Моторин
Владимир Ильич
ведущий научный сотрудник
НИУ ВШЭ ФБНУ «ИМЭИ»
кандидат экономических наук

Линейные функции производственных затрат в прямоугольных таблицах и моделях «затраты–выпуск»

Ключевые слова: прямоугольная таблица ресурсов и использования, матричнозначная функция производственных затрат, экзогенные возмущения чистого конечного спроса и валовой добавленной стоимости, модели «затраты–выпуск» с экзогенным спросом и с экзогенным предложением, модели цен и физических объемов

Прямоугольная таблица «затраты–выпуск» порождается матрицами выпуска и промежуточного потребления товаров и услуг за рассматриваемый (базовый, с индексом 0) период времени $\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{Z}_0$ размерности $\mathbf{N} \times \mathbf{M}$, где $\mathbf{N}$ – количество продуктов, а $\mathbf{M}$ – число отраслей экономики. В математической записи прямоугольная таблица определяется векторными уравнениями «материального» баланса промежуточного и конечного использования продуктов и «финансового» баланса затрат на производство продукции отраслей в стоимостном выражении соответственно:

$$\mathbf{X}_0\mathbf{e}_\mathbf{M} = \mathbf{Z}_0\mathbf{e}_\mathbf{M} + \mathbf{y}_0, \qquad (1)$$

$$\mathbf{e}'_\mathbf{N}\mathbf{X}_0 = \mathbf{e}'_\mathbf{N}\mathbf{Z}_0 + \mathbf{v}'_0, \qquad (2)$$

где: $\mathbf{e}_\mathbf{M}$ $(\mathbf{e}_\mathbf{N})$ – суммирующий вектор-столбец из $\mathbf{M}$ $(\mathbf{N})$ единичных элементов;

$\mathbf{y}_0$ – вектор-столбец чистого конечного спроса на продукты размерности $\mathbf{N} \times \mathbf{1}$;

$\mathbf{v}_0$ – вектор-столбец валовой добавленной стоимости размерности $\mathbf{M} \times \mathbf{1}$.

Надстрочным символом «штрих» обозначена операция транспонирования матриц (векторов).

Запишем балансовую модель, соответствующую исходной таблице (1) и (2), в свободных переменных, опустив во всех введенных выше обозначениях нижний индекс **0**. Для удобства дальнейшего изложения обозначим $\mathbf{N}$-мерный вектор-столбец выпуска продуктов через $\mathbf{x}_\downarrow = \mathbf{X}\mathbf{e}_\mathbf{M}$, $\mathbf{M}$-мерный вектор-строку выпуска отраслей – через $\mathbf{x}'_\rightarrow = \mathbf{e}'_\mathbf{N}\mathbf{X}$, $\mathbf{N}$-мерный вектор-столбец промежуточного потребления продуктов – через $\mathbf{z}_\downarrow = \mathbf{Z}\mathbf{e}_\mathbf{M}$, а $\mathbf{M}$-мерный вектор-строку расходов отраслей на промежуточное потребление продуктов – через $\mathbf{z}'_\rightarrow = \mathbf{e}'_\mathbf{N}\mathbf{Z}$. Векторы $\mathbf{x}_\downarrow, \mathbf{x}_\rightarrow, \mathbf{z}_\downarrow, \mathbf{z}_\rightarrow$ будем называть товарными и отраслевыми окаймляющими итогами матриц выпуска и промежуточного потребления соответственно. Таким образом, в свободных переменных система $\mathbf{N} + \mathbf{M}$ балансовых уравнений (1), (2) принимает следующий вид:

$$\mathbf{x}_\downarrow = \mathbf{z}_\downarrow + \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}'_\rightarrow = \mathbf{z}'_\rightarrow + \mathbf{v}'. \qquad (3)$$

Целью построения подобных балансовых моделей является оценка реакции экономики на абсолютное или относительное экзогенное изменение чистого конечного спроса (или, вообще говоря, других товарных переменных) и – в силу известной симметрии рассматриваемых матричных уравнений – на экзогенное изменение валовой добавленной стоимости (или, вообще говоря, других отраслевых переменных), а также использование получаемых оценок для прогнозирования макроэкономической динамики. Факторы и причины возникновения тех или иных изменений в экзогенных переменных непосредственного отражения в балансовых моделях не находят, и реакция экономики на экзогенные возмущения оценивается в режиме получения ответов на вопросы типа «что будет, если…?».

Балансовая модель (3) содержит $\mathbf{N} + \mathbf{M}$ линейных уравнений с $3(\mathbf{N} + \mathbf{M})$ скалярными переменными. Если предположить, что анализируемое экзогенное возмущение выражается в терминах $\mathbf{k}$ экзогенных переменных, то для обеспечения точной идентифицируемости модели требуется инкорпорировать в нее $2(\mathbf{N}+\mathbf{M}) - \mathbf{k}$ дополнительных независимых уравнений связи переменных. В частности, при $\mathbf{k} = \mathbf{N}$ необходимо включить в модель $\mathbf{N}+2\mathbf{M}$ независимых уравнений, а при $\mathbf{k} = \mathbf{M}$ требуется дополнить ее $2\mathbf{N}+\mathbf{M}$ независимыми уравнениями. Информационную основу для построения дополнительных уравнений, разумеется, составляют структурные характеристики исходной таблицы «затраты–выпуск» (1), (2).

Систему уравнений (3) вместе с выбранной спецификацией исходного экзогенного возмущения и операциональным набором связей переменных, обеспечивающим точную идентификацию всех неизвестных скалярных величин, будем называть обобщенной задачей анализа «затраты–выпуск». Заметим, что обобщенная задача может быть как линейной, так и нелинейной в зависимости от типа уравнений связи переменных.

Рассмотрим некоторые операциональные возможности построения идентифицирующего набора дополнительных линейных

уравнений балансовой модели (3) в ситуации, когда требуется оценить реакцию экономики на экзогенное изменение вектора чистого конечного спроса $\mathbf{y} = \mathbf{y}_* \neq \mathbf{y}_0$ размерности $\mathbf{N} \times \mathbf{1}$ или вектора валовой добавленной стоимости $\mathbf{v} = \mathbf{v}_* \neq \mathbf{v}_0$ размерности $\mathbf{M} \times \mathbf{1}$.

Прежде всего здесь можно ввести в рассмотрение пару матричнозначных линейных функций производственных затрат, связывающих матрицу промежуточного потребления $\mathbf{Z}$ с вектором выпуска отраслей $\mathbf{x}_{\rightarrow}$ или с вектором выпуска продуктов $\mathbf{x}_{\downarrow}$:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{Z}_0 \left\langle \mathbf{e}'_{\mathbf{N}} \mathbf{X}_0 \right\rangle^{-1}; \tag{4}$$

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\mathbf{B}, \qquad \mathbf{B} = \left\langle \mathbf{X}_0 \mathbf{e}_{\mathbf{M}} \right\rangle^{-1} \mathbf{Z}_0, \tag{5}$$

где: $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – прямоугольные матрицы относительных коэффициентов размерности $\mathbf{N} \times \mathbf{M}$, а заключение символа вектора в угловые скобки "$\langle\cdot\rangle$" (или знак «∧» над ним) обозначает его преобразование в диагональную матрицу соответствующего порядка с элементами этого вектора на главной диагонали [1, p. 697]. Нетрудно видеть, что соотношение (4) при $\mathbf{x}'_{\rightarrow} = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}} \mathbf{X}_0$ и соотношение (5) при $\mathbf{x}_{\downarrow} = \mathbf{X}_0 \mathbf{e}_{\mathbf{M}}$ определяют исходную матрицу промежуточного потребления товаров и услуг $\mathbf{Z}_0$.

Из (4) следует, что

$$\mathbf{z}_{\downarrow} = \mathbf{Z}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\rightarrow},$$

$$\mathbf{z}'_{\rightarrow} = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{Z} = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow} = \mathbf{x}'_{\rightarrow}\left\langle \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{A} \right\rangle$$

и система уравнений (3) в этом случае приобретает следующий вид:

$$\mathbf{x}_{\downarrow} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\rightarrow} + \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}'_{\rightarrow} = \mathbf{x}'_{\rightarrow}\left\langle \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{A} \right\rangle + \mathbf{v}'. \tag{6}$$

Далее, из (5) и (3) имеем

$$\mathbf{z}_{\downarrow} = \mathbf{Z}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\mathbf{B}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} = \langle \mathbf{B}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} \rangle \mathbf{x}_{\downarrow},$$

$$\mathbf{z}'_{\rightarrow} = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{Z} = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\mathbf{B} = \mathbf{x}'_{\downarrow}\mathbf{B};$$

$$\mathbf{x}_{\downarrow} = \langle \mathbf{B}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} \rangle \mathbf{x}_{\downarrow} + \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}'_{\rightarrow} = \mathbf{x}'_{\downarrow}\mathbf{B} + \mathbf{v}'. \tag{7}$$

Балансовые модели (6) и (7) содержат по $\mathbf{N} + \mathbf{M}$ линейных уравнений с $2(\mathbf{N} + \mathbf{M})$ скалярными переменными $\mathbf{x}_{\downarrow}, \mathbf{x}_{\rightarrow}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$, в связи с чем эти системы целесообразно дополнить теми или иными уравнениями связи вектора выпуска продуктов $\mathbf{x}_{\downarrow}$ и вектора выпуска отраслей $\mathbf{x}_{\rightarrow}$. Поэтому можно также потребовать сохранения «вертикальной» или «горизонтальной» структуры матрицы выпуска $\mathbf{X}$ в терминах ее отраслевых и товарных окаймляющих итогов соответственно:

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow}, \qquad \mathbf{G} = \mathbf{X}_0 \langle \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{X}_0 \rangle^{-1}; \tag{8}$$

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{H} = \langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_{\mathbf{M}} \rangle^{-1}\mathbf{X}_0, \tag{9}$$

где: $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ – прямоугольные стохастические матрицы относительных коэффициентов размерности $\mathbf{N} \times \mathbf{M}$, обладающие свойствами $\mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{G} = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}$ и $\mathbf{H}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} = \mathbf{e}_{\mathbf{M}}$. Нетрудно видеть, что соотношение (8) при $\mathbf{x}'_{\rightarrow} = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{X}_0$ и соотношение (9) при $\mathbf{x}_{\downarrow} = \mathbf{X}_0\mathbf{e}_{\mathbf{M}}$ определяют исходную матрицу выпуска товаров и услуг $\mathbf{X}_0$.

Из матричных уравнений связи (8) и (9) вытекают два векторных соотношения:

$$\mathbf{x}_{\downarrow} = \mathbf{X}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} = \mathbf{G}\mathbf{x}_{\rightarrow},$$

$$\mathbf{x}'_{\rightarrow} = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{X} = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\mathbf{H} = \mathbf{x}'_{\downarrow}\mathbf{H},$$

которые позволяют поочередно исключить переменные $\mathbf{x}_{\downarrow}$ и $\mathbf{x}_{\rightarrow}$ как из модели (6):

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_{\rightarrow} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\rightarrow} + \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}'_{\rightarrow} = \mathbf{x}'_{\rightarrow}\langle \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{A} \rangle + \mathbf{v}'; \tag{10}$$

$$\mathbf{x}_{\downarrow} = \mathbf{A}\mathbf{H}'\mathbf{x}_{\downarrow} + \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}'_{\downarrow}\mathbf{H} = \mathbf{x}'_{\downarrow}\mathbf{H}\langle \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{A} \rangle + \mathbf{v}', \tag{11}$$

так и из модели (7):

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_{\rightarrow} = \langle \mathbf{B}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} \rangle \mathbf{G}\mathbf{x}_{\rightarrow} + \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}'_{\rightarrow} = \mathbf{x}'_{\rightarrow}\mathbf{G}'\mathbf{B} + \mathbf{v}'; \tag{12}$$

$$\mathbf{x}_{\downarrow} = \langle \mathbf{B}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} \rangle \mathbf{x}_{\downarrow} + \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}'_{\downarrow}\mathbf{H} = \mathbf{x}'_{\downarrow}\mathbf{B} + \mathbf{v}'. \tag{13}$$

Здесь следует подчеркнуть, что все введенные выше спецификации (10)-(13) обобщенной линейной задачи анализа «затраты–выпуск» содержат по $\mathbf{N} + \mathbf{M}$ линейных уравнений с числом неизвестных скалярных переменных либо $\mathbf{N} + 2\mathbf{M}$, как в моделях (10) и (12), либо $2\mathbf{N} + \mathbf{M}$, как в моделях (11) и (13). Следовательно, в общем случае (при любом соотношении числа продуктов $\mathbf{N}$ и количества отраслей экономики $\mathbf{M}$) в качестве точного идентифицирующего замыкания моделей (10) и (12) естественно использовать $\mathbf{M}$-мерное экзогенное условие $\mathbf{v} = \mathbf{v}_* \neq \mathbf{v}_0$, тогда как для точного идентифицирующего замыкания моделей (11) и (13) требуется привлечение $\mathbf{N}$-мерного экзогенного условия $\mathbf{y} = \mathbf{y}_* \neq \mathbf{y}_0$.

Вместе с тем нетрудно заметить, что при $\mathbf{N} = \mathbf{M}$ выбор альтернативного экзогенного условия также становится допустимым для всех рассматриваемых спецификаций обобщенной линейной задачи анализа «затраты–выпуск», характеристики которых сгруппированы в табл. 1. Таким образом, в случае, когда все матрицы в моделях (10) – (13) квадратные, каждая спецификация обобщенной задачи имеет дополнительное решение, соответствующее альтернативному экзогенному условию.

Таблица 1 – Перечень точно идентифицируемых спецификаций обобщенной линейной задачи анализа «затраты–выпуск» с экзогенными условиями

Модель	Код модели	Известные матрицы	Векторные переменные	Количество переменных	Экзогенная переменная	Альтернативная экзогенная переменная при $N = M$
(10)	**AG**	**A**, **G**	$\mathbf{x}_{\rightarrow}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$	$N{+}2M$	$\mathbf{v} = \mathbf{v}_*$	$\mathbf{y} = \mathbf{y}_*$
(11)	**AH**	**A**, **H**	$\mathbf{x}_{\downarrow}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$	$2N{+}M$	$\mathbf{y} = \mathbf{y}_*$	$\mathbf{v} = \mathbf{v}_*$
(12)	**BG**	**B**, **G**	$\mathbf{x}_{\rightarrow}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$	$N{+}2M$	$\mathbf{v} = \mathbf{v}_*$	$\mathbf{y} = \mathbf{y}_*$
(13)	**BH**	**B**, **H**	$\mathbf{x}_{\downarrow}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$	$2N{+}M$	$\mathbf{y} = \mathbf{y}_*$	$\mathbf{v} = \mathbf{v}_*$

Полное решение обобщенной линейной задачи анализа «затраты–выпуск» в любой из представленных выше спецификаций связано с нахождением векторных решений той или иной системы линейных уравнений (10) – (13) и последующим расчетом матриц выпуска и промежуточного потребления продуктов **X** и **Z** по формулам (8) или (9) и (4) или (5) соответственно. В частности, второе уравнение системы (10) при экзогенном условии $\mathbf{v} = \mathbf{v}_* \neq \mathbf{v}_0$, вообще говоря, допускает разрешение относительно вектора выпуска отраслей $\mathbf{x}_{\rightarrow}$, который, в свою очередь, может быть использован в первом уравнении системы (10) для расчета вектора чистого конечного спроса **y**, а также для оценивания матрицы промежуточного потребления **Z** по формуле (4) и матрицы выпуска **X** по формуле (8). Если же при **N = M** заменить экзогенное условие на $\mathbf{y} = \mathbf{y}_* \neq \mathbf{y}_0$, то вектор выпуска отраслей $\mathbf{x}_{\rightarrow}$, вообще говоря,

можно определить не из второго, а из первого уравнения системы (10), а затем использовать его во втором уравнении системы (10) для расчета вектора валовой добавленной стоимости **v** и для получения оценок матриц **Z** и **X** по формулам (4) и (8).

Вместе с тем некоторые важные аналитические свойства решений обобщенной линейной задачи анализа «затраты–выпуск» можно установить, не прибегая к непосредственному решению систем линейных уравнений (10)-(13). В частности, из (8) и (4) следует, что в модели **AG** (10) расчетные матрицы выпуска и промежуточного потребления связаны с одноименными исходными матрицами характерными соотношениями:

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow} = \mathbf{X}_0 \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{X}_0 \rangle^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow} = \mathbf{X}_0 \hat{\mathbf{q}},$$
$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow} = \mathbf{Z}_0 \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{X}_0 \rangle^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow} = \mathbf{Z}_0 \hat{\mathbf{q}}, \qquad (14)$$

где **q** – точно идентифицируемый (вместе с $\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow}$) при каждом экзогенном условии вектор-столбец размерности **M × 1**. Однако легко убедиться, что остальные модели из табл. 1 порождают другие, отличающиеся между собой матричные связи.

Действительно, из (9) и (5) можно заключить, что в модели **BH** (13) исходные матрицы выпуска и промежуточного потребления умножаются на диагональные матрицы не справа, а слева:

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow} \langle \mathbf{X}_0 \mathbf{e}_M \rangle^{-1} \mathbf{X}_0 = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{X}_0,$$
$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow} \langle \mathbf{X}_0 \mathbf{e}_M \rangle^{-1} \mathbf{Z}_0 = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{Z}_0, \qquad (15)$$

где: **p** – точно идентифицируемый (вместе с $\hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}$) при каждом экзогенном условии вектор-столбец размерности **N × 1**. Нетрудно также проверить, что модели **AH** (11) и **BG** (12) порождают «перекрестные» по отношению к моделям **AG** и **BH** характерные матричные связи:

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\mathbf{H} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\left\langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_M \right\rangle^{-1}\mathbf{X}_0 = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{X}_0,$$
$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow} = \mathbf{Z}_0\left\langle \mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0 \right\rangle^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow} = \mathbf{Z}_0\hat{\mathbf{q}}; \tag{16}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow} = \mathbf{X}_0\left\langle \mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0 \right\rangle^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow} = \mathbf{X}_0\hat{\mathbf{q}},$$
$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow}\left\langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_M \right\rangle^{-1}\mathbf{Z}_0 = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{Z}_0. \tag{17}$$

Разумеется, одноименные диагональные матрицы, введенные в формулах (16) и (17), различаются между собой, а также отличаются от диагональных матриц в (14) и (15),

Векторы **p** размерности $\mathbf{N}\times\mathbf{1}$ в (14) – (17) допускают естественную интерпретацию как векторные индексы относительных цен на продукты (товары), а векторы **q** размерности $\mathbf{M}\times\mathbf{1}$ – как векторные индексы физических объемов производства в отраслях экономики. Таким образом, соотношения (14) – (17) позволяют установить четыре различных типа реакции моделей (10) – (13) на экзогенные изменения чистого конечного спроса или валовой добавленной стоимости.

Модель **AG** (10) и порождаемые ей возмущения матриц выпуска и промежуточного потребления (14) описывают влияние указанных экзогенных изменений исключительно в терминах физических объемов производства в отраслях в условиях постоянства цен на продукты, тогда как модель **BH** (13) и ее реакция (15) сводят это влияние только к изменению ценовых пропорций в экономике при неизменных физических объемах производства в отраслях. Вместе с тем две другие реакции (16) и (17) следует охарактеризовать как смешанные и поэтому заслуживающие специального внимания.

В модели **AH** (11) в соответствии с (16) имеем $\mathbf{p} = \left\langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_M \right\rangle^{-1}\mathbf{x}_{\downarrow}$ и $\mathbf{q} = \left\langle \mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0 \right\rangle^{-1}\mathbf{x}_{\rightarrow}$, а из (9) вытекает соотношение $\mathbf{x}_{\rightarrow} = \mathbf{H}'\mathbf{x}_{\downarrow}$, связывающее между собой окаймляющие итоги матрицы выпуска продуктов. Подставив вектор $\mathbf{x}_{\rightarrow}$ из последней формулы в выражение для **q**, получим:

$$\mathbf{q} = \left\langle \mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0 \right\rangle^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{x}_{\downarrow} = \left\langle \mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0 \right\rangle^{-1}\mathbf{X}'_0\left\langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_M \right\rangle^{-1}\mathbf{x}_{\downarrow} = \\ = \mathbf{G}'\left\langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_M \right\rangle^{-1}\mathbf{x}_{\downarrow} = \mathbf{G}'\mathbf{p}. \tag{18}$$

Таким образом, из (16) следует, что в модели **AH** при экзогенном варьировании чистого конечного спроса или валовой добавленной стоимости расчетная матрица выпуска продуктов претерпевает лишь ценовые изменения, а матрица промежуточного потребления – только объемные (результат, который весьма затруднительно интерпретировать с экономической точки зрения). Общая сбалансированность расчетной таблицы «затраты – выпуск» в этом случае обеспечивается за счет «принудительного» согласования пары векторных индексов **p** и **q**, функционально связанных матричным уравнением (18). Поскольку в силу (18) $\mathbf{q}' = \mathbf{p}'\mathbf{G}$, последнее утверждение наглядно иллюстрируется следующим преобразованием исходного вектора-строки выпуска отраслей:

$$\mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}'\left\langle \mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0 \right\rangle = \mathbf{p}'\mathbf{G}\left\langle \mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0 \right\rangle = \mathbf{p}'\mathbf{X}_0\left\langle \mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0 \right\rangle^{-1}\left\langle \mathbf{e}'_N\mathbf{X}_0 \right\rangle = \\ = \mathbf{p}'\mathbf{X}_0 = \mathbf{e}'_N\hat{\mathbf{p}}\mathbf{X}_0 = \mathbf{e}'_N\mathbf{X}, \tag{19}$$

в котором использовано очевидное свойство диагональных матриц $\mathbf{a}'\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}'\hat{\mathbf{a}}$, выполняющееся для любой пары векторов **a** и **b** одинаковой размерности. Из (16) и (19) следует, что **m**-я отрасль экономики реагирует на экзогенные изменения чистого конечного спроса или валовой добавленной стоимости $\mathbf{q_m}$-кратным ростом физических объемов промежуточного потребления продуктов в отрасли и $\mathbf{q_m}$-кратным увеличением номинальной стоимости своего совокупного выпуска всех продуктов (в новых ценах), тогда как элементы **m**-го столбца исходной матрицы выпуска поочередно умножаются на соответствующие индексы относительных цен на продукты из вектора **p**.

Можно утверждать, что подобный отклик модели **AH** на экзогенные возмущения не поддается разумной экономической интерпретации. Таким образом, имеются вполне определенные основания для того, чтобы расценивать модель **AH** (11) как артефакт, не представляющий какой-либо практической ценности. Вместе с тем следует подчеркнуть, что модель **AH** до сих пор широко используется в современной практике макроэкономического анализа [2, Chapter 11] для преобразования таблиц ресурсов и использования в симметричные таблицы «затраты–выпуск» формата «продукт–продукт» (model B) на базе предположения об идентичности структуры затрат каждой отрасли при производстве всех продуктов (англ. industry technology assumption) и формата «отрасль–отрасль» (model D) на базе предположения неизменности отраслевой структуры выпуска каждого продукта (англ. fixed product sales structure assumption).

Далее, в модели **BG** (12) в соответствии с (17) имеем $\mathbf{q} = \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{X_0} \rangle^{-1} \mathbf{x}_{\rightarrow}$ и $\mathbf{p} = \langle \mathbf{X_0 e_M} \rangle^{-1} \mathbf{x}_{\downarrow}$, а из (8) следует, что $\mathbf{x}_{\downarrow} = \mathbf{G x}_{\rightarrow}$. Подставив вектор $\mathbf{x}_{\downarrow}$ из последней формулы в выражение для **p**, получим:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \langle \mathbf{X_0 e_M} \rangle^{-1} \mathbf{G x}_{\rightarrow} = \langle \mathbf{X_0 e_M} \rangle^{-1} \mathbf{X_0} \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{X_0} \rangle^{-1} \mathbf{x}_{\rightarrow} = \\ &= \mathbf{H} \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{X_0} \rangle^{-1} \mathbf{x}_{\rightarrow} = \mathbf{Hq}\end{aligned}. \qquad (20)$$

На основе (17) можно заключить, что в модели **BG** при экзогенном варьировании чистого конечного спроса или валовой добавленной стоимости расчетная матрица выпуска продуктов претерпевает лишь объемные изменения, а матрица промежуточного потребления – исключительно ценовые (результат, который, как и в предыдущем случае модели **AH**, весьма затруднительно интерпретировать с экономической точки зрения). Общая сбалансированность расчетной таблицы «затраты – выпуск» при этом обеспечивается за счет «принудительного» согласования пары векторных индексов **p** и **q**, функционально связанных матричным уравнением (20).

В силу (20) последнее утверждение наглядно иллюстрируется следующим преобразованием исходного вектора-столбца выпуска продуктов:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}} \mathbf{X_0 e_M} &= \langle \mathbf{X_0 e_M} \rangle \mathbf{p} = \langle \mathbf{X_0 e_M} \rangle \mathbf{Hq} = \langle \mathbf{X_0 e_M} \rangle \langle \mathbf{X_0 e_M} \rangle^{-1} \mathbf{X_0 q} = \\ &= \mathbf{X_0 q} = \mathbf{X_0} \hat{\mathbf{q}} \mathbf{e_M} = \mathbf{X e_M}\end{aligned}. \qquad (21)$$

Из (17) и (21) следует, что здесь экономика реагирует на экзогенные изменения чистого конечного спроса или валовой добавленной стоимости $\mathbf{p_n}$-кратным ростом цены на **n**-й продукт в промежуточном использовании для всех отраслей и $\mathbf{p_n}$-кратным увеличением физического объема совокупного выпуска **n**-го продукта, тогда как элементы **n**-й строки исходной матрицы выпуска поочередно умножаются на соответствующие индексы физических объемов производства в отраслях из вектора **q**.

Как и в предыдущем случае, можно утверждать, что подобный отклик модели **BG** на экзогенные возмущения не поддается разумной экономической интерпретации и, следовательно, здесь также имеются вполне определенные основания для того, чтобы расценивать модель **BG** (12) как артефакт, не имеющий какой-либо практической ценности.

Итак, из перечисленных в табл. 1 точно идентифицируемых спецификаций обобщенной линейной задачи анализа «затраты–выпуск» только модели **AG** и **BH** представляют несомненный практический интерес, в связи с чем целесообразно перейти к непосредственному решению систем линейных уравнений (10) и (13).

При экзогенном условии $\mathbf{v} = \mathbf{v}_* \neq \mathbf{v}_0$ второе уравнение системы (10) в весьма общем случае $\langle \mathbf{e}'_N \mathbf{A} \rangle \neq \mathbf{E}_M$ разрешимо относительно вектора выпуска отраслей:

$$\mathbf{x}_{\rightarrow} = \left(\mathbf{E}_M - \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{A} \rangle\right)^{-1} \mathbf{v}_*. \tag{22}$$

Из (14) следует, что $\hat{\mathbf{q}} = \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{X}_0 \rangle^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{\rightarrow}$, откуда подстановкой (22) получаем общее решение линейной задачи анализа «затраты–выпуск» на основе модели **AG** при экзогенном изменении валовой добавленной стоимости

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{e}_M = \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{X}_0 \rangle^{-1} \left(\mathbf{E}_M - \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{A} \rangle\right)^{-1} \mathbf{v}_* = \\ = \left(\langle \mathbf{e}'_N \mathbf{X}_0 \rangle - \langle \mathbf{e}'_N \mathbf{Z}_0 \rangle\right)^{-1} \mathbf{v}_* = \hat{\mathbf{v}}_0^{-1} \mathbf{v}_* \end{aligned}. \tag{23}$$

Аналогично, при экзогенном условии $\mathbf{y} = \mathbf{y}_* \neq \mathbf{y}_0$ первое уравнение системы (13) в весьма общем случае $\langle \mathbf{B}\mathbf{e}_M \rangle \neq \mathbf{E}_N$ разрешимо относительно вектора выпуска продуктов:

$$\mathbf{x}_{\downarrow} = \left(\mathbf{E}_N - \langle \mathbf{B}\mathbf{e}_M \rangle\right)^{-1} \mathbf{y}_*. \tag{24}$$

Поскольку из (15) следует, что $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{x}}_{\downarrow} \langle \mathbf{X}_0 \mathbf{e}_M \rangle^{-1}$, общее решение линейной задачи анализа «затраты–выпуск» на основе модели **BH** при экзогенном изменении чистого конечного спроса с учетом (24) принимает следующий вид:

Сборник научных трудов ИМЭИ. Номер 1 / 2016

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' = \mathbf{e}'_N \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{y}'_* \left(\mathbf{E}_N - \langle \mathbf{B}\mathbf{e}_M \rangle\right)^{-1} \langle \mathbf{X}_0 \mathbf{e}_M \rangle^{-1} = \\ = \mathbf{y}'_* \left(\langle \mathbf{X}_0 \mathbf{e}_M \rangle - \langle \mathbf{Z}_0 \mathbf{e}_M \rangle\right)^{-1} = \mathbf{y}'_* \hat{\mathbf{y}}_0^{-1} \end{aligned}. \tag{25}$$

Следует отметить, что решения (23) и (25) справедливы при любом соотношении количества отраслей **M** и числа продуктов **N**. Вместе с тем ясно, что оба полученных решения тривиальны: реакция модели **AG** на возмущение $\mathbf{v} = \mathbf{v}_* \neq \mathbf{v}_0$ здесь сводится к поочередному умножению столбцов матриц выпуска и промежуточного потребления продуктов **X** и **Z** на индексы объема валовой добавленной стоимости при неизменных ценах, а реакция модели **BH** на возмущение $\mathbf{y} = \mathbf{y}_* \neq \mathbf{y}_0$ – к поочередному умножению строк матриц **X** и **Z** на индексы цен на продукты в конечном использовании при фиксированных масштабах производства.

Выше отмечалось, что при **N = M** выбор альтернативного экзогенного условия также является допустимым для нахождения частного решения линейной задачи анализа «затраты–выпуск». При экзогенном условии $\mathbf{y} = \mathbf{y}_* \neq \mathbf{y}_0$ первое уравнение системы (10) в случае невырожденности квадратной матрицы $\mathbf{G} - \mathbf{A}$ с доминирующей главной диагональю разрешимо относительно вектора выпуска отраслей:

$$\mathbf{x}_{\rightarrow} = \left(\mathbf{G} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{y}_*. \tag{26}$$

Далее, из (14) с учетом (26) получаем частное (при **N = M**) решение линейной задачи анализа «затраты–выпуск» на основе модели **AG** при экзогенном изменении чистого конечного спроса

$$\begin{aligned}\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{e}_{\mathbf{M}} &= \langle \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{X}_0 \rangle^{-1}(\mathbf{G}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}_* = \left[(\mathbf{G}-\mathbf{A})\langle \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\mathbf{X}_0 \rangle\right]^{-1}\mathbf{y}_* = \\ &= (\mathbf{X}_0-\mathbf{Z}_0)^{-1}\mathbf{y}_*\end{aligned}. \quad (27)$$

Аналогично, при экзогенном условии $\mathbf{v} = \mathbf{v}_* \neq \mathbf{v}_0$ второе уравнение системы (13) в случае невырожденности квадратной матрицы $\mathbf{H}-\mathbf{B}$ с доминирующей главной диагональю разрешимо относительно вектора выпуска продуктов:

$$\mathbf{x}_\downarrow = (\mathbf{H}'-\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{v}_*. \quad (28)$$

После подстановки (28) в (15) частное (при $\mathbf{N} = \mathbf{M}$) решение линейной задачи анализа «затраты–выпуск» на основе модели **BH** при экзогенном изменении валовой добавленной стоимости приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}' = \mathbf{e}'_{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{v}'_*(\mathbf{H}-\mathbf{B})^{-1}\langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_{\mathbf{M}} \rangle^{-1} = \mathbf{v}'_*\left[\langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_{\mathbf{M}} \rangle(\mathbf{H}-\mathbf{B})\right]^{-1} = \\ &= \mathbf{v}'_*(\mathbf{X}_0-\mathbf{Z}_0)^{-1}\end{aligned}. \quad (29)$$

Здесь нельзя не обратить внимания на замечательные дуальные свойства моделей **AG** (10) и **BH** (13), проявляющиеся при попарном взаимном сопоставлении общих решений (23) и (25), а также частных решений (27) и (29) при $\mathbf{N} = \mathbf{M}$.

Следует еще раз подчеркнуть, что частные решения (27) и (29) имеют место только при равенстве количества отраслей **M** числу продуктов **N**, однако в отличие от (23) и (25) тривиальными не являются. Модель **AG** (10), частное решение (27) и результирующие возмущения матриц выпуска и промежуточного потребления (14) описывают влияние экзогенных изменений компонент чистого конечного спроса в терминах физических объемов производства в отраслях в условиях постоянных цен на продукты. Модель **BH** (13), частное решение (29) и результирующие возмущения матриц выпуска и промежуточного потребления (15) характеризуют воздействие экзогенных изменений компонент валовой добавленной стоимости в терминах ценовых пропорций в экономике при неизменных физических объемах производства в отраслях.

Модель **AG** (10) вместе с частным решением (27) широко известна в литературе по анализу «затраты–выпуск» как модель Леонтьева с экзогенным спросом (англ. Leontief demand-driven model) [1, Section 2.2.2]. Она позволяет оценивать влияние на экономику абсолютных или относительных изменений в компонентах чистого конечного спроса при неизменных ценах. Как следует из (14), основная реакция модели описывается матричными соотношениями $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0\hat{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0\hat{\mathbf{q}}$, где в соответствии с частным решением (27) векторный индекс физических объемов производства в отраслях равен:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= (\mathbf{X}_0-\mathbf{Z}_0)^{-1}\mathbf{y}_* = \left[\langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_{\mathbf{M}} \rangle(\mathbf{H}-\mathbf{B})\right]^{-1}\mathbf{y}_* = \\ &= (\mathbf{H}-\mathbf{B})^{-1}\langle \mathbf{X}_0\mathbf{e}_{\mathbf{M}} \rangle^{-1}\mathbf{y}_*\end{aligned}. \quad (30)$$

Модель **BH** (13) вместе с частным решением (29) известна в литературе по анализу «затраты–выпуск» как модель Гоша с экзогенным предложением (англ. Ghosh supply-driven model) [1, Section 12.1]. Она позволяет оценивать влияние на экономику абсолютных или относительных изменений в компонентах валовой добавленной стоимости при фиксированных физических объемах производства продуктов в отраслях. Как следует из (15), основная реакция модели описывается матричными соотношениями $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{Z}_0$, где в соответствии с частным решением (29) векторный индекс цен на продукты равен:

$$\mathbf{p} = \left(\mathbf{X}_0' - \mathbf{Z}_0'\right)^{-1} \mathbf{v}_* = \left[\left\langle \mathbf{e}_N' \mathbf{X}_0 \right\rangle \left(\mathbf{G}' - \mathbf{A}'\right)\right]^{-1} \mathbf{v}_* = \\ = \left(\mathbf{G}' - \mathbf{A}'\right)^{-1} \left\langle \mathbf{e}_N' \mathbf{X}_0 \right\rangle^{-1} \mathbf{v}_* . \qquad (31)$$

Здесь вновь следует отметить дуальные свойства моделей **AG** и **BH**, так как реакция модели **AG** на возмущение относительных коэффициентов чистого конечного спроса описывается матрицами **H** и **B**, а реакция модели **BH** на возмущение относительных коэффициентов валовой добавленной стоимости – матрицами **G** и **A**.

Векторные индексы определены выше при условии, что все фигурирующие в (30) и (31) матрицы имеют квадратную форму (при $\mathbf{N} = \mathbf{M} = \mathbf{K}$). Если же дополнительно наложить требование диагональности исходной матрицы выпуска продуктов $\mathbf{x}_0$ (симметричности исходной таблицы «затраты–выпуск»), то рассматриваемые модели Леонтьева и Гоша можно привести к «классическому» виду. Для диагональной матрицы выпуска имеем

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0' = \left\langle \mathbf{e}_K' \mathbf{X}_0 \right\rangle = \left\langle \mathbf{X}_0 \mathbf{e}_K \right\rangle . \qquad (32)$$

На основе (30) с учетом (32) и свойств диагональных матриц можно получить знаменитую формулу Леонтьева

$$x_\downarrow = Xe_K = X'e_K = \hat{q}X_0'e_K = \left\langle X_0'e_K \right\rangle \left(X_0 - Z_0\right)^{-1} y_* = \\ \left[\left(X_0 - Z_0\right)\left\langle e_K' X_0 \right\rangle^{-1}\right]^{-1} y_* = \left(E_K - A\right)^{-1} y_* ,$$

а на основе (31) похожим способом нетрудно найти ее аналог для модели Гоша

$$x_\downarrow = Xe_K = \hat{p}X_0e_K = \left\langle X_0e_K \right\rangle \left(X_0' - Z_0'\right)^{-1} v_* = \\ \left[\left(X_0' - Z_0'\right)\left\langle X_0e_K \right\rangle^{-1}\right]^{-1} v_* = \left(E_K - B'\right)^{-1} v_*$$

Далее, подстановка (32) в векторный индекс цен (31) для модели Гоша приводит к известной формуле

$$p = \left(X_0' - Z_0'\right)^{-1} v_* = \left(\left\langle e_K' X_0 \right\rangle - Z_0'\right)^{-1} v_* = \\ \left(E_K - A'\right)^{-1} \left\langle e_K' X_0 \right\rangle^{-1} v_*$$

для леонтьевской модели цен (англ. Leontief price model) [1, Section 2.6]. Таким образом, в случае симметричной исходной таблицы «затраты–выпуск» модель Гоша с экзогенным предложением совпадает с леонтьевской моделью цен [3]. Аналогичным способом можно показать, что модель Леонтьева с экзогенным спросом представляет собой гошевскую модель физических объемов (англ. Ghosh quantity model). В самом деле, подстановка (32) в векторный индекс физических объемов производства в отраслях (30) приводит к

$$q = \left(X_0 - Z_0\right)^{-1} y_* = \left(\left\langle X_0 e_K \right\rangle - Z_0\right)^{-1} y_* = \\ \left(E_K - B\right)^{-1} \left\langle X_0 e_K \right\rangle^{-1} y_* .$$

Здесь вновь уместно отметить замечательные дуальные свойства последних четырех формул для моделей Леонтьева и Гоша.

В заключение следует подчеркнуть, что все представленные выше соотношения получены на базе введения в рассмотрение пары матричнозначных линейных функций производственных затрат (4) и (5), тогда как в специальной литературе основой моделей Леонтьева принято считать производственную функцию с фиксированными пропорциями факторов (англ. fixed-coefficient production function), или производственную функцию Леонтьева – см., например, [1, p.17] и [4]. Это видимое противоречие объясняется внутренней природой моделей «затраты–выпуск» как моделей общего равновесия [1, Section 14.5.3], поскольку можно показать, что производственная функция с фиксированными пропорциями факторов (с «прямоугольными» изоквантами) и линейная функция производственных затрат (с линейными изоквантами) в системе показателей «затраты–выпуск» находятся во взаимно обратном соответствии.

Список использованной литературы

1. Miller R. E., Blair P.D. Input-Output Analysis: Foundations and Extensions: 2nd Ed. – N.Y.: Cambridge University Press, 2009. – 782 pp.

2. Eurostat Manual of Supply, Use and Input–Output Tables: Methodologies and working papers, Ca. No. KS-RA-07-013-EN-N / European Commission. – Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2008. – 590 pp.

3. Dietzenbacher, E. In Vindication of the Ghosh Model: A Reinterpretation as a Price Model // Journal of Regional Science. – 1997. – 37 (4). – P. 629-651.

4. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика: Пер. с англ. / Автор предисл. и науч.ред. А.Г. Гранберг. – М.: ОАО «Издательство «Экономика», 1997. – 479 с.

Губанов
Сергей Семенович
главный редактор журнала «Экономист,
доктор экономических наук, профессор

Инструментарий межотраслевого баланса в неоиндустриальной парадигме

Ключевые слова: парадигма развития, фазы индустриализации, неоиндустриальное развитие, межотраслевой баланс, сектора экономики

Уважаемые коллеги!

Мне хотелось бы поговорить **о парадигме нашего развития**. Когда речь идет о крупных парадигмах, а тем более о парадигмах развития, всегда подразумевается ключевой вопрос – **куда должно идти общество, какова генеральная магистраль его развития?** Имеется в виду, разумеется, магистраль прогресса, которая ведет не назад, а вперед.

С точки зрения кардинального выбора у нас были колоссальные ошибки в 1970-х годах (хозрасчетные предприятия, так называемый «рыночный социализм»), колоссальные парадигмальные просчеты в горбачевское время (чем они закончились – известно). К сожалению, эта череда провалов в выборе пути развития страны продолжается до сих пор. Мы потеряли ориентиры, перспективу. С попытки ответа на ключевой вопрос о парадигме развития на-