вектора Z , а x_i – когда переменная может быть как эндогенной, так и экзогенной.

Все задачи, рассмотренные в данной работе, мы сводим к оценке взаимного влияния переменных друг на друга. Предложенные ниже определения общего и прямого влияния одной переменной на другую близки, но не идентичны определению влияния в компьютерных науках, см. Bollen, 1989, Pearl (2014).

Для того, чтобы определить каузальный эффект, введем в модель вектор воображаемых переменных Γ размерности $n \times 1$ следующим образом:

$$(3) \quad AY = BZ + \text{diag}(A)\Gamma + \varepsilon_Y,$$

где $\text{diag}(A)$ – матрица размерности $n \times n$, диагональные элементы которой равны диагональным элементам матрицы A , а внедиагональные элементы равны нулю. Изменение γ_i на единицу представляется гипотетическим экспериментом, в ходе которого внешний наблюдатель удерживает значение y_i на единицу выше своего нового равновесного значения, и наблюдает реакцию системы на данное изменение.

Определение 1 (общее влияние одной эндогенной переменной на другую). Общим влиянием y_i на y_j мы называем частную производную y_j по y_i в полном равновесии, определенном системой уравнений (3).

Из Определения 1 следует, что общее влияние y_i на y_j равно $[A^{-1}\text{diag}(A)]_{ji}$. Ввиду того, что вектор Γ является воображаемым, в приложениях вместо оценки влияния γ_i на y_j оценивается влияние ε_i на y_j .

Определение 2 (общее влияние экзогенной переменной на эндогенную). Общим влиянием z_i на y_j мы называем частную производную y_j по z_i в полном равновесии, определенном системой уравнений (1).

Из этого определения следует, что общее влияние z_i на y_j равно $[A^{-1}B]_{ji}$.

В определении 3 ниже рассмотрим две переменные. Переменная x_i может быть либо экзогенной переменной из вектора Z , либо эндогенной переменной из вектора Y , а переменная y_j является эндогенной переменной из вектора Y .

Определение 3 (прямое влияние эндогенной или экзогенной переменной x_i на эндогенную переменную y_j). Прямым влиянием x_i на y_j мы называем частную производную y_j по x_i в частичном равновесии, определенном j -м уравнением системы (1) при условии, что значения всех остальных переменных кроме x_i и y_j остаются неизменными.

Таким образом, прямое влияние z_i на y_j равно a_{ji}/a_{jj} для пары эндогенных переменных и b_{ji}/a_{jj} в случае, если первая переменная является экзогенной, где a_{ij} и b_{ij} – соответствующие элементы матриц A и B .

Примеры

Пример 1. Рассмотрим модель спроса и предложения:

$$(4a) \quad q + \alpha p = \varepsilon^d$$

$$(46) \quad q - \beta p = \varepsilon^s$$

где p и q – логарифмы равновесных цены и количества, ε^d и ε^s – шоки спроса и предложения, а целью эмпирического исследования является оценка параметров α и β , которые интерпретируются как эластичности спроса и предложения.

Модель (4) является примером циклической модели, для которых существует бесконечно много способов сведения к форме (1). Рассмотрим следующую форму записи:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^d \\ \varepsilon^s \end{pmatrix}$$

Для формы записи (5), задача оценки эластичности спроса сводится к задаче оценки прямого воздействия p на q в соответствии с Определением 3, а задача оценки обратной эластичности предложения – к задаче оценки влияния q на p . Возможны и другие способы записи задачи (4) в матричной форме, которые могут по-другому соотноситься с Определениями 1, 2 и 3.

Пример 2. Одной из задач макроэконометрики является оценка влияния проводимой монетарной политики на основные макроэкономические переменные. Например, целью работы может быть оценка влияния ставки процента r , устанавливаемой Федеральной Резервной Системой США (ФРС США), на темп прироста выпуска g и на инфляцию π в рамках следующей структурной векторной авторегрессии:

$$(6) \quad AY_t = \sum_{i=1}^p B_i Y_{t-i} + \varepsilon_t,$$

где $Y = (r \ \pi \ g \ \dots)^T$, а p – количество лагов в оцениваемой модели. Троеточие в векторе Y означает, что в него могут быть включены и другие переменные помимо r , π и g . Модель (6) может быть сведена к виду (1) заменой переменных $Y \equiv Y_t$, $Z \equiv (Y_{t-1}^T \ Y_{t-2}^T \ \dots \ Y_{t-p}^T)^T$, $B \equiv (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_p)$.

Оценка структурной векторной авторегрессии (6) может преследовать два типа целей. Примером цели первого типа может быть оценка правила проведения монетарной политики. Современная макроэкономика предсказывает, что федеральная система США использует при выборе ставки процента правило Тейлора, в соответствии с которым увеличение темпа роста выпуска или увеличение инфляции приводит к увеличению ставки процента r со стороны

ФРС США. Нас может интересовать ответ на вопрос, насколько сильное влияние изменение g и π оказывает на определяемую со стороны ФРС США федеральную ставку процента? Таким образом, целью исследования может быть оценка прямого влияния u_t и π_t на r_t в соответствии с Определением 3.

Нам также может быть интересно, что будет в экономике, если федеральная система отклонится от монетарного правила, временно установив ставку процента выше или ниже уровня, определенного правилом Тейлора, что является примером цели второго типа. Другими словами, нас могут интересовать оценки функций импульсного отклика, показывающих динамический отклик выпуска и инфляции на стимулирующий или сдерживающий шок монетарной политики. Для этого нам потребуется оценить общее влияние ставки процента на текущие значения эндогенных переменных в соответствии с Определением 1, а затем оценить влияние текущих эндогенных переменных на свои же будущие значения в соответствии с Определением 2.

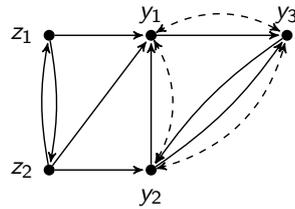
2.1 Графическая интерпретация структурных моделей

В компьютерных науках основным инструментом анализа идентификации является каузальный граф, заданный Определением 4 ниже (см. [11], [22], [29]). При этом в компьютерных науках обычно рассматривают полный каузальный граф, в то время как для сопоставления результатов из компьютерных наук с результатами из теорий систем одновременных уравнений и векторных авторегрессий нам потребуется понятие условного каузального графа.

Определение 4 (Полный и условный каузальный граф). Каузальным графом или каузальной диаграммой для модели (3) называется направленный граф, в котором каждой переменной x_i модели соответствует вершина графа, а каждому ненулевому элементу матрицы P , например, элементу p_{ji} , направленное ребро $x_i \rightarrow x_j$.

- На полном каузальном графе изображены все рёбра, ассоциируемые с ненулевыми элементами матрицы P . Иногда поверх каузального графа изображают дополнительную информацию о возможной корреляции ошибок. В этом случае двунаправленная пунктирная дуга между i -ой и j -ой вершиной

а) Полный каузальный граф



б) Условный каузальный граф

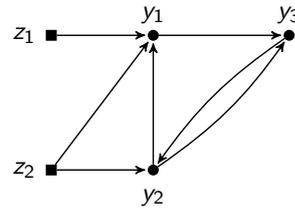


Рисунок 1. Полный и условный каузальный граф для структурной модели (7).

означает, что ошибки ε_i и ε_j могут быть скоррелированы, в то время как отсутствие дуги означает независимость.

- На условном каузальном графе изображены лишь ребра, ассоциируемые с ненулевыми элементами матриц A и B .

Введем для дальнейших рассуждений некоторые понятия из теории графов. Если в графе присутствует направленное ребро $x_i \rightarrow x_j$, то вершина x_i называется *родителем* вершины x_j , а x_j – *ребёнком* x_i . Путь в графе – это последовательность направленных ребер, проходящая от одной вершины до другой. Вершина x_j называется *потомком* x_i в графе G , а x_i предком x_j , если существует путь $x_i \rightarrow \dots \rightarrow x_j$. Каждая вершина интерпретируется как путь длины 1. Два пути называются *независимыми*, если они не содержат общих вершин. Путь, начинающийся и заканчивающийся одной и той же вершиной, называется *циклом*. Модель, которая не содержит циклы, называется *рекурсивной*, в противном случае она является *циклической*.

Пример 3. Рассмотрим следующую структурную модель:

$$(7) \quad \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^y \\ \varepsilon_2^y \\ \varepsilon_3^y \\ \varepsilon_1^z \\ \varepsilon_2^z \end{pmatrix}$$

Покажем сначала, как строится полный каузальный граф для данной модели. Модель включает в себя пять переменных, y_1, y_2, y_3, z_1 и z_2 , поэтому полный каузальный граф включает в себя пять соответствующих вершин, см. Рис. 1а. Выразим y_1 из первого уравнения, y_2 из второго уравнения и т.д. Мы видим, что в уравнение для y_1 входят y_2, z_1 и z_2 , поэтому вершины y_2, z_1 и z_2 являются

родителями y_1 на Рис. 1а. В уравнение для y_2 входят u_3 и z_2 , поэтому соответствующие вершины являются родителями y_2 на каузальном графе. По аналогии, из третьего уравнения следует, что y_1 и y_2 являются родителями u_3 , а из четвертого и пятого, что z_1 и z_2 являются родителями друг для друга. Кроме того, никаких ограничений не было введено на ковариационную матрицу структурных шоков, поэтому все эндогенные переменные попарно связаны пунктирными двунаправленными дугами. Таким образом мы получили полный каузальный граф на Рис. 1а.

На Рис. 1б изображен условный каузальный граф для модели (7). В отличие от полного графа, на условном графе не изображаются связи между экзогенными переменными, а также не указывается, какие пары структурных шоков могут быть зависимыми.

Для рекурсивных моделей каузальный граф всегда является единственным, для циклических же всегда существует несколько представлений модели в графической форме. Например, в модели спроса и предложения (4), один структурный граф соответствует форме записи, при которой p выражено из уравнения спроса, а q – из уравнения предложения, а другой граф – форме записи, когда p выражено из предложения, а q – из спроса. Результаты, рассмотренные ниже, не зависят от того, какую именно форму мы будем использовать.

2.2 Проблема идентификации

Итак, промежуточной или конечной целью анализа системы (1) является оценка общего или частичного влияния разных переменных друг на друга в соответствии с Определениями 1, 2 или 3. Для этого нам необходимо оценить параметры структурной модели (1). Из данных, однако, мы можем оценить лишь функцию плотности условного распределения $f(Y|Z)$. Ввиду гипотезы нормальности остатков, функция $f(Y|Z)$ однозначно определяется вектором условного ожидания и условной дисперсии Y :

$$(8a) \quad E(Y|Z) = A^{-1}BZ \equiv MZ$$

$$(8b) \quad \text{var}(Y|Z) = A^{-1}\Sigma_Y A^{-T} \equiv \Omega$$

При этом матрицу M можно оценить из векторной регрессии Y на Z , а матрицу Ω можно оценить как ковариационную матрицу остатков данной регрессии. Во

всей работе мы полагаем, что имеется достаточное количество наблюдений и достаточная вариация Z для оценки $f(Y|Z)$.

Однако знания условной плотности распределения недостаточно для оценки параметров структурной модели (1), так как существует бесконечное количество значений параметров, дающих на выходе одну и ту же функцию условного распределения. Действительно, умножим модель (1) слева на любую невырожденную матрицу F размерности $n \times n$. В результате мы получим другую структурную модель, дающую ту же функцию условного распределения:

$$(9) \quad \tilde{A}Y = \tilde{B}Z + \tilde{\mathcal{E}},$$

где $\tilde{A} = FA$, $\tilde{B} = FB$ и $\tilde{\mathcal{E}} = F\mathcal{E}$. Модели (1) и (9) эквивалентны в наблюдениях, так как модель (9) дает ту же плотность условного распределения, что и модель (1):

$$(10a) \quad E(Y|Z) = \tilde{A}^{-1}\tilde{B}Z = (FA)^{-1}(FA)Z = A^{-1}F^{-1}FBZ = A^{-1}BZ$$

$$(10b) \quad \text{var}(Y|Z) = E(\tilde{A}^{-1}\tilde{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{E}}^T\tilde{A}^{-T}) = E((FA)^{-1}(F\mathcal{E})(F\mathcal{E})^T(FA)^{-T}) = A^{-1}\Sigma_Y A^{-T}$$

Однако существование бесконечного числа различных значений параметров дающих одну и ту же функцию распределения наблюдаемых переменных ещё не означает, что соответствующие модели подразумевают различные причинно-следственные связи. Общий эффект влияния экзогенных переменных на эндогенные одинаков для всех моделей, эквивалентных на данных, так как $\tilde{A}^{-1}\tilde{B} = (FA)^{-1}FB = A^{-1}F^{-1}FA = A^{-1}B$ для любой невырожденной матрицы F , а это произведение как раз и определяет соответствующий эффект, см. Определение 2. Однако прямые воздействия и оцененные полные воздействия одних эндогенных переменных на другие почти для всех значений параметров остаются неизменными тогда и только тогда, когда матрица F является диагональной. Для прямого воздействия, этот результат следует напрямую из Определения 3. Для общего воздействия, этот результат возникает ввиду того, что вместо отклика системы на изменение воображаемого вектора Γ , в практических приложениях мы оцениваем отклик системы на изменение оцененных шоков \mathcal{E} , а при умножении (1) на недиагональную матрицу F , оцененному шоку $\tilde{\mathcal{E}}_i$ соответствует не γ_i , а какая-то линейная комбинация элементов вектора γ .

Под «разными» структурными моделями мы понимаем модели, которые подразумевают различные причинно-следственные связи. Поэтому при

умножении модели на диагональную матрицу F мы получаем не «другую», а «такую же» структурную модель. Чтобы избежать множественности представления одной и той же модели, вводится правило нормализации, которое не влияет на причинно-следственные связи, но позволяет задать структурную модель единственным образом. Например, мы можем предположить, что все диагональные элементы матрицы A равны единице. Такая нормализация соответствует предположению при оценке одномерной регрессии $y = b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots$ о том, что коэффициент в левой части перед переменной y равен 1, что представляется разумным предположением. Нормализация позволяет избежать множественности представления одной и той же структурной модели, однако не позволяет без дополнительных предпосылок получить интересующие нас причинно-следственные связи из оцененной функции плотности условного распределения $F(Y|Z)$.

Если целью построения модели является лишь построение *инерционного* прогноза динамики вектора Y , то наличие бесконечного числа моделей, эквивалентных в наблюдениях истинной модели, не является проблемой, так как все эквивалентные в наблюдениях модели имеют на выходе одну и ту же функцию плотности условного распределения $f(Y|Z)$, следовательно, все они дают один и тот же инерционный прогноз Y для заданного Z . Однако если целью построения модели является оценка причинно-следственных связей в соответствии с Определениями 1 и 3, то знание функции распределения переменных модели оказывается недостаточным для решения этой задачи.

Для определения причинно-следственных связей требуется решить задачу идентификации, наложив на матрицы параметров в модели (1) дополнительные ограничения, именуемые идентификационными ограничениями. Если мы априори знаем, что какие-то параметры матриц A и B являются нулевыми, либо удовлетворяют более сложным ограничениям, то модель, удовлетворяющая данным ограничениям и дающая на выходе заданную функцию условного распределения $f(Y|Z)$, может оказаться единственной. В этом случае модель является полностью идентифицированной. Модель может так же оказаться частично идентифицированной, когда идентифицирована лишь часть каузальных эффектов, заданных Определениями 1 и 3.

Данная работа анализирует основные подходы к решению задачи идентификации, представленные в литературе. При этом один из основных вопросов в литературе – является ли тот или иной набор ограничений на параметры модели достаточным для полной или частичной идентификации причинно-следственных связей?

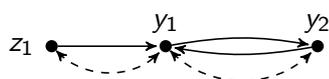
3. Метод инструментальных переменных

Метод инструментальных переменных работает с единственной структурной моделью, которую в матричной форме можно задать следующим образом:

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{21} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

В литературе по инструментальными переменным (см. обзор, например, в [19]) данная структурная форма обычно задается в форме требования релевантности и валидности инструмента z . В терминах (11), релевантность инструмента z означает, что коэффициент b_{21} отличен от нуля, а валидность – что z ортогонален структурному шоку ε_1 и коэффициент b_{11} равен нулю. При этом не накладываются ограничения на ковариационную матрицу структурных шоков, так же как и на значения параметров a_{12} и a_{21} кроме того, что матрица A обратима. Метод инструментальных переменных немного отличается от общей постановки задачи (1), так как допускает корреляцию инструмента со структурным шоком ε_2 .

Структурный граф для модели (11) имеет следующий вид:



Метод инструментальных переменных позволяет оценить только коэффициент a_{21} в модели (11), то есть только этот коэффициент идентифицирован структурной формой (11). Этот коэффициент может быть оценен следующим образом. Решим модель (11) в ожиданиях относительно вектора эндогенных переменных:

$$(12a) \quad E(y_1|z) = \frac{-a_{12}b_{21}}{1-a_{12}a_{21}} z \equiv \pi_1 z$$

$$(12б) \quad E(y_2|z) = \frac{b_{21}}{1-a_{12}a_{21}} z \equiv \pi_2 z$$

откуда $a_{12} = -\frac{\pi_1}{\pi_2}$, а коэффициенты π_1 и π_2 могут быть оценены методом наименьших квадратов.

Пример 4. Рассмотрим следующую модель спроса и предложения:

$$(13a) \quad q + \alpha p = \varepsilon^d$$

$$(13б) \quad q - \beta p = z^s + \varepsilon^s$$

Где большинство обозначений следуют Примеру 1, см. уравнения (4), а новая переменная z^s – это детерминанта предложения.

Так как z^s является детерминантной предложения, изменение значения z^s сдвигает кривую предложения, оставляя неизменной кривую спроса. Поэтому если мы оценим $E(q|z^s)$ и $E(p|z^s)$ из данных, а потом посмотрим, как изменяется p и q при изменении z^s , то наблюдаемая вариация p и q будет соответствовать разным кривым предложения, но одной и тоже кривой спроса, откуда следует, что отношение $\frac{\partial E(q|z^s)/\partial z^s}{\partial E(p|z^s)/\partial z^s}$ измеряет эластичность кривой спроса, равного в модели (13) значению $(-\alpha)$.

При этом мы не можем идентифицировать параметры второго уравнения системы, так как мы не сможем отличить на данных модель (13) от модели, в которой вместо второго уравнения записано, например, среднее арифметическое между первым и вторым уравнением:

$$(14a) \quad q + \alpha p = \varepsilon^d$$

$$(14б) \quad q + \frac{\alpha-\beta}{2} p = \frac{1}{2} z^s + \frac{\varepsilon^s + \varepsilon^d}{2}$$

Так как модели (13) и (14) имеют на выходе одну и ту же функцию совместного распределения и удовлетворяют всем идентификационным ограничениям ($b_1 = 0, b_2 \neq 0$), не существует способа определить, что модель (13) является той моделью, которую мы ищем, а модель (14) – не является такой моделью. Таким образом, второе уравнение в данной модели не идентифицировано.

4. Системы одновременных уравнений и условие ранга

Метод одновременных уравнений можно рассматривать как обобщение метода инструментальных переменных для работы с более сложными структурами (см. [12], [33], [40]). В данной литературе обычно не вводится никаких ограничений на ковариационную матрицу ошибок, а все идентификационные гипотезы

сводятся к ограничениям включения, исключения и линейным ограничениям на параметры. Ограничением включения является гипотеза о том, что какой-то коэффициент структурной модели не равен нулю, а ограничением исключения, что какой-то другой коэффициент равен нулю. Линейное ограничение на параметры требует, чтобы линейная комбинация каких-то коэффициентов в каком-то заданном уравнении равнялась нулю. Например, в методе инструментальных переменных (11) гипотезой включения является $b_{21} \neq 0$, а гипотезой исключения $b_{11} = 0$.

Гипотезы исключения и линейные ограничения на параметры обычно формулируются следующим образом:

$$(15) \quad e_j^T \hat{P} \Psi_j = 0,$$

где e_j – это j -й столбец единичной матрицы, \hat{P} – первые n строк матрицы P , то есть $\hat{P} = (A \ B)$, а Ψ_j – матрица, задающая ограничения на j -ю строку, при этом каждому ограничению исключения или линейному ограничению на j -ю строку соответствует один столбец матрицы Ψ_j .

Рассмотрим пример (7). В этом примере введено одно ограничение на первую строку, $a_{13} = 0$, два ограничения на вторую строку, $a_{21} = b_{21} = 0$, и два ограничения на третью строку, $b_{31} = b_{32} = 0$. Эти ограничения можно задать с помощью следующих матриц Ψ_j :

$$(16) \quad \Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \Psi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если мы подставим, например, Ψ_3 в (15), мы получим:

$$(17) \quad (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & b_{21} & b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (b_{31} \ b_{32}) = 0,$$

что задает ограничения на 3-ю строку.

Идентификация параметров в системах одновременных уравнений обычно проверяется построчно, используя условие ранга:

Теорема 1 (Условие ранга, см. [12], [33], [40]). Предположим, что никаких ограничений не наложено на ковариационную матрицу

структурных шоков Σ . Каждый параметр в j -й строке идентифицирован тогда и только тогда, когда $\text{rank}(\hat{P}\Psi_j) = n - 1$.

В примере (7), почти для всех значений параметров имеем:

$$(18a) \quad \text{rank}(\hat{P}\Psi_1) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$(18b) \quad \text{rank}(\hat{P}\Psi_2) =$$

$$= \text{rank} \left(\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & b_{11} \\ 0 & 0 \\ a_{31} & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(18c) \quad \text{rank}(\hat{P}\Psi_3) =$$

$$= \text{rank} \left(\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Таким образом, 2-я и 3-я строка являются идентифицированными, а 1-я – нет. Как мы обсуждали выше, идентификация j -й строки является необходимым и достаточным условием для определения прямого влияния всех эндогенных и экзогенных переменных на u_j , а также для определения общего влияния u_j на все остальные переменные.

4.1 Графическая интерпретация условия ранга

Для сопоставления результатов, полученных в экономике и компьютерных науках, имеет смысл перевести условие ранга на язык графически моделей. Для этого мы используем следующие два определения:

Определение 5 (Идентифицированная вершина). Вершина u_i в условном каузальном графе называется идентифицированной, если все параметры в структурном уравнении под номером i являются идентифицированными.

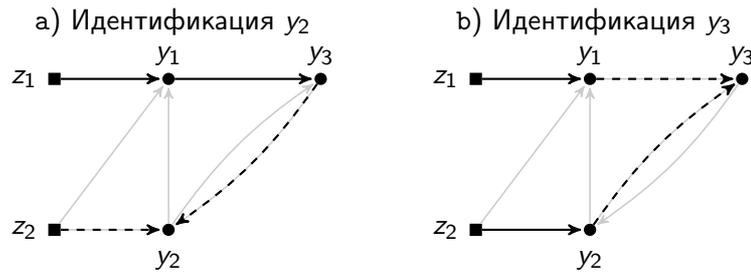


Рисунок 2. Графическая интерпретация условия ранга.

Таким образом, идентификации вершины y_i достаточно для оценки всех прямых воздействий на y_i и всех полных воздействий y_i на другие эндогенные переменные.

Определение 6 (Идентифицирующий путь для родителя вершины y_i). Рассмотрим вершину y_j являющуюся родителем y_i . Если в условном каузальном графе существует путь, начинающийся с инструмента и достигающий данного родителя, $z_k \rightarrow y_{k1} \rightarrow y_{k2} \rightarrow \dots \rightarrow y_j$, то такой путь называется идентифицирующим путем для родителя y_j вершины y_i .

Используя Определения 5 и 6, условие ранга может быть сформулировано следующим образом:

Теорема 2 (Графическая интерпретация условия Ранга, [2]).

Предположим, что все ограничения на параметры заданы в форме ограничений включения и исключения, отображенных на условном каузальном графе. Предположим также, что никаких ограничений не наложено на ковариационную матрицу структурных шоков Σ_Y . Почти для всех значений параметров вершина y_i идентифицирована тогда и только тогда, когда для каждого родителя y_i существует независимый идентифицирующий путь в условном каузальном графе.

Вернемся к Примеру (7). Начнем с вершины y_2 . У этой вершины два родителя, z_2 и y_3 , см. Рис. 3а. Следовательно, для идентификации этой вершины требуются 2 независимых идентифицирующих пути. И такие пути действительно присутствуют. Путь $z_1 \rightarrow y_1 \rightarrow y_3$ по определению является идентифицирующим путем для родителя y_3 вершины y_1 , так как он начинается с инструмента z_1 и достигает соответствующего родителя. Вершина z_2 создает идентифицирующий путь длины 1 для самой себя: путь начинается с z_2 в роли инструмента и достигает z_2 в роли родителя вершины y_1 . У этих двух путей нет

ни одной общей вершины, следовательно, пути являются независимыми. Таким образом, по Теореме 2, вершина y_2 является идентифицированной, что означает, что все параметры во второй строке (7) являются идентифицированными.

Аналогичным образом можно продемонстрировать идентификацию вершины y_3 : вершина имеет двух родителей, y_1 и y_2 , для которых есть два независимых идентифицирующих пути, $z_1 \rightarrow y_1$ и $z_2 \rightarrow y_2$. Однако вершина y_1 не является идентифицированной, так как она имеет трех родителей, z_2, y_1, y_3 , но во всей системе имеется только два инструмента, z_1 и z_2 ; так как невозможно провести три независимых пути, которые бы начинались с двух инструментов, условие ранга не выполнено для y_1 .

5. Подходы к идентификации структурных векторных авторегрессий

Рассмотрим структурную векторную авторегрессию, представленную в следующем виде:

$$(19) \quad AY_t = \sum_{i=1}^p B_i Y_{t-i} + \varepsilon_t,$$

В отличие от литературы по системам одновременных уравнений, стандартной предпосылкой в литературе по структурным векторным авторегрессиям является гипотеза об ортогональности структурных шоков, в соответствии с которой ковариационная матрица структурных шоков Σ_Y является диагональной (см. [4], [17], [18], [34], [35], [36]). Кроме того, литература по структурным векторным авторегрессиям обычно использует другое правило нормализации: вместо предпосылки о том, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется $a_{ii} = 1$, полагается, что ковариационная матрица структурных шоков нормализована к единичной матрице $\Sigma = \mathbf{I}$, при этом элементы на главной диагонали матрицы A положительны, $a_{ii} > 0$.

Гипотеза ортогональности структурных шоков упрощает процедуру идентификации, так как теперь среди всего множества моделей, эквивалентных в наблюдениях, мы можем рассматривать только те, которые имеют диагональную ковариационную матрицу. С учетом этого ограничения, две модели представленные параметрам $[A, B]$ и $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ являются эквивалентными в

наблюдениях тогда и только тогда, когда существует матрица поворота R такая, что $\tilde{A} = RA$, $\tilde{B} = RB$ и $\tilde{\mathcal{E}} = R\mathcal{E}$, где матрица поворота определена как матрица, удовлетворяющая $RR^T = \mathbf{I}$. Действительно, с одной стороны, если существует такая матрица поворота, что $\tilde{A} = RA$, $\tilde{B} = RB$, и $\tilde{\mathcal{E}} = R\mathcal{E}$, то модели $[A, B]$ и $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ будут эквивалентными в наблюдениях, так как они дают одну и ту же функцию условного распределения $f(Y|Z)$:

$$(20) \quad f(Y|Z) = \tilde{A}^{-1}\tilde{B}Z = (RA)^{-1}RBZ = A^{-1}R^{-1}R B Z = A^{-1}B Z$$

$$(21) \quad \text{var}(Y|Z) = \text{var}(Y - \tilde{A}^{-1}\tilde{B}Z) = \text{var}(Y - A^{-1}BZ),$$

одну и ту же единичную ковариационную матрицу структурных шоков:

$$(22) \quad E(\tilde{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{E}}^T) = E(R\mathcal{E}(R\mathcal{E})^T) = RE(\mathcal{E}\mathcal{E}^T)R^T = RR^T = \mathbf{I} = E(\mathcal{E}\mathcal{E}^T)$$

и одни и те же шоки в редуцированной модели:

$$(23) \quad u = \tilde{A}^{-1}\tilde{\mathcal{E}} = (RA)^{-1}R\mathcal{E} = A^{-1}R^{-1}R\mathcal{E} = A^{-1}\mathcal{E}.$$

С другой стороны, если две модели $[A, B]$ и $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ эквивалентны в наблюдениях, то найдется такая матрица поворота R , что $\tilde{A} = RA$, $\tilde{B} = RB$ и $\tilde{\mathcal{E}} = R\mathcal{E}$. Чтобы это показать, воспользуемся тем, что матрица A является обратимой и обозначим $R = \tilde{A}A^{-1}$. Матрица R должна быть матрицей поворота, так как в противном случае будет нарушено правило нормализации $E(\tilde{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{E}}^T) = \mathbf{I} = E(\mathcal{E}\mathcal{E}^T)$, см. (22). Условие $\tilde{A} = RA$ выполняется по определению R , а выполнение условий $\tilde{B} = RB$ и $\tilde{\mathcal{E}} = R\mathcal{E}$ следует из (20) и (23).

5.1 Условие Рубио-Рамиреса и др.

Условие Рубио-Рамиреса и др. (см. [34]) включает в себя две модификации условия ранга для систем одновременных уравнений, которые были сделаны с целью адаптации условия ранга к гипотезам и методам, используемых в литературе по структурным векторным авторегрессиям. Первая модификация учитывает гипотезу ортогональности структурных шоков. Авторы показывают, что в случае ортогональных шоков, мы можем удалять идентифицированные уравнения из матрицы \hat{P} , и если условие ранга окажется выполненным для оставшихся строк, то эти строки также идентифицированы и подлежат удалению.

Вернемся к примеру (7) и проверке условия ранга в уравнениях (18), но предположим теперь, что структурные шоки являются ортогональными. Как и ранее, на первом шаге мы проверяем, что условие ранга не выполнено для

первой строки. На втором шаге мы вновь видим что условие ранга выполнено для второй строки, что означает, что мы можем удалить вторую строку из матрицы \hat{P} . Обозначим полученную матрицу \hat{P}_1 :

$$(24) \quad \hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & b_{11} & b_{12} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На третьем шаге мы вновь проверяем идентификацию первой строки, но теперь ранг полученной матрицы сравниваем не с 2, а с 1:

$$(25) \quad \text{rank}(\hat{P}_1 \Psi_1) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Что является достаточным условием для идентификации y_1 . После этого мы можем удалить первую строку из матрицы \hat{P}_1 , получив \hat{P}_2 , и найти ранг произведения $\hat{P}_2 \Psi_3$. Так как ранг этого произведения нам нужно сравнивать с нулем, условие ранга для третьей строки всегда выполнено. Следовательно, если для модели (7) мы предполагаем ортогональность структурных шоков, то эта модель полностью идентифицирована.

Вторая модификация условия ранга была введена для того, чтобы учесть возможные нелинейные ограничения на параметры структурной модели. Например, после работы Бланшара и Каха [4], макроэкономисты часто вводят долгосрочные ограничения на параметры модели. Рассмотрим перманентный шок переменной j : $\forall t: \varepsilon_t = e_j$, где e_j – j -й столбец единичной матрицы. Можно показать, что в пределе система (19) стремится к следующему стационарному состоянию:

$$(26) \quad \text{IR}_\infty = (A - \sum_{i=1}^p B_i)^{-T} e_j \equiv \text{IR}_\infty e_j$$

Где, элемент $[\text{IR}_\infty]_{ij}$ показывает долгосрочный отклик переменной y_i на перманентный шок ε_j . Бланшар и Ках вводят гипотезу о том, что перманентный шок спроса не влияет на долгосрочный уровень выпуска, что оказывается достаточным для того, чтобы отличить шоки совокупного спроса от шоков совокупного предложения в оцененной ими модели.

Для того, чтобы сформулировать нелинейные ограничения класса (26), Рубио-Рамирес рассматривают класс преобразований параметров $f(A, B)$, обладающих следующим свойством:

$$(27) \quad f(RA, RB) = Rf(A, B)$$

Примером такого преобразования может быть функция долгосрочного отклика, $f(A, B) = IR_\infty$, либо преобразование матриц параметров в самих себя, $f(A, B) = \hat{P}$, либо их комбинация, $f(A, B) = (IR_\infty \hat{P})$, и так далее. Далее рассматриваются ограничения, наложенные на преобразование $f(A, B)$ по аналогии с (15):

$$(28) \quad e_j^T f(A, B) \Psi_j = 0$$

Рубио-Рамирес и др. [34] обобщают процедуру идентификации, рассмотренную в данном разделе выше, для случаев, когда вместо матрицы \hat{P} в условии ранга для моделей с ортогональными шоками используется $f(A, B)$, и доказывают достаточность соответствующих условий.

5.2 Рекурсивная идентификация

Наиболее ранние работы в области структурных векторных авторегрессий используют рекурсивную схему идентификации, так же именуемую в литературе треугольной идентификации. А именно, переменные в векторе Y расставляются в таком порядке, что для любых пар индексов i и j таких, что $j > i$ предполагается, что прямое воздействие u_j на u_i отсутствует, что означает, что матрица A в модели (19) имеет нижнюю треугольную форму. Вместе с гипотезой ортогональности структурных шоков, этого оказывается достаточно для полной идентификации модели.

Так как рекурсивная идентификация является частным случаем идентификации с помощью условий Рубио-Рамиреса и др., мы не рассматриваем подробно этот раздел литературы.

5.3 Частичная рекурсивная идентификация

Условие Рубио-Рамиреса и других, представленное в предыдущем разделе, покрывает многие случаи, включая рекурсивную гипотезу идентификации, однако оно не покрывает некоторые случаи, рассмотренные в литературе по частичной идентификации, поэтому имеет смысл их рассмотреть отдельно (см. [3], [9], [10]). Целью исследования часто является оценка причинно-следственных связей не всей модели, а только одного уравнения. Если нам удастся идентифицировать коэффициенты лишь в строке i системы (19), то мы сможем оценить прямое воздействие всех переменных на u_i , а так же общее воздействие u_i на все эндогенные переменные.

Для того, чтобы достичь частичной рекурсивной идентификации для y_i , все переменные модели кроме y_i делят на две группы, Y_1 и Y_2 , такие, что текущие значения переменных вектора Y_1 могут напрямую влиять на все текущие переменные системы, текущее значение y_i может напрямую влиять только на Y_2 , а текущие значения переменных вектора Y_2 могут напрямую влиять только на текущие значения других переменных этого же вектора. В результате индекс переменной y_i может поменяться, однако порядок переменных в векторе Y может быть произвольным.

Пусть n_1 – количество переменных в векторе Y_1 , а n_2 – количество переменных вектора Y_2 . Матрица A для частично рекурсивной модели имеет следующую форму:

$$(29) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где матрица A_{11} имеет размерность $n_1 \times n_1$, A_{21} размерность $1 \times n_1$, A_{22} размерность 1×1 , а размерность оставшихся матриц можно посчитать по остаточному принципу.

Предположим, что существует модель $[\tilde{A}, \tilde{B}]$, эквивалентная на данных модели $[A, B]$ такая, что матрица \tilde{A} имеет ту же блочную структуру, что и матрица A , см. (29). Раз так, то должна существовать матрица поворота R , такая, что $\tilde{A} = RA$. Разобьём эту матрицу поворота на блоки той же размерности, что и матрица A . Перемножим блочную матрицу R на блочную матрицу A . Ограничения на матрицу A , представленные в уравнении (29), дают следующие ограничения на матрицу поворота:

$$\begin{aligned} R_{13}A_{33} &= 0 \\ R_{12}A_{22} + R_{13}A_{32} &= 0 \\ R_{23}A_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Так как матрица A является невырожденной, блоки A_{11} , A_{22} и A_{33} также должны быть невырожденными. В этом случае из уравнений выше следует $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0$. Кроме того, матрица R должна быть матрицей поворота, следовательно $RR^T = I$, откуда по аналогии можно вывести, что $R_{21} = R_{31} = R_{32} = 0$, а блоки R_{11} , R_{22} и R_{33} должны сами собой представлять матрицы поворота. Так как блок R_{22} имеет единичную размерность, $R_{22} = 1$.

Таким образом, если существуют две разные модели, эквивалентные на данных, но они должны быть связаны друг с другом матрицей поворота R , которая имеет следующую форму:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}$$

Из этого следует, что идентификационные гипотезы, которые мы делаем относительно блоков A_{11} и A_{33} не влияют на оцененные значения параметров, ассоциируемых с i -ой строкой структурной модели. Поэтому мы можем, например, оценить модель, используя рекурсивную идентификацию, но при этом помнить, что лишь для i -й строки соответствующие каузальные эффекты могут быть посчитаны.

5.4 Графическая интерпретация методов идентификации SVAR

Если структурные шоки являются ортогональными, то помимо первичных инструментов, рассмотренных в Разделе 3, для построения идентифицирующих путей мы также можем использовать рекурсивные и относительные инструменты. Эти инструменты создают дополнительные идентифицирующие пути, следовательно, позволяют идентифицировать дополнительные параметры модели.

Определение 7 (Относительный инструмент). Рассмотрим модель с ортогональными структурными шоками. Эндогенная переменная u_j является относительным инструментом для родителя вершины u_i , если u_j не является потомком u_i .

Определение 8 (Рекурсивный инструмент). Рассмотрим модель с ортогональными структурными шоками. Любая идентифицированная вершина является рекурсивным инструментом для ещё не идентифицированных вершин.

Теорема 3 предлагает графическую интерпретацию условия Рубио-Рамиреса и др. и теории частичной идентификации. Возможность использования рекурсивных инструментов для идентификации доказывается из условия Рубио-Рамиреса и др., а возможность использования относительных инструментов – из теории частичной идентификации.

Теорема 3 (Графическая интерпретация условия Рубио-Рамиреса и др. и теории частичной идентификации, [2]). Предположим что структурные шоки являются независимыми, следовательно, матрица Σ является диагональной. Если для каждого родителя u_i существует независимый идентифицирующий путь, начинающийся с первичного, рекурсивного или относительного инструмента и достигающий соответствующего родителя, то вершина u_i идентифицирована почти для всех значений параметров.

Вернемся к примеру (7). На Рис. 2а мы показали, что вершина u_2 является идентифицированной, следовательно, если мы вводим гипотезу ортогональности структурных шоков, u_2 может быть использована в качестве рекурсивного инструмента для идентификации u_1 . В этом случае каждый из родителей u_1 , коими являются z_1, z_2 и u_2 , создает идентифицирующий путь длины 1 для самого себя. Это доказывает идентификацию вершины u_1 .

5.5 Идентификация на основе знаковых ограничений

Ввиду того, что экономисты на данный момент не смогли подобрать набор идентифицирующих гипотез для структурных макроэконометрических моделей, с которым были бы согласны все исследователи, популярность набирают методы знаковой идентификации (см. [1], [14], [15], [20], [38]). Рассматриваются ограничения в форме нестрогих неравенств на отдельные параметры модели или же на функции импульсного отклика. Очевидный недостаток данного подхода заключается в том, что на выходе получается не единственная оцененная модель, а целый набор моделей. Когда же помимо неопределенности модели принимаются в расчет ещё и доверительные интервалы для оцененных параметров, результаты получаются крайне неинформативными. По имеющейся у нас информации, не смотря на теоретическую элегантность, пока что эти методы не позволили получить ни одной функции импульсного отклика, значимо отличающегося от нуля. Поэтому мы не будем останавливаться подробно на этих методах.

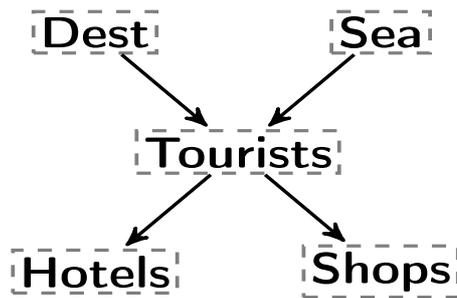


Рисунок 3. Каузальный граф для Примера 4.

6. Методы идентификации, применяемые в компьютерных науках

В данном разделе мы говорим преимущественно о вероятностных моделях на графах (PGM), имеющих успех во многих приложениях, разработанных специалистами в компьютерных науках для медицины, образования, распознавания образов и текстов, генетических исследований и т.д., см. [11], [22], [24], [29], [41]. Мы уже частично начали рассматривать соответствующую литературу, введя понятие каузального графа в Разделе 2 и предложив интерпретации известных условий идентификации на языке графических моделей. В данном разделе мы сначала рассмотрим несколько базовых понятий из теории PGM, которые нам пригодятся в следующих разделах, а затем приведем несколько результатов, полезных для идентификации, полученных в компьютерных науках.

6.1 d -сепарация и коллаидеры

Одним из базовых инструментов анализа графических моделей является анализ d -сепарации⁴ вершин каузального графа. Две вершины графа являются d -сепарированными, если знание значения, которое принимает случайная величина, ассоциируемая с одной вершиной графа, не позволяет улучшить прогноз для случайной величины, ассоциируемой со второй вершиной графа.

Пример 4. В этом примере мы отойдем от гипотезы линейных гауссовых моделей. Предположим, что количество туристов в городе зависит только от

⁴ Термин d -сепарация является калькой с английского d -separation, или directional separation.

двух переменных – близости города к морю и количества достопримечательностей. Количество туристов, в свою очередь, влияет на число отелей и сувенирных лавок. Каузальная диаграмма для данной структурной модели изображена на Рис. 3.

Рассмотрим, когда одна переменная может давать информацию о другой переменной при условии, что мы, возможно, наблюдаем какие-то ещё переменные. Мы можем рассуждать следующим образом:

- Если в городе много туристов, то, вероятно, там много отелей, и наоборот. Следовательно, количество отелей и количество туристов не являются d -сепарированными.
- Если в городе много достопримечательностей, вероятно, там много туристов, следовательно, там, вероятно, много и отелей. Таким образом количество достопримечательностей и количество отелей не являются d -сепарированными. Однако если мы знаем, что в городе много туристов, то информация о количестве достопримечательностей не помогает улучшить прогноз по количеству отелей, следовательно, количество достопримечательностей и количество отелей становятся d -сепарированными, когда мы наблюдаем количество туристов.
- Если в городе большое количество достопримечательностей, это может означать, что туда приезжает много туристов, однако ничего не говорит о близости города к морю. Однако если в городе почти нет достопримечательностей, но мы видим, что там много туристов, можно сделать предположение, что город, вероятно, расположен близко к морю. Такой же вывод может быть сделан, если мы знаем, что в городе много отелей. Таким образом, количество достопримечательностей и близость к морю являются d -сепарированными если мы не наблюдаем количество туристов, количество отелей, или количество магазинов, однако они перестают быть d -сепарированными, когда мы наблюдаем хотя бы одну из этих случайных величин.

Пример 4 показывает роль коллайдеров и V -структур в распространении информации. V -структурой называется подграф вида $x_i \rightarrow x_k \leftarrow x$, а x_k в такой структуре называется коллайдером. В Примере 4 количество туристов является коллайдером, который блокирует распространение информации между

количеством достопримечательностей и близостью к морю когда мы не наблюдаем коллаيدر или одного из его потомков, однако наблюдение коллаидера или одного из потомков открывает соответствующий путь.

Определение 5 (Активный путь). Путь $x_1 - \dots - x_n$ в графе G называется активным, если в нем не встречается V -структур.

Например, путь $\text{Dest} \rightarrow \text{Tourtists} \rightarrow \text{Shops}$ является активным, а путь $\text{Dest} \rightarrow \text{Tourtists} \leftarrow \text{Sea}$ – нет.

Определение 6 (d-сепарированные вершины). Вершины x_i и x_j называются d -сепарированными на графе G , если не существует активного пути между вершинами x_i и x_j . Обозначение: $d\text{-Sep}_G(x_i, x_j)$

То есть в Примере 4 имеем: $d\text{-Sep}_G(\text{Dest}, \text{Sea})$.

Определение 7 (условно активный путь). Путь $x_1 - \dots - x_n$ в графе G называется активным при условии $W \in X$, если:

- (1) Для каждой V -структуры $x_{i-1} \rightarrow x_i \leftarrow x_{i+1}$ верно, что x_i или один из его потомков является элементом множества наблюдаемых переменных W
- (2) В этом пути не встречается других $x_j \in W$

Определение 8 (условная d-сепарация). Вершины x_i и x_j называются d -сепарированными в графе G при условии W , если не существует активного пути из x_i в x_j при условии W . Обозначение: $d\text{-Sep}_G(x_i, x_j | W)$

Если две вершины являются d -сепарированными, то функции распределения соответствующих случайных величин являются независимыми, что в гауссовом случае почти для всех значений параметров верно тогда и только тогда, когда корреляция между этими двумя переменными равна нулю. Аналогично, почти для всех значений параметров две переменные являются d -сепарированными при условии W тогда и только тогда, когда частичная корреляция между этими двумя переменными при условии W равна нулю, где частичная корреляция определена как корреляция между остатками регрессий соответствующих переменных на множество W .

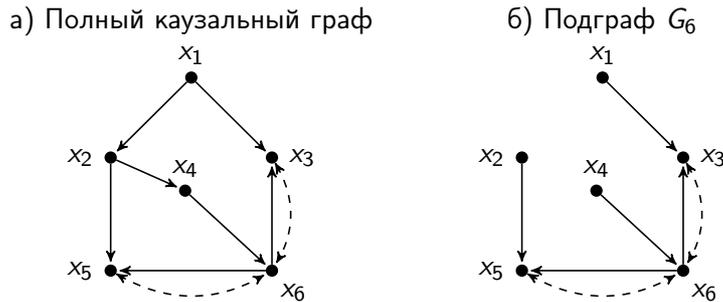


Рисунок 4. Полный каузальный граф и подграф G_6 , построенный на основе компоненты C_6 .

6.2 Идентификация в компьютерных науках

Литература по компьютерным наукам рассматривает преимущественно рекурсивные модели. Если бы при этом была использована гипотеза независимости структурных шоков, то вопрос об идентификации не стоял, так как рекурсивные модели с ортогональными структурными шоками всегда полностью идентифицированы. Однако шоки в рассмотренных ниже утверждениях могут быть зависимыми.

Многие результаты, полученные в компьютерных науках, повторяют результаты, полученные в теориях SEM и SVAR. В данном разделе мы приводим лишь те, которым мы не нашли аналогов в указанных выше разделах литературы.

6.2.1 Идентификация на основе C-компонент

Иногда каузальные графы бывают слишком сложными для прямого графического анализа, особенно если ошибки нескольких переменных зависимы между собой. Методы идентификации, которые мы рассмотрели, могут не работать для полного графа, однако, если выделить некоторый подграф, они вновь окажутся эффективными. Для того, чтобы определить такой подграф, нам понадобятся понятие C-компоненты.

Определение 8 (C-компонента). Пусть V – множество всех вершин полного каузального графа G . C-компонентой вершины x_i , которую мы обозначим C_i , называется максимальное множество вершин $S \subset V$, такое что $x_i \in S$, и все вершины этого множества соединены друг с другом двунаправленными дугами, то есть их ошибки попарно-зависимы.

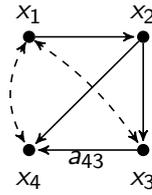


Рисунок 5. Пример модели, удовлетворяющей условию отсутствия арок.

Задачу идентификации в рамках полного графа можно разбить на задачи идентификации в рамках отдельных компонент, используя следующий результат:

Теорема 4 (Идентификация с использованием С-компонент, [37]).

Рассмотрим подграф G_i , образованный С-компонентой вершины x_i и родителями всех вершин, входящих в эту С-компоненту. Вершина x_i идентифицирована в G_i , тогда и только тогда, когда эта вершина идентифицирована и в полном каузальном графе G .

Рассмотрим пример, представленный на Рис. 4а. Заметим, что вершины x_3, x_5 или x_6 принадлежат одной компоненте $\{x_3, x_5, x_6\}$, назовём её C_6 . Следовательно, для проверки идентификации x_3, x_5 или x_6 во всей структурной модели достаточно проверить идентификацию в подграфе G_6 , см. Рис. 4б. Переменные x_1, x_2 и x_x в модели на Рис. 4б обладают всеми необходимыми свойствами инструментов, следовательно, мы можем рассмотреть модель, ассоциируемую с Рис. 4б, в которой $x_1, x_2, x_4 \in Z$, а $x_3, x_5, x_6 \in Y$, а затем воспользоваться условием ранга, чтобы убедиться, что эти вершины идентифицированы, см. Теорему 2.

6.2.2 Идентификация по правилу отсутствия арок

Определение 9 (Арка). Аркой называется подграф из двух вершин, в котором как минимум одна вершина является родителем второй, и в которой ошибки не ортогональны.

Например, на рисунке 9 (а) присутствует арка $x_5 - x_6$. Используя это понятие, Брито и Пёрл предложили следующий графический критерий идентификации.

Теорема 5 (правило отсутствия арок, [6]). Любая рекурсивная модель, в которой нет арок, полностью идентифицирована.

Рассмотрим пример, представленный на Рисунке 5. Задача состоит в том, чтобы идентифицировать коэффициент a_{43} . Данная задача не такая тривиальная, как может показаться на первый взгляд, потому не очевидно, выполнены ли предпосылки теоремы Гаусса-Маркова. Например, если попытаться построить регрессию x_4 на x_2 и x_3 , то возникает следующая проблема: включение в модель переменной x_2 открывает путь $x_3 \leftrightarrow x_1 \leftrightarrow x_4$, так как x_2 является потомком x_1 . Следовательно, в этой модели присутствует механизм обратной связи от x_4 к объясняющим переменным. Более того, в данной постановке задачи отсутствуют инструменты, подходящие для идентификации рассматриваемого параметра. Однако в данной модели нет арок, поэтому в соответствии с Теоремой 5, она полностью идентифицирована, и все параметры могут быть оценены, например, методом максимального правдоподобия.

7. Данно-ориентированная идентификация

Иногда гипотезы, использованные для идентификации, можно частично или полностью проверить на данных, и в этом случае говорят о данно-ориентированной идентификации. В литературе встречаются два подхода к этой задаче: идентификация на основе гипотезы о гетероскедастичности структурных шоков и идентификация на основе анализа частичных корреляций. Кроме того, идентификацию иногда проверяют тестируя напрямую сверхидентифицирующие ограничения, однако предыдущие два способа покрывают третий, являясь более удобными на практике, поэтому мы отдельно не рассматриваем третий способ.

7.1 Идентификация на основе гипотезы о гетероскедастичности

Данно-ориентированная идентификация на основе гипотезы о гетероскедастичности структурных шоков представлена в работах [21], [25], [26], [27], [31], [32], и осуществляется следующим образом. Во-первых, имеющиеся ряды данных разбивают на участки, в которых, по мнению авторов, наблюдалась различная вариация структурных шоков. Например, для

экономики США часто вводится гипотеза о том, что в 1980-х вариация каких-то шоков уменьшилась, поэтому ряды данных разбивают на два участка, до 1985 года и после. Затем рассматривается какой-то набор идентификационных гипотез и оцениваются значения параметров модели в период до 1985 года. Затем оцениваются две функции правдоподобия с использованием данных после 1985 года: для оценки первой функции правдоподобия вводят только первоначальный набор идентификационных гипотез, а для оценки второй вводятся дополнительные ограничения о том, что значения структурных параметров P остались неизменными. Наконец, проводится тест отношения правдоподобия, на основе которого принимаются или отвергаются использованные для идентификации гипотезы.

При всей своей привлекательности, данный подход обладает рядом очевидных недостатков. Во-первых, самое слабое звено – это гипотеза о том, что структурные параметры остаются неизменными, а меняется лишь вариация структурных шоков. Многие экономисты, напротив, считают, что в 1980-х изменилось правило проведения монетарной политики, а не вариация структурных шоков: с приходом Пола Волкера в федеральную резервную систему монетарная политика стала более агрессивно реагировать на инфляцию, и именно поэтому вариация многих наблюдаемых переменных снизилась. Во вторых, предложенный тест принимает или отвергает весь набор использованных ограничений, однако не позволяет судить, какое именно ограничение согласуется или не согласуется с данными. Наконец, в третьих, по имеющимся у нас данным на момент подготовки данной статьи, не существует работ, в которых удалось бы добиться частичной или полной идентификации используя данный метод и *только* тестируемые гипотезы.

7.2 Идентификация на основе анализа частичных корреляций

Теория идентификации на основе анализа частичных корреляций возникла из литературы по PGM, и опирается на понятие d -сепарации (см. [2], [7], [13], [28], [30]). Если две переменные x_i и x_j d -сепарированы, то их функции распределения являются независимыми, $f(x_i, x_j) = f(x_i) \cdot f(x_j)$, что в гауссовом случае верно тогда и только тогда, когда корреляция между этими

переменными равна нулю, $\text{corr}(x_i, x_j) = 0$. Аналогично, если две переменные x_i и x_j являются d -сепарированными при условии, что мы наблюдаем набор переменных W , то их функции распределения являются условно независимыми при условии W , $f(x_i, x_j|W) = f(x_i|W) \cdot f(x_j|W)$, что в гауссовом случае верно тогда и только тогда, когда частичная корреляция между x_i и x_j при условии W равна нулю, $\text{corr}(x_i, x_j|W) = 0$. При этом частичную корреляцию можно посчитать, например, как корреляцию между остатками регрессий x_i и x_j на множество W . Различные гипотезы для идентификации создают на выходе различные свойства полных и частичных корреляций, что дает нам какой-то набор гипотез, который мы можем протестировать на данных и проверить верность наших предположений.

Основная сложность данного подхода заключается в том, что необходимо каким-то способом выбрать, какие именно корреляции мы будем оценивать и тестировать гипотезы о их равенстве нулю. Если мы попробуем просто перебрать все возможные частичные корреляции, то такая задача имеет сложность NP-hard порядка $(m + n)$, что означает, что современного персонального компьютера может не хватить даже на простой подсчет всех возможных частных корреляций для SVAR среднего размера и в разумные сроки, не говоря о колоссальном падении мощности проводимых эмпирических тестов ввиду проблемы множественного тестирования гипотез.

В работе [2] вводится понятие *условной частичной корреляции*, которое является частным случаем обычной частичной корреляции. В практических приложениях при оценке SVAR условную частичную корреляцию можно оценить на основе следующей блочной бутстрап процедуры. На каждом шаге бутстрап мы повторяем следующие операции:

1. Из вектора Y сформировать вектор Y_1 путем случайной перестановки без замещения блоков вектора Y заданной длины. Вектор Y_1 аппроксимирует случайный вектор, с таким же маргинальным распределением, как и вектор Y , но независимый от вектора Z .
2. Сформировать вектор \tilde{X} путем случайной выборки с замещением блоков $X = (Y^T \ Z^T)^T$ и вектор \tilde{X}_1 путем случайной выборки с замещением блоков

$X_1 = (Y_1^t Z^T)^T$. Порядок элементов в случайных выборках одинаков для векторов \tilde{X} и \tilde{X}_1 .

3. Оценить матрицы концентрации C и \tilde{C} как обратные матрицы ковариации векторов \tilde{X} и \tilde{X}_1 .
4. Оценить матрицу условной концентрации \hat{C} следующим образом:
 - Все элементы в строках с 1 по n и в столбцах с 1 по n скопировать из матрицы C : для любых i, j таких, что выполняется хотя бы одно условие: $i \leq n$ либо $j \leq n$, имеем: $\hat{c}_{ij} = c_{ij}$
 - Элементы, расположенные ниже строки n и правее столбца n посчитать как разницу между соответствующими элементами матриц C и \tilde{C} : $\forall i > n, j > n: \hat{c}_{ij} = c_{ij} - \tilde{c}_{ij}$.

После проведения заданного числа итераций, значения C и \hat{C} усредняется по всем итерациям, а значения условных частичных корреляций для пары переменных x_i, x_j рассчитывается следующим образом:

$$(29) \quad \rho_{ij} = -\frac{\hat{c}_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}$$

Эти корреляции обладают следующими свойствами:

Теорема 6 (Свойства условных частичных корреляций, [2]).

Рассмотрим модель с ортогональными структурными шоками. Условные частичные корреляции, определенные (м1), удовлетворяют следующим свойствам:

- Для эндогенных переменных, то есть для $\forall i \leq n$, имеем: $\rho_{ii} = -1$
- Для инструментов, то есть $\forall i > n$: $\rho_{ii} = 0$ тогда и только тогда, когда соответствующий инструмент не релевантен, то есть коэффициент перед этим инструментом в каждом структурном уравнении равен нулю. В противном случае $\rho_{ii} < 0$.
- Для эндогенных переменных и для инструментов, почти для всех значений параметров, $\forall i, j, i \neq j$: $\rho_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда в модели нет ни одного уравнения, включающего в себя одновременно обе переменных, x_i и x_j . В противном случае $\rho_{ij} \in (-1, 1)$.

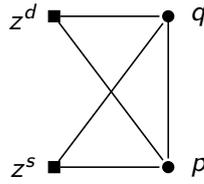


Рисунок 6. Частичный моральный граф для примера (30).

Пример 7. Рассмотрим пример, который демонстрирует, каким образом Теорема 6 может быть использована для данно-ориентированной идентификации. Возьмём модель спроса и предложения, в которой присутствуют как детерминант спроса z^d , так и детерминант предложения z^s :

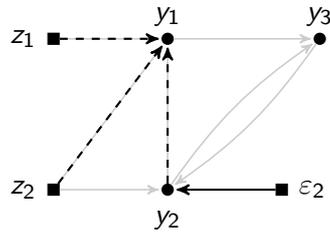
$$(30a) \quad q + \alpha p = z^d + \varepsilon^d$$

$$(30б) \quad q - \beta p = z^s + \varepsilon^s$$

Чтобы воспользоваться Теоремой 6, необходимо сделать предположении о независимости структурных шоков, $E(\varepsilon^d \varepsilon^s) = 0$. Изобразим частичный моральный граф, который определен как ненаправленный граф, вершинами которого являются случайные переменные модели, а каждое структурное уравнение создает клику, – набор попарно смежных вершин. Этот граф изображен на Рис. 6: уравнение (30a) создаёт клику $\{q, p, z^d\}$, а уравнение (30б), – клику $\{q, p, z^s\}$.

Почти для всех значений параметров, по Теореме 6, частичный моральный граф может быть оценен из данных, что открывает возможность для данно-ориентированной идентификации. Действительно, в этом графе между двумя вершинами присутствует ребро тогда и только тогда, когда нет ни одного структурного уравнения, в котором бы появлялась соответствующая пара переменных, что почти для всех значений параметров верно тогда и только тогда, когда соответствующая условная частичная корреляция равна нулю. Оценив частичный моральный граф из данных, мы можем решить задачу покрытия графа кликами: найти настолько мало клик, насколько возможно, чтобы покрыть весь граф. В данном примере эта задача имеет единственно решение, состоящее из двух клик: $\{q, p, z^d\}$ и $\{q, p, z^s\}$. Зная, что исходная система состояла из двух уравнений, и что задача покрытия кликами имеет

а) Идентификация y_1 если предполагается $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$



б) Идентификация y_1 , если предполагается $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$

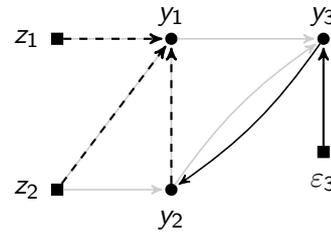


Рисунок 7. Обобщение различных достаточных условий для идентификации.

единственное решение из двух клик, мы можем восстановить все ограничения включения и исключения, присутствующие в истинной модели. В данном примере этого оказывается достаточным для полной идентификации.

8. Обобщения и новые результаты

В данном разделе мы предлагаем обобщенный подход к задаче идентификации, а также демонстрируем, что объединение различных подходов в единую теорию позволяет идентифицировать новые параметры и таким образом получать новые результаты.

Начнем с вероятностных моделей на графах. Относительно слабая сторона этих моделей, – исследование преимущественно рекурсивных моделей, и сравнительно небогатые результаты для циклических моделей. Представленные в данной работе графические интерпретации условия ранга и условия Рубио-Рамиреса и др. являются важным дополнением к данной литературе, позволяющим решать новые графические задачи.

Одной из сравнительно сильных сторон теории идентификации с помощью PGM является проработка случаев, когда структурные шоки являются частично скоррелированными. Действительно, теория SEM и условие ранга обычно предполагают один крайний случай, когда никаких ограничений не наложено на ковариационную матрицу структурных шоков. Теория SVAR рассматривает обычно другой крайний случай, когда ковариационная матрица является диагональной. Теория же PGM допускает корреляцию одних шоков и отсутствие корреляции других.

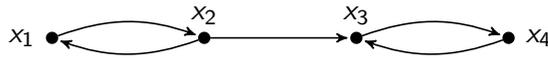


Рисунок 8. Пример модели, когда частичную идентификацию некоторых вершин можно доказать используя лишь комбинацию методов из разных областей литературы.

Мы предлагаем следующее обобщение этих теории, которое покрывает все рассмотренные нами достаточные условия для идентификации для идентификационных гипотез в форме ограничений включения и исключения. Вместо того чтобы вводить рекурсивные инструменты (см. Определение 8 и Теорему 3), давайте оценим структурные шоки и проверим, позволяют ли введенные нами гипотезы использовать их в качестве инструментов.

Вернемся к примеру (7). Используя условие ранга мы проверили, что вершина y_2 является идентифицированной. А раз так, то мы можем оценить структурный шок ε_2 , например, двухшаговым методом наименьших квадратов, и нанести оцененные шоки на условный структурный граф как новую переменную, см. Рис. 7а. Если мы делаем гипотезу о том, что структурные шоки ε_1 и ε_2 ортогональны, то неважно, какие гипотезы мы делаем о матрице ковариации в целом, ε_2 является валидным инструментом для оценки y_1 . А раз так, то для каждого родителя y_1 на Рис. 7а имеется независимый идентификационный путь, следовательно, вершина y_1 идентифицирована. Если же мы не сделали гипотезу об ортогональности ε_1 и ε_2 , мы можем воспользоваться тем, что условие ранга также доказывает идентификацию и y_3 , и если мы предполагаем ортогональность ε_1 и ε_3 , то мы можем использовать ε_3 в качестве инструмента. В этом случае вершина y_1 также идентифицирована, см. Рис. 7б. Можно проверить, что предложенный метод оцененных инструментов, совместно с относительными инструментами, обобщает все рассмотренные в данной работе условия для идентификации для случаев, когда идентификационные гипотезы сформулированы как ограничения включения и исключения, однако он не включает в себя нелинейные ограничения на параметры.

Совместный анализ методов идентификации, предложенных в разных разделах литературы, не только позволяет ознакомиться с результатами друг друга, но

так же и научиться решать новые, ранее не решенные задачи. Эта возможность возникает по двум причинам. Во-первых, вершины, идентифицированные с помощью одного метода, могут рассматриваться как рекурсивные инструменты для другого метода. Во-вторых, относительные инструменты, разработанные в литературе по частичной идентификации для анализа ациклических моделей, могут выполнять функции инструментов также и в циклических моделях.

Чтобы продемонстрировать второй результат, рассмотрим следующий пример:

$$(31) \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \mathbf{I}$$

Каузальный граф для данной модели изображен на Рис. 8. Можно проверить, что ни одно условие по отдельности не позволяет идентифицировать ни одну вершину в этом графе. Однако, заметим, что x_2 является относительным инструментом для идентификации x_4 , а x_4 – рекурсивным инструментом для идентификации x_3 . Таким образом, совместное использование результатов литературы по частичной идентификации и условия Рубио-Рамиреса и др. позволяет идентифицировать новые модели.

9. Нерешенные проблемы

Не смотря на успех рассмотренных методов во многих областях, в литературе имеется ряд нерешенных вопросов. Во-первых, данные методы работают лишь для сравнительно разреженных моделей. Если, например, все ограничения на модель накладываются в форме ограничений включения и исключения, то нам требуется как минимум $n(n - 1)$ нулевых элементов для модели с зависимыми шоками или $n(n - 1)/2$ нулевых элементов для модели с ортогональными шоками для того, что бы выполнить лишь необходимые, но не достаточные условия для полной идентификации. В литературе не предложено ни одного способа идентификации структурной модели в ситуации, когда истинная модель удовлетворяет меньшему числу ограничений.

Если мы имеем набор ограничений на параметры, который является одновременно необходимым и достаточным для идентификации, то этот набор

никак не ограничивает совместную функцию распределения наблюдаемых случайных величин, следовательно, не дает возможностей для данно-ориентированной идентификации. Поэтому для применения методов данно-ориентированной идентификации требуется, чтобы истинная модель была ещё более разряженной. Если же модель не является достаточно разряженной для данно-ориентированной идентификации, в нашем распоряжении не останется никаких методов для проверки выбранных идентификационных гипотез, следовательно, нам придется полагаться лишь на теоретическое обоснование. Однако, как мы знаем из литературы по инструментальным переменным, выбор даже одной теоретически обоснованной гипотезы для идентификации – задача очень трудная и далеко не всегда решаемая. Для оценки же SVAR с n эндогенными переменными требуется обосновать как минимум $n(n - 1)/2$ теоретических гипотез. Наверное, не будет преувеличением сказать, что экономисты редко верят во все те идентификационные гипотезы, которые они используют в своих работах.

Специалисты по компьютерным наукам часто впадают в другую крайность: не полагаясь на априорную теорию, они используют лишь те ограничения, которые не противоречат данным. Как правило речь идет об оценивании рекурсивной модели и выборе такого направления рёбер, которое максимизирует функцию правдоподобия с небольшим штрафом за «лишние» рёбра. Проблема с данным подходом заключается в том, что конечной целью такой работы является не оценка самой модели, а построение прогнозов и доверительных интервалов для каких-то показателей с помощью этих моделей. Однако такая процедура включает в себя проблему последовательного тестирования гипотез: на первом шаге тестируются гипотезы, когда оценивается структурная модель, а на втором, – когда с помощью этой модели оцениваются функции распределения интересующих нас параметров. В настоящее время в литературе не предложено никаких надёжных статистических методов для построения доверительных интервалов при последовательном тестировании гипотез, следовательно, нет никаких гарантий, что оцененная модель сделает достоверный прогноз.

На наш взгляд, современная литература научилась решать два класса задач, используя достаточно убедительные методы. Первый класс – это задачи,

решаемые методом инструментальных переменных. При использовании этого метода требуется ввести теоретически обоснованные и убедительные гипотезы для использования лишь одного инструмента, что во многих приложениях является решаемой задачей. Второй класс задач, – это разряженные модели с хорошей теоретической базой. Для таких моделей мы можем применить одновременно теоретические обоснования для выбора идентификационных гипотез и элементы данно-ориентированной идентификации.

Список литературы

1. Andrews, D. W. and X. Cheng (2012): “Estimation and Inference With Weak, Semi-Strong, and Strong Identification,” *Econometrica*, 80, 2153–2211.
2. Arefiev, N. A Theory of Data-Oriented Identification with a SVAR Application, Higher School of Economics Research Paper No. WP BRP 79/EC/2014, 2014 г.
3. Bernanke, B. and Mihov, I. “Measuring Monetary Policy”, *Quarterly Journal of Economics*, 113 (3), 869–902.
4. Blanchard, O., Quah, D. (1993), “The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances”, *American Economic Review*, 83 (3), 655–673.
5. Bollen, K., *Structural Equations with Latent Variables*. John Wiley, New York, 1989.
6. Brito, C. and Pearl, J. (2002b). A new identification condition for recursive models with correlated errors. *Journal Structural Equation Modeling* 9 459–474.
7. Bryant, H. L. and D. A. Bessler (2011): “Proving causal relationships using observational data,” Tech. rep.
8. Chen, B. and J. Pearl, *Graphical Tools for Linear Structural Equation Modeling* // forthcoming in *Psychometrica*, 2015.
9. Christiano, L. J., M. Eichenbaum, and C. L. Evans (1996), “The Effects of Monetary Policy Shocks: Evidence from the Flow of Funds”, *Review of Economics and Statistics*, 78 (1), 16–34.
10. Christiano, L. J., M. Eichenbaum, and C. L. Evans (1999): “Monetary Policy Shocks: What Have We Learned and to What Extend?” in *Handbook of Macroeconomics*, vol. 1A, North Holland: Amsterdam.

11. Edward, D. (2000): Introduction to Graphical Modelling, New York: Springer, 2nd ed.
12. Fisher, F., The identification problem in econometrics, Mc Graw-Hill, New York, 2nd edition, 1976.
13. Fragetta, M. and G. Melina (2013): "Identification of monetary policy in SVAR models: a data-oriented perspective," Empirical Economics, 45, 831–844.
14. FRY, R. and PAGAN, A. (2007), "Some Issues in Using Sign Restrictions for Identifying Structural Vars" (National Centre for Econometric Research Working Paper 14, April 2007).
15. Bulat Gafarov and José Luis Montiel Olea(2015). ON THE MAXIMUM AND MINIMUM RESPONSE TO AN IMPULSE IN SVARS. Manuscript.
16. Galí, J., J. D. Lopez-Salido, and J. Valles (2003): "Technology shocks and monetary policy: assessing the Fed's performance," Journal of Monetary Economics, 50, 723–743.
17. Giordani, P. (2004): "An alternative explanation of the price puzzle," Journal of Monetary Economics, 51, 1271–1296.
18. Hanson, M. S. (2004): "The "price puzzle" reconsidered," Journal of Monetary Economics, 51, 1385–1413.
19. Imbens, G., Instrumental Variables: an Econometrician's Perspective // NBER Working Paper 19983, 2014.
20. Kilian, L. and D. P. Murphy (2012): "Why agnostic sign restrictions are not enough: understanding the dynamics of oil market VAR models," Journal of the European Economic Association, 10, 1166–1188.
21. Klein, R. and F. Vella (2010): "Estimating a Class of Triangular Simultaneous Equations Models Without Exclusion Restrictions," Journal of Econometrics, 154, 154–164.
22. Koller, D., Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques (Adaptive Computation and Machine Learning series), The MIT Press, 2009.
23. Lauritzen, S. L. (1996): Graphical Models, Oxford University Press.
24. Lauritzen, S. L. and D. J. Spiegelhalter (1988): "Local Computations with Probabilities on Graphical Structures and Their Application to Expert Systems," Journal of the Royal Statistical Society. Series B(Methodological), 50, 157–224.

25. Li, H. and U. K. Müller (2009): "Valid Inference in Partially Unstable GMM Models," *Review of Economic Studies*, 76, 343.
26. Lowbel, A. (2012): "Using Heteroskedasticity to Identify and Estimate Mismeasured and Endogenous Regressor Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, 1, 67–80.
27. Magnusson, L. M. and S. Mavroeidis (2014): "Identification using Stability Restrictions," *Econometrica*, 82, 1799–1851.
28. Oxley, L., M. Reale, and G. Wilson (2009): "Constructing Structural VAR models with conditional independence graphs," *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, 2910–2916.
29. Pearl, J., *Causality: Models, Reasoning, and Inference*, Cambridge University Press, 2nd ed., 2009 г.
30. Reale, M. and G. Wilson (2001): "Identification of vector AR models with recursive structural errors using conditional independence graphs," *Statistical Methods and Applications*, 10, 49–65.
31. Rigobon, R. (2013): "Identification Through Heteroskedasticity," *Review of Economics and Statistics*, 85, 777–792.
32. Rossi, B. (2005): "Optimal Tests for Nested Model Selection With Underlying Parameter Instability," *Econometric Theory*, 5, 962–990.
33. Rubin H., Leipnik R. B. *Measuring the equation systems of dynamic economics //Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, Cowles Commission Monograph., 1950.
34. Rubio-Ramírez, J. F., D. F. Waggoner, and T. Zha (2010): "Structural Vector Autoregressions: Theory of Identification and Algorithms for Inference," *The Review of Economic Studies*, 77, 665–696.
35. Sims, C. (1992): "Interpreting the macroeconomic time series facts: the effects of monetary policy," *European Economic Review*, 36, 2–16.
36. Sims, C. A. (1980): "Macroeconomics and Reality," *Econometrica*, 48, 1–48.
37. Tian, J. (2005). Identifying direct causal effects in linear models. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence*, vol. 20. Menlo Park, CA; Cambridge, MA; London; AAAI Press; MIT Press; 1999.
38. UHLIG, H. (2005), "What are the Effects of Monetary Policy on Output? Results from an Agnostic Identification

39. Procedure”, *Journal of Monetary Economics*, 52 (2), 381–419.
40. Wooldridge J., "Introductory econometrics: A modern approach", Cengage Learning, (Chapter 16), 2012
41. Yuan, M. and Y. Lin (2007): "Model Selection and Estimation in the Gaussian Graphical Models," *Biometrika*, 90, 831–844.