УДК 512.772

Примеры семейств штребелевых дифференциалов на гиперэллиптических кривых*

© 2009. И. В. Артамкин, Ю. А. Левицкая, Г. Б. Шабат

0. Штребелев дифференциал на компактной римановой поверхности — это такой ненулевой квадратичный дифференциал, что в определяемой им метрике поверхность реализуется как объединение прямолинейных цилиндров, склеенных по дугам границ. Это понятие было введено Штребелем и Дженкинсом в 1950–1960-х гг. (см. [1], [2]); в 1967 г. Штребелем было установлено существование штребелевых дифференциалов на произвольной поверхности, а в 1975 г. Дуади и Хаббардом (см. [3]) доказано, что штребелевы дифференциалы плотны в пространстве квадратичных дифференциалов.

Упомянутые результаты являются теоремами существования и не дают явных примеров штребелевых дифференциалов. По-видимому, первый явный пример был построен Амбург в 2002 г. (см. [4]); он определяется довольно сложной формулой, а соответствующая кривая определена над квадратичным полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Цель настоящей заметки — предъявить более простые семейства кривых, зависящих от одного вещественного параметра, и штребелевых дифференциалов на них. Придавая параметру рациональные значения, можно получить счетное множество штребелевых дифференциалов над $\mathbb{Q}$.

1. Обозначим через $\ddot{X}_p$ аффинную кривую, задаваемую уравнением $y^2 = x^{2g+2} - 2px^{g+1} - 1$, а через X_p ее полную гладкую модель.

Теорема. *Пусть g — четное натуральное число. Для любого $p \in \mathbb{R}$ квадратичный дифференциал $x^{g-1}(\frac{dx}{y})^2$ является штребелевым на X_p.*

2. Обозначим через $C_\pm$ «бесконечные» точки кривой $\ddot{X}_p$, т. е. такие точки, что $\ddot{X}_p := X_p \setminus \{C_\pm\}$. Введем также точки $A_\pm$, определяемые равенствами $x(A_\pm) = 0$, $y(A_\pm) = \pm i$.

Главное действующее лицо заметки — квадратичный дифференциал

$$\eta := x^{g-1}\left(\frac{dx}{y}\right)^2,$$

штребелевость которого мы хотим установить.

Очевидны дивизориальные соотношения

$$(x) = A_+ + A_- - C_+ - C_- \quad \text{и} \quad (\eta) = (g-1)(A_+ + A_- + C_+ + C_-).$$

3. Обозначим через L_k лучи

$$\left\{x \in \mathbb{C} \mid x = te^{2i\pi k/(g+1)},\ t \in \left[((p^2+1)^{1/2}+p)^{1/(g+1)}, \infty\right)\right\}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант №07-01-00441-а.

на x-плоскости, а через M_k — отрезки

$$\left[0, e^{i\pi(2k+1)/(g+1)}((p^2+1)^{1/2}-p)^{1/(g+1)}\right]$$

(рис. 1).

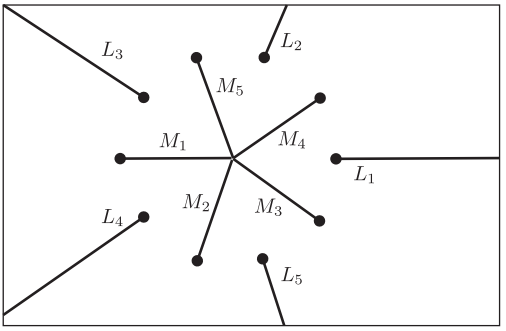

Рис. 1. Проекция графа сепаратрис на x-плоскость в случае $g = 4$

Предложение. *Для любого* $k \in \{1, \ldots, g+1\}$ *и любых* $x_1, x_2 \in L_k$ *или* $x_1, x_2 \in M_k$ *интегралы* $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{x^{g-1}}{x^{2g+2}-2px^{g+1}-1}}\,dx$ *вещественны* (*независимо от выбора ветви корня*). *Иначе говоря, вещественны интегралы* $\int\sqrt{\eta}$ *по дугам, проектирующимся в объединение отрезков* M_k *и* $L_k \cup \infty$.

Интегралы $\int\sqrt{\eta}$ превращаются в обычные абелевы интегралы при переходе к *римановой поверхности корня из квадратичного дифференциала*, введенной в [3] как подмножество кокасательного расслоения T^*X_p, определенное соотношением $\{\omega \mid \omega^2 = \eta\}$. В данном случае эта риманова поверхность, которую мы обозначим через $X_p[\sqrt{\eta}]$, может быть задана уравнением $v^2 = u^{4g+4} - 2pu^{2g+2} - 1$, а проекция $\pi\colon X_p[\sqrt{\eta}] \to X_p$ определяется соотношениями $\pi^*x = u^2$, $\pi^*y = v$; при этом $\pi^*\eta = \omega^2$, где $\omega := 2u^g\frac{du}{v}$.

Следствие. *Кривые* $\{P \in X \mid x(P) \in L_k\} \cup \{C_\pm\}$ *и* $\{P \in X \mid x(P) \in M_k\}$, *где* $k = 1, \ldots, g+1$, *являются сепаратрисами дифференциала* η.

Рассмотрение порядков нулей дифференциала η показывает, что других сепаратрис у него нет.

Из сформулированных результатов следует, что сепаратрисы дифференциала η начинаются и заканчиваются в его нулях и имеют конечную длину в метрике $\mathrm{d}s^2 = |\eta|$; следовательно, их объединение является компактным в этой метрике. Отсюда вытекает штребелевость дифференциала η.

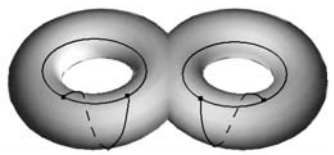

Рис. 2. Граф сепаратрис дифференциала η в случае $g = 2$

Авторы признательны участникам семинара кафедры алгебры мехмата МГУ «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями» за полезные обсуждения.

Литература

[**1**] J. A. Jenkins, Ann. of Math., **66** (1957), 440–453. [**2**] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag, Berlin, 1984. [**3**] A. Douady, J. Hubbard, Invent. Math., **30**:2 (1975), 175–179. [**4**] Н. Я. Амбург, УМН, **57**:5 (2002), 145–146. [**5**] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982.

Государственный университет — Высшая школа экономики
e-mail: artamkin@mail.ru

Райффайзен банк
e-mail: yulia@pkbct.ru

Российский государственный гуманитарный университет
e-mail: george.shabat@gmail.ru

Поступило в редакцию
17 октября 2007 г.

УДК 517.98

Об одном классе вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве*

© 2009. Г. М. Губреев, Г. В. Лукашенко

1. Определение операторов класса G. Пусть L — вполне непрерывный оператор без вещественных собственных чисел в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, т. е. при каждом $g \in \mathfrak{H}$ мероморфная вектор-функция

$$G(z) := (I - zL^*)^{-1} g \tag{1}$$

аналитична вблизи $\mathbb{R}$. Через $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) обозначим область $\operatorname{Im} z > 0$ ($\operatorname{Im} z < 0$). Напомним также, что мероморфная в $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) функция называется функцией ограниченной характеристики, если она представима в виде отношения двух аналитических ограниченных функций [1].

Определение 1. Оператор L назовем *оператором класса G* (или *G-оператором*), если существует такой вектор $g \in \mathfrak{H}$, что

1) функция $(G(z), G(\bar{z}))$, а также функции $(G(z), h)$ для каждого $h \in \mathfrak{H}$ являются функциями ограниченной характеристики в $\mathbb{C}_\pm$;

2) существуют константы $m, M > 0$, такие, что

$$m\|h\|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}} \|G(x)\|^{-2} |(G(x), h)|^2 dx \leqslant M\|h\|^2, \qquad h \in \mathfrak{H}.$$

Следующий простой пример послужил поводом для введения этого определения. Если положить

$$(J_a f)(x) = i \int_0^x f(s)\, ds, \qquad f \in L_2(0, a), \tag{2}$$

то нетрудно проверить, что оператор $L := J_a \oplus (-J_b)$ в пространстве $L_2(0, a) \oplus L_2(0, b)$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b > 0$, является G-оператором: можно взять $g = \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$ ($\mathbb{1}$ — функция, тождественно равная 1); при этом $m = M = 2\pi/(a + b)$. Проверяется, что в качестве вектора g можно также взять любую функцию

*Работа выполнена в рамках госбюджетной темы Украины, номер 0107U000937.