ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Том 18 Выпуск 1

2011

ЗВЕРЕВ О. В., ХАМЕТОВ В. М.

МИНИМАКСНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ (ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ) [1)]

Содержание

Статья посвящена решению задачи расчета европейского опциона на неполном рынке с дискретным временем. Для ее решения рассматривается вспомогательная задача нахождения верхнего гарантированного значения ожидаемого риска, причем функция риска — экспоненциальная и зависит от дефицита. Верхнее гарантированное значение определяется как минимакс от ожидаемого риска, причем сначала берется верхняя грань по множеству эквивалентных вероятностных мер, а затем нижняя грань по множеству самофинансирующих портфелей. Для этой задачи находятся условия существования такого портфеля, на котором внешняя нижняя грань достигается. Опираясь на этот результат, устанавливается разложение платежного обязательства, обобщающее известное опциональное разложение. Далее получены условия существования вероятностной меры, которая доставляет верхнюю грань ожидаемому риску и оказывается мартингальной дискретной мерой. В работе показано, что эти результаты позволяют произвести «явно» расчет европейского опциона на неполном рынке. Во второй части работы приводятся примеры расчета европейского опциона на конечном и имеющем компактный носитель неполных рынках.

Ключевые слова и фразы: европейский опцион, хеджирование, минимаксный портфель, неполный рынок, опциональное разложение, S-представление, функция риска.

Введение

1. Статья посвящена теории расчета европейских опционов на неполных рынках. Основная проблема, которую приходится решать в этой

[1)] Вторая часть этой статьи, в которую вошли «§ 5. Минимаксный хеджирующий портфель европейского опциона на конечном $(1, S)$-рынке» и «§ 6. Пример», будет опубликована в следующем выпуске журнала.

теории, состоит в выборе вероятностной меры, относительно которой следует проводить расчет опциона. В работах [1–7] предложено выбирать такую мартингальную меру, относительно которой стоимость европейского опциона была бы максимальной. В них для различных моделей безарбитражных рынков был предложен метод построения портфелей и нахождения стоимости опциона, который опирается на опциональное разложение супермартингалов.

В [1] для гладкого платежного обязательства было установлено опциональное разложение в предположении, что эволюция цен рисковых активов описывается диффузионным процессом со скачками. Основываясь на этом разложении, в статье было установлено существование суперхеджирующего портфеля с потреблением, а также найдена цена опциона.

В [2–4] было доказано существование опционального разложения платежного обязательства для неполных безарбитражных рынков в предположении, что процесс, описывающий эволюцию цен рисковых активов, является семимартингалом, и обоснована (в терминах этого разложения) методика расчета опциона европейского типа.

В [5–7] для неполных безарбитражных рынков с дискретным временем для платежного обязательства было установлено существование опционального разложения, в терминах которого был обоснован метод расчета опционов.

Отметим, что в рамках этого подхода к расчету опционов возникает потребность в вычислении существенной верхней грани по множеству мартингальных мер от условного математического ожидания фунционалов, заданных на траекториях цен рисковых активов. Нахождение этой существенной верхней грани представляет собой самостоятельную математическую проблему. По этой причине в работах [1–7] отсутствуют явные формулы, позволяющие конструктивно описать портфельный процесс и процесс эволюции капитала, соответствующего этому портфелю. Известно [8–10], что задача нахождения существенной верхней грани от условного математического ожидания от некоторого аддитивного или мультипликативного целевого функционала, заданного на траекториях управляемого случайного процесса, рассматривается в теории оптимального управления случайными процессами. В этой теории данная проблема решается с помощью стохастического варианта метода динамического программирования. Попутно отметим, что именно такой подход был использован в [1].

2. Для решения задачи расчета европейского опциона на неполных рынках в данной работе (в отличие от [1–7]) применен принцип минимакса, который в данном случае можно сформулировать следующим образом: поскольку неизвестно, какое распределение вероятностей имеет последовательность цен рисковых активов, следует считать, что оно таково, что стоимость европейского опциона максимальна, при этом в

рисковые активы надо вкладывать такой минимальный капитал, который позволил бы достоверно исполнить платежное обязательство. Реализация этого принципа в работе опирается на две возможности: первая основана на сведении задачи поиска минимакса к игровой задаче оптимального стохастического управления, вторая опирается на сведение задачи расчета европейского опциона на неполных рынках к игровой задаче оптимального стохастического управления с мультипликативным целевым функционалом, которая следует из результатов работы [11].

3. Опишем кратко наш подход к решению задачи расчета европейского опциона на неполных рынках. Предполагается, что имеется многомерный рынок, состоящий из одного безрискового и нескольких рисковых активов, стоимость которых описывается многомерной случайной последовательностью $\{S_t\}_{t\in\{0,1,\dots,N\}}$. На этом рынке рассматривается опцион европейского типа с моментом исполнения $N<\infty$ и платежным обязательством f_N, которое зависит от цен $S_0, S_1, \dots, S_N$. Предполагается, что на рынке имеется два игрока и они наблюдают (в каждый момент времени) стоимость рискового актива. Первый игрок — рынок, стратегиями которого являются вероятностные меры Q на траекториях цен рисковых активов, эквивалентные некоторой базовой мере P. Второй игрок управляет активами, его стратегиями являются многомерные предсказуемые последовательности $\{\gamma_t\}_{t\in\{1,2,\dots,N\}}$, которые порождают самофинансирующие портфели. Предполагается, что функция риска (выигрыша второго игрока), зависящая от дифицита, — экспоненциальная (выбор такой функции риска будет разъяснен ниже). При этом под дифицитом, как и в [7], мы понимаем разность между платежным обязательством и доходом, полученным вторым игроком от управления портфелем активов в течении «времени жизни» опциона, т.е. $f_N - \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в многомерном евклидовом пространстве, $\Delta S_i \triangleq S_i - S_{i-1}$. Предполагается также, что игроки «разумны» и выбирают свои стратегии независимо друг от друга. При этом первый игрок максимизирует ожидаемый риск на множестве $\mathfrak{R}_N$ вероятностных мер Q, эквивалентных некоторой базовой вероятностной мере P, а второй игрок его минимизирует на множестве D_1^N допустимых количеств рисковых активов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$. В результате мы приходим к следующей минимаксной задаче:

$$\mathrm{M}^Q \exp\Big\{ f_N - \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)\Big\} \to \inf_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N)\in D_1^N} \sup_{Q\in\mathfrak{R}_N}, \tag{1}$$

где символ M^Q обозначает интеграл Лебега относительно меры Q. В статье пара $(Q, \gamma_1^N) \in \mathfrak{R}_N \times D_1^N$ названа *бистратегией* и, как принято в теории игр [15], величина

$$\overline{V}_0 = \inf_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_N)\in D_1^N} \sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \exp\Big\{f_N - \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)\Big\}$$

названа ***верхним гарантированным значением***, а тройка $(Q^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0)$, где Q^* — некоторая вероятносная мера и $\gamma_1^{*N} \triangleq (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_N^*) \in D_1^N$, такие, что

$$\overline{V}_0 = \mathrm{M}^{Q^*} \exp\Big\{f_N - \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i^*, \Delta S_i)\Big\}, \tag{2}$$

названа ***решением*** задачи (1).

Идейной основой для рассмотрения задачи (1) послужила работа [11], в которой рассмотрена и решена задача (1) для частного случая. В ней для обоснования S-представления мартингалов [6] был применен стохастический вариант метода динамического программирования. В данной работе мы обобщаем этот результат (см. теорему 4). Попутно отметим, что выбор экспоненциальной функции риска связан именно с возможностью применения этого метода. Решение задачи (1) $(Q^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0)$ позволяет: 1) установить аналог опционального разложения для любой $\mathcal{F}_N^S \triangleq \sigma\{S_0, S_1, \ldots, S_N\}$-измеримой ограниченной функции f_N, которая является платежным обязательством в задаче расчета опциона европейского типа на неполном рынке; 2) исследовать свойства меры Q^* и осуществить однозначный выбор вероятностной меры, относительно которой следует проводить расчет опциона; 3) найти портфель активов в любой момент времени и поставить ему в соответствие капитал.

4. Изложим кратко содержание статьи. Описанию метода построения решения задачи (1) посвящен первый параграф работы. В нем сначала обосновывается возможность применения к задаче (1) стохастического варианта метода динамического программирования. Для этого вводится случайная последовательность $(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$,

$$\overline{V}_t \triangleq \inf_{(\gamma_{t+1},\gamma_{t+2},\ldots,\gamma_N)\in D_{t+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q\Big[\exp\Big\{f_N - \sum_{i=t+1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)\Big\}\Big|\mathcal{F}_t^s\Big], \tag{3}$$

где $\mathcal{F}_t^S = \sigma\{S_0, S_1, \ldots, S_t\}$ — фильтрация, порожденная последовательностью цен, D_{t+1}^N — сужение множества D_1^N на $\{t+1, t+2, \ldots, N\}$. Затем мы доказываем, что $\overline{V}_t$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (8) (теорема 1). Далее находятся условия существования стратегии γ_1^{*N}, на которой достигается«внешняя» существенная нижняя грань в (3) (теорема 3). Затем, опираясь на этот результат, устанавливаем справедливость опционального разложения для платежного обязательства в классе эквивалентных мер $\mathfrak{R}_N$ (теорема 4). Далее устанавливаем условие существования единственной вероятностной меры Q^*, на которой достигается «внутренняя» существенная верхняя грань в (3) (теорема 5). Из этих результатов следует, что бистратегия (Q^*, γ_1^{*N}) является минимаксной, а набор $(Q^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0)$ является решением задачи (1) (теорема 8). Доказательство этих результатов составляет содержание третьего параграфа.

Второй параграф посвящен решению задачи минимаксного хеджирования опционов европейского типа на неполных рынках. Сначала, основываясь на аналоге опционального разложения, устанавливаем связь между задачей (1) и задачей построения минимального совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением [6] европейского опциона на неполном рынке (теорема 10). Далее доказываем, что построенная в § 1 вероятностная мера Q^* является мартингальной (теорема 11). Отсюда и из теоремы 4 следует, что относительно меры Q^* платежное обязательство допускает S-представление ([6, теорема 12]). Кроме того, установлено, что мера Q^* является дискретной (теорема 13). Из этих утверждений следует, что исходный неполный рынок относительно меры Q^* можно отождествить с полным, а соответствующий минимальный совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением имеет нулевое потребление, который назван в работе ***минимаксным хеджирующим***. Доказательство этих утверждений составляет содержание § 4.

В пятом параграфе решается задача построения минимаксного хеджирующего портфеля европейского опциона на одномерном конечном неполном рынке в предположении, что эволюция цен рискового актива описывается конечной марковской цепью.

В § 6 приводится пример расчета минимаксного хеджа европейского опциона на одномерном неполном рынке в предположении, что доходности рискового актива — независимые одинаково распределенные случайные величины, носитель вероятностной меры которых является компактом.

Отметим, что результаты, составляющие содержание статьи, частично были анонсированы в докладе [16].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00-767.

§ 1. Решение минимаксной задачи (1)

Этот параграф носит вспомогательный характер. В нем мы приводим условия существования решения задачи (1).

1.1. В данном разделе приводятся необходимые для изложения обозначения, опр еделения, а также содержится постановка минимаксной задачи (1).

1.1.1. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}, P)$, где $N_0 \triangleq \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, задана d-мерная ($d < \infty$) согласованная случайная последовательность, обозначаемая $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$. Положим, что: i) вероятностная мера P фиксированна, ее назовем ***базовой*** [6]; ii) для любого

$t \in N_0$ фильтрация $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S \triangleq \sigma(S_u, u \leqslant t)$. Пусть $f_N(S_\bullet)$ — любая $\mathcal{F}_N^S$-измеримая случайная величина, здесь $S_\bullet \triangleq (S_0, S_1, \ldots, S_N)$, а $N \in \mathbf{N}^+$ — горизонт [6, 7].

Пусть на фильтрованном измеримом пространстве $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0})$ заданы также вероятностные меры, эквивалентные мере P. Множество таких вероятностных мер, эквивалентных мере P, обозначим $\mathfrak{R}_N$.

Математическое ожидание некоторой случайной величины $\theta(\omega)$ относительно вероятностной меры Q (P) будем обозначать $\mathbf{M}^Q\theta$ $(\mathbf{M}^P\theta)$.

Определение 1 [6]. *Мартингальной мерой* будем называть вероятностную меру Q на $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0})$, относительно которой последовательность $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in N_0}$ является локальным мартингалом.

Множество мартингальных мер обозначим $\mathfrak{M}_N$.

1.1.2. Обозначим $\gamma_1^N \triangleq \{\gamma_t\}_{t \in N_1}$, $N_1 \triangleq \{1, 2, \ldots, N\}$, d-мерную $\mathcal{F}^S$-предсказуемую последовательность, которую назовем *стратегией*, γ_t — *управлением* в момент времени $t \in N_1$. Множество стратегий обозначим U_1^N. Пусть $\widetilde{U}_1^N$ — любое подмножество U_1^N. Обозначим $\widetilde{U}_{t_1}^{t_2}$, где $t_1, t_2 \in N_1$ и $t_2 \geqslant t_1$, сужение множества $\widetilde{U}_1^N$ на $\{t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2\} \subseteq N_1$ и будем писать $\gamma_{t_1}^{t_2} \in \widetilde{U}_{t_1}^{t_2}$, где $\gamma_{t_1}^{t_2} \triangleq \{\gamma_{t_1}, \ldots, \gamma_{t_2}\}$.

1.1.3. Определение 2. Пару $(Q, \gamma_{t+1}^N) \in \mathfrak{R}_N \times U_{t+1}^N$ назовем *t-бистратегией*, пару $t \in N_1$, $(Q, \gamma_1^N) \in \mathfrak{R}_N \times U_1^N$ — *бистратегией*, $\gamma_{t+1}^N \in \widetilde{U}_{t+1}^N$ — *t-стратегией*.

Определение 3. *Оценкой* t-бистратегии (Q, γ_{t+1}^N), $t \in N_1$, назовем $\mathcal{F}_t^S$-измеримую случайную величину, обозначаемую $I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ и определяемую равенством

$$I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t \triangleq \mathbf{M}^Q\Big[\exp\Big\{f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t+1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)\Big\}\Big|\mathcal{F}_t^S\Big], \tag{4}$$

где $\mathbf{M}^Q(\cdot|\mathcal{F}_t^S)$ — условное математическое ожидание относительно меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ и σ-алгебры $\mathcal{F}_t^S$.

Определение 4. Случайную величину $f_N(S_\bullet)$ и стратегию γ_1^N назовем *допустимыми*, если P-п. н.

$$\sup_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{M}^Q I_0^{Q, \gamma_1^N}(S_0) < \infty. \tag{5}$$

В статье мы предполагаем, что $f_N(S_\bullet)$ — любая $\mathcal{F}_N^S$-измеримая ограниченная случайная величина, которая, очевидно, является допустимой. В этом случае стратегия γ_1^N будет допустимой, если выполнено условие

$$\sup_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{M}^Q \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)\Big\} < \infty. \tag{5 a}$$

Множество допустимых стратегий обозначим D_1^N.

Определение 5. Бистратегию $(Q, \gamma_1^N) \in \mathfrak{R}_N \times D_1^N$ назовем *допустимой*.

Соглашение. Везде ниже полагаем, что $\mathfrak{R}_N \neq \varnothing$ и $D_1^N \neq \varnothing$, не оговаривая это дополнительно.

Определение 6. Случайную величину $\overline{V}_0$, определяемую равенством $\overline{V}_0 \triangleq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_1^N \in D_1^N} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} I_0^{Q,\gamma_1^N}(S_0)$, будем называть *верхним гарантированным значением*.

Очевидно, что $\overline{V}_0$ есть $\mathcal{F}_0^S$ -измеримая случайная величина.

Отметим, что определения ess inf и ess sup относительно базовой меры P можно найти в [6, 7, 12, 14].

В данном параграфе мы приводим условия, при выполнении которых существуют такая допустимая бистратегия (Q^*, γ_1^{*N}), что P-п. н. выполняется равенство

$$\overline{V}_0 = I_0^{Q^*,\gamma_1^{*N}}(S_0). \tag{6}$$

Определение 7. Бистратегию (Q^*, γ_1^{*N}), такую, что выполнено (6), будем называть *минимаксной*, вероятностную меру Q^* — *наихудшей*, а стратегию $\gamma_1^{*N} \in D_1^N$ — *минимаксной*.

Определение 8. Тройку $(Q^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0)$ назовем *решением минимаксной задачи* (6).

1.2. Для построения решения описанной выше задачи воспользуемся стохастическим вариантом метода динамического программирования. В этом разделе мы приводим обоснование возможности его применения. Нам понадобится следующее определение.

Определение 9. Случайную величину $\overline{V}_t$, определяемую равенством

$$\overline{V}_t \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t), \tag{7}$$

назовем *верхним гарантированным значением* в момент времени $t \in N_0$.

Из определений ess inf и ess sup [6, 7] следует, что $\overline{V}_t$ является $\mathcal{F}_t^S$-измеримой случайной величиной.

В этом разделе мы приводим рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет последовательность $\{\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$.

Теорема 1. *Пусть фильтрация $\{\mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ универсально полна [6, 10], а $f_N(S_\bullet) - \mathcal{F}_N^S$ — измеримая ограниченная случайная величина. Тогда $\{\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ P-п. н. удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\overline{V}_t = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S\right], \quad \overline{V}_t|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}. \tag{8}$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любых $t \in N_1$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$ справедливо неравенство P-п. н.*

$$\overline{V}_{t-1} \geqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \tag{9}$$

2) *Для любых* $t \in N_1$ *и* $\gamma \in D_t$ *справедливо неравенство* P-*п. н.*

$$\overline{V}_{t-1} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \big[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \big| \mathcal{F}_{t-1}^S\big]. \tag{10}$$

1.3. В этом разделе приводим достаточное условие того, что «внешняя» существенная нижняя грань в (8) достигается.

Для формулировки этого условия нам понадобится обозначение $G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma) \triangleq \ln \mathrm{M}^Q\,[e^{-(\gamma,\Delta S_t)}|\mathcal{F}_{t-1}^S]$, $(t \in N_1)$ величины, которую называют *кумулянтой* [6, 12].

Условие (γ). Для любого $t \in N_1$ существуют такие мера $\widehat{Q} \in \mathfrak{R}_N$ и положительная постоянная $c_2 > 0$, что P-п. н. выполняется неравенство $\operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} e^{G_{\widehat{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma)} \geqslant c_2$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и условие* (γ). *Тогда существует такая стратегия* $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in D_1^N$, *что для любого* $t \in N_1$ *справедливы равенства* P-*п. н.*

$$\begin{aligned}\overline{V}_t &= \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \big[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} \big| \mathcal{F}_t^S\big] \\ &= \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \big[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} \big| \mathcal{F}_t^S\big]\Big)\Big|_{\gamma_{t+1} = \gamma_{t+1}^*}.\end{aligned} \tag{11}$$

Кроме того, для любых $t \in N_1$ *и* $Q \in \mathfrak{R}_N$ *справедливо неравенство*

$$\overline{V}_{t-1} \geqslant \mathrm{M}^Q \big[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \big| \mathcal{F}_{t-1}^S\big] \quad P\text{-п. н.} \tag{12}$$

Замечание 1. Из утверждения теоремы 3 следует, что для любых $t \in N_0$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$ для $I_t^{Q,\gamma_{t+1}^{*N}}(S_0^t)$-оценки t-бистратегии (Q, γ_{t+1}^N) справедливо неравенство $\overline{V}_t \geqslant I_t^{Q,\gamma_{t+1}^{*N}}(S_0^t)$ P-п. н., где $\gamma_{t+1}^{*N} \in D_{t+1}^N$ — t-стратегия, определяемая равенством (11).

1.4. В данном разделе, основываясь на утверждении теоремы 3, приводим условие, при выполнении которого имеет место разложение любых $\mathcal{F}_N^S$-измеримых ограниченных случайных величин, аналогичное опциональному разложению [6, 7], но которое справедливо для класса эквивалентных мер $\mathfrak{R}_N$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для любых* $t \in N_1$ *и* $Q \in \mathfrak{R}_N$ *существует такая возрастающая последовательность* $\{C_t^*, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$, *что* $C_0^* = 0$ *и для любого* $t \in N_1$

$$\Delta \ln \overline{V}_t = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta C_t^* \quad Q\text{-п. н.}, \tag{13}$$

где $\{\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (8), $\{\gamma_t^*, \mathcal{F}_{t-1}^S\}_{t \in N_1}$ — *предсказуемая последовательность, определяемая равенством* (11), *причем относительно любой меры* $Q \in \mathfrak{R}_N$ *справедливо равенство*

$$f_N(S_\bullet) = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_N^* \quad Q\text{-п. н.} \tag{14}$$

Определение 10. Разложение (11) любой $\mathcal{F}_N^S$-измеримой ограниченной случайной величины $f_N(S_\bullet)$ будем называть *S-опциональным.*

Замечание 2. 1) S-опциональное разложение (14) отличается от опционального разложения, установленного в [6, 7], тем, что оно справедливо относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N \setminus \mathfrak{M}_N$, относительно которой последовательность $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in N_0}$ не является локальным мартингалом.

2) Теорема 4 дает способ построения такой последовательности $\{C_t^*, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$, которая является неотрицательным субмартингалом относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$.

3) Из утверждения теоремы 4 вытекает, что неравенство $f_N(S_\bullet) \leqslant \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i)$ справедливо Q-п. н. относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$, и, следовательно, если последовательность $\{S_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ является локальным мартингалом относительно меры Q, то последовательности $\{\ln \overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ и $\mathrm{M}^Q(f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_t^S)\}_{t \in N_0}$ относительно меры Q являются супермартингалами.

1.5. В данном разделе мы устанавливаем условия существования наихудшей вероятностной меры.

Теперь мы сможем сформулировать основной результат данного пункта.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4, а множество $\mathfrak{R}_N$ относительно слабо компактно. Тогда существует единственная вероятностная мера Q^*, являющаяся наихудшей, причем для любого $t \in N_1$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \overline{V}_{t-1} &= \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \big[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \big| \mathcal{F}_{t-1} \big] \Big) \Big|_{\gamma = \gamma_t^*} \\ &= \mathrm{M}^{Q^*} \big[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \big| \mathcal{F}_{t-1} \big] \quad Q^*\text{-п. н.} \end{aligned} \tag{15}$$

Замечание 3. Условие относительной слабой компактности вероятностных мер дает теорема Ю. В. Прохорова [13].

Из утверждения теоремы 5 и теоремы 3.1.1 из [12] следует важное для дальнейших построений простое утверждение.

Следствие 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда для любого $t \in N_0$ разложение (13) справедливо относительно меры Q^*, т. е.*

$$\Delta \ln \overline{V}_t = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta C_t^* \quad Q^*\text{-п. н.} \tag{16}$$

1.6. В данном разделе приводим критерий того, что вероятностная мера Q^* доставляет наихудшее распределение вероятностей.

Определение 11. Последовательность $\{\overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$,

$$\overline{\mu}_t \triangleq \overline{V}_t \exp\Big\{ - \sum_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i) \Big\}, \tag{17}$$

где $\overline{V}_t$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (8), а $\{\gamma_t^*\}_{t\in N_1} \in D_1^N$ — минимаксная стратегия, определяемая равенством (11), назовем *верхней S-оценивающей*.

З а м е ч а н и е 4. Из утверждения теоремы 3 (см. формулу (12)) следует, что относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ верхняя S-оценивающая последовательность является супермартингалом.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

i) Q^* — *наихудшая вероятностная мера*;

ii) для любого $t \in N_1$ *справедливо равенство* (15);

iii) верхняя S-оценивающая последовательность $\{\overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$ *является мартингалом относительно меры* Q^*.

1.7. Из приведенных выше утверждений 1–7 следует основное утверждение данного параграфа.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда существует решение минимаксной задачи* (1).

§ 2. Минимаксное хеджирование европейского опциона на неполном рынке

В данном параграфе, опираясь на результаты §1, мы устанавливаем связь между задачей (1) и задачей расчета европейского опциона на неполном рынке, а также приводим условия, при выполнении которых существует минимальный совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением (теорема 10). Основываясь на утверждении теоремы 5, здесь мы формулируем утверждения о том, что: i) наихудшая мера Q^* является мартингальной (теорема 11); ii) относительно нее ограниченное платежное обязательство допускает S-представление [6] (теорема 12). Отсюда следует, что наихудшая мера Q^* дискретна (теорема 13). $(1, S^{(1)}, \ldots, S^{(d)})$-рынок относительно вероятностной меры Q^* нами назван *наихудшим полным*, а соответствующий портфель — *минимаксным хеджирующим*. В конце параграфа приводится методика проведения расчета европейского опциона на неполном рынке (теорема 15).

2.1. В данном разделе мы приводим необходимые для изложения результатов сведения из теории опционов [6, 7]. Отметим, что экономическая интерпретация постановки задачи расчета европейского опциона на неполном рынке содержится в [7].

2.1.1. Пусть $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$ — d-мерная согласованная последовательность, введенная в пункте 1.1.1 параграфа один, описывает эволюцию стоимости d рисковых активов [6]. Предполагаем, что имеется также один безрисковый актив [6], доходность которого равна нулю, а его начальная стоимость равна единице. Такой набор активов называют $(1, S^{(1)}, \ldots, S^{(d)})$-рынком [6]. В теории опционов [6, 7] $\mathcal{F}_N^S$-измеримую случайную величину $f_N(S_\bullet)$ называют *платежным обязательством ев-*

ропейского опциона с моментом исполнения $N \in \mathbf{N}^+$. Пусть $\{\beta_t\}_{t \in N_0}$ — $\mathcal{F}^S$-предсказуемая одномерная последовательность, элементы которой [6] интерпретируют как количество безрискового актива. Пусть $\{\gamma_t\}_{t \in N_1}$ — $\mathcal{F}^S$-предсказуемая d-мерная последовательность, описание которой приведено в пункте 1.1.2 параграфа один и которую мы назвали *стратегией*. Отметим, что i-ю $(i = 1, 2, \ldots, d)$ компоненту вектора управлений в момент времени $t \in N_1$ (γ_t) интерпретируют [6] как количество i-го рискового актива в момент времени $t \in N_1$. Последовательность пар $\pi \triangleq (\beta_t, \gamma_t)_{t \in N_1}$ называют *портфелем* [6]. *Капиталом портфеля* π в момент времени $t \in N_0$ [6] на $(1, S^{(1)}, \ldots, S^{(d)})$-рынке называют $\mathcal{F}_t^S$-измеримую случайную величину X_t^π, определяемую равенством

$$X_t^\pi = \beta_t + (S_t, \gamma_t). \tag{18}$$

Портфель π называют *самофинансирующим* [6], если для любого $t \in N_1$ выполнено равенство P-п. н.

$$\Delta\beta_t + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t) = 0. \tag{19}$$

Множество самофинансирующих портфелей обозначают SF.

Согласованную возрастающую последовательность $C \triangleq \{C_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ с $C_t|_{t=0} = 0$ называют *потреблением* [6]. Набор (π, C) называют *портфелем с потреблением* [6]. Капитал $\widehat{X}_t^{(\pi)}$ портфеля с потреблением (π, C) в момент времени $t \in N_0$ определим равенством

$$\widehat{X}_t^\pi = X_t^\pi - C_t. \tag{20}$$

Из (18)–(20) следует, что в любой момент времени $t \in N_0$ капитал $\widehat{X}_t^\pi$ самофинансирующего портфеля с потреблением (π, C) допускает представление

$$\widehat{X}_t^\pi = \widehat{X}_0^\pi + \sum_{i=1}^{t} (\gamma_i, \Delta S_i) - C_t. \tag{21}$$

2.1.2. Определение 13 [6]. $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынок назовем *безарбитражным*, если для каждого самофинансирующего портфеля π, капитал которого удовлетворяет условию: если $X_0^\pi = 0$ и $P\{X_t^\pi \geqslant 0\} = 1$ для любого $t \in N_0$, то $P\{X_N^\pi = 0\} = 1$.

Известно [6], что если на $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынке существует хотя бы одна мартингальная вероятностная мера, то $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынок является безарбитражным.

2.1.3. Определение 13 [6]. Безарбитражный $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынок называется *полным относительно мартингальной меры* $\widetilde{Q} \in \mathfrak{R}_N$, если существует портфель $\pi \in \mathrm{SF}$, капитал которого X_N^π такой, что $f_N(S_\bullet) = X_N^\pi$ $\widetilde{Q}$-п. н.

Определение 14 [6]. Будем говорить, что одномерный мартингал $(\Theta_t, \mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$ *допускает S-представление* относительно d-мерного мартингала $(S_t, \mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$ и некоторой $\widetilde{Q} \in \mathfrak{M}_N$, если найдется такая $\mathcal{F}^S$-предсказуемая d-мерная последовательность $\{\gamma_t\}_{t\in N_0}$, что для любого $t \in N_0$ имеет место равенство

$$\Theta_t = \Theta_0 + \sum_{i=1}^{t} (\gamma_i, \Delta S_i) \quad \widetilde{Q}\text{-п. н.} \tag{22}$$

Известно [6, 7], что справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть $\widetilde{Q} \in \mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N$ $(\neq \varnothing)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$*-рынок полный*;

2) *множество $\mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N$ состоит из одного элемента, т. е. $\mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N = \{\widetilde{Q}\}$*;

3) *всякий локальный мартингал $(\Theta_t, \mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$ относительно меры $\widetilde{Q}$ допускает S-представление.*

Определение 15 [6, 7]. Безарбитражный $(1,S^{(1)},S^{(2)},\ldots,S^{(d)})$-рынок называется *неполным*, если мощность множества $\mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N$ больше единицы ($|\mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N| > 1$).

2.1.4. Описанный в разделе 2.1.1 $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынок, вообще говоря, является неполным. Поэтому существует проблема выбора вероятностной меры Q, относительно которой следует проводить расчет европейского опциона. Как уже отмечалось ранее, для ее решения нами был выбран минимаксный подход, который позволяет описать $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынок с помощью наихудшей вероятностной мерой (в смысле определения 7). По этой причине в § 1 для ограниченного платежного обязательства мы занимались исследованием свойств последовательности $(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$ и установили условия существования минимаксной бистратегии (Q^*, γ_1^{*N}).

2.1.5. Теперь приведем определения минимального совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением в задаче расчета европейского опциона на неполном $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынке.

Определение 16 [6]. Самофинансирующий портфель с потреблением (π, C) на $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынке в задаче расчета европейского опциона с платежным обязательством $f_N(S_\bullet)$ назовем *суперхеджирующим*, если в момент времени N выполняется неравенство $f_N(S_\bullet) \leqslant \widehat{X}_N^\pi$ P-п. н.

Определение 17 [6]. Суперхеджирующий портфель с потреблением (π, C) назовем *совершенным*, если

$$\widehat{X}_N^\pi = f_N(S_\bullet) \quad P\text{-п. н.} \tag{23}$$

Условия существования совершенного суперхеджирующего портфеля для $Q \in \mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N$ установлены в [6] (см. теорему 2, с. 652) и [7] (см.

теорему 7.13, с. 335).

Определение 18. Совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением (π^*, C^*), капитал которого в момент времени $t \in N_0$ равен $\widehat{X}_t^{\pi^*}$, назовем *минимальным совершенным суперхеджирующим портфелем с потреблением*, если для любого другого совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением (π, C) (т.е. $(\pi, C) \neq (\pi^*, C^*)$), капитал которого в момент времени $t \in N_0$ равен $\widehat{X}_t^{\pi}$, для любого $t \in N_0$ справедливо неравенство P-п. н.

$$\widehat{X}_t^{\pi^*} \leqslant \widehat{X}_t^{\pi}. \tag{24}$$

2.2. В данном разделе, основываясь на утверждении теоремы 4, приводим условия существования минимального совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением. Кроме того, приводимое ниже утверждение устанавливает связь между задачей (1) и задачей построения минимального совершенного суперхеджирующего портфеля европейского опциона на неполном $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(d)})$-рынке.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда на $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(d)})$-рынке относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ существует минимальный совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением (π^*, C^*), т. е. существуют:*

i) $\pi^* = \{\beta_t^*, \gamma_t^*\}_{t \in N_1}$ *— самофинансирующий портфель, где $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in D_1^N$ — допустимая предсказуемая последовательность, определяемая равенством (11), а $\{\beta_t^*\}_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\Delta\beta_t^* + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^*) = 0, \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*, \tag{25}$$

причем β_0^* можно выбрать равным $\ln \overline{V}_0$ (которое находится из рекуррентного соотношения (8)), а γ_0^* — равным нулю; капитал портфеля π^* для любого $t \in N_0$ имеет вид

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + (\gamma_t^*, S_t) \quad Q\text{-п. н.}; \tag{26}$$

ii) *капитал $\widehat{X}_t^{\pi^*}$ суперхеджирующего портфеля с потреблением (π^*, C^*) для любых $t \in N_0$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$ допускает представление*

$$\widehat{X}_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t \qquad Q\text{-п. н.}, \tag{27}$$

где $\overline{V}_t$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (8), а C_t^*-потребление в любой момент времени $t \in N_0$ допускает Q-п. н. представление

$$\Delta C_t^* = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta \widehat{X}_t^{\pi^*} \geqslant 0, \quad C_t^*|_{t=0} = 0, \tag{28}$$

причем:

a) $\widehat{X}_t^{\pi^*} = X_t^{\pi^*} - C_t^* \quad Q$*-п. н.*,

b)

$$\widehat{X}_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^{t} (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_t^* \quad Q\text{-п. н.}; \tag{29}$$

iii) *портфель с потреблением* (π^*, C^*) *является совершенным суперхеджирующим, т. е.*

$$\widehat{X}_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet) \quad Q\text{-п. н.}; \tag{30}$$

iv) *портфель с потреблением* (π^*, C^*) *является минимальным совершенным суперхеджирующим портфелем с потреблением.*

Замечание 5. 1) Утверждение теоремы 10 отличается от соответствующих утверждений, приведенных в [6, 7], тем, что оно справедливо относительно любой вероятностной меры $Q \in \mathfrak{R}_N$.

2) Основные трудности, которые возникают при применении теоремы 10 для расчета европейского опциона на неполном рынке, связаны с нахождением явного вида решения рекуррентного соотношения (11). Отсюда, соответственно, следует проблема нахождения явного вида потребления $\{C_t^*\}_{t \in N_0}$.

2.3. В § 1 были получены условия существования наихудшей вероятностной меры Q^* (теорема 5, см. замечание 3). В данном разделе, основываясь на утверждениях теорем 5, 7 и следствия 6, мы устанавливаем, что мера Q^* — мартингальная.

Теорема 11. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда* Q^* — *мартингальная мера.*

2.4. В данном разделе, основываясь на S-опциональном разложении, мы установим, что ограниченная случайная величина $f_N(S_\bullet)$ (платежное обязательство) относительно меры Q^* допускает S-представление.

Теорема 12. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любого* $t \in N_0$ *потребление* $C_t^* = 0$ Q^**-п. н.*

2) *Любое* $\mathcal{F}_N$*-измеримое ограниченное платежное обязательство* $f_N(S_\bullet)$ *допускает относительно меры* Q^* *представление*

$$f_N(S_\bullet) = \mathrm{M}^{Q^*}[f_N(S_\bullet)|\mathcal{F}_0] + \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i^*, \Delta S_i) \quad Q^*\text{-п. н.}, \tag{31}$$

где $\{\gamma_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\}_{t \in N_1}$ — d*-мерная предсказуемая последовательность, определяемая равенством* (11).

Замечание 6. 1) Поскольку мера Q^* может не принадлежать множеству $\mathfrak{R}_N$, из утверждения известной теоремы 9 не следует утверждение теормы 12. В § 4 мы устанавливаем существование S-представления, основываясь на утверждениях теорем 4 и 5 данной статьи.

2) Из следствия 6 и первого утверждения теоремы 12 следует, что для любого $t \in N_1$, причем Q^*-п. н.,

$$\Delta \ln \overline{V}_t = (\gamma_t^*, \Delta S_t), \quad \ln \overline{V}_t|_{t=0} = \ln \overline{V}_0, \quad \ln \overline{V}_t|_{t=N} = f_N(S_\bullet). \tag{32}$$

Так как Q^* — мартингальная мера, то из (32) следует, что

$$\ln \overline{V}_0 = \mathrm{M}^{Q^*}[f_N(S_\bullet)|\mathcal{F}_0] \quad Q^*\text{-п. н.} \tag{33}$$

3) Поскольку для любого $t \in N_0$ относительно меры Q^* потребление C_t^* тривиально, то $\widehat{X}_t^{\pi^*} = X_t^{\pi^*}$ Q^*-п. н. Отсюда следует, что капитал портфеля $\pi^* \in \mathrm{SF}$ в любой момент времени $t \in N_1$ относительно меры Q^* допускает представление

$$X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^{t} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \quad Q^*\text{-п. н.}, \tag{34}$$

причем

$$X_t^{\pi^*} = \mathbf{M}^{Q^*}[f_N(S_\bullet)|\mathcal{F}_t] = \ln \overline{V}_t \quad Q^*\text{-п. н.} \tag{35}$$

2.5. В данном разделе, основываясь на утверждении теоремы 12, мы устанавливаем, что мера Q^* является дискретной.

Теорема 13. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда вероятностная мера Q^* является дискретной.*

2.6. Из утверждений 11–12 следует, что рассматриваемый $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынок относительно наихудшей меры Q^* можно в силу теоремы 1.39 из [7] отождествить с полным. Это замечание приводит нас к следующему определению.

Определение 18. $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынок назовем *наихудшим полным*, если существуют такие единственная наихудшая мартингальная вероятностная мера Q^* и портфель $\pi^* \in \mathrm{SF}$, что для любого $\mathcal{F}_N^S$-измеримого ограниченного платежного обязательства $f_N(S_\bullet)$ и капитала $X_N^{\pi^*}$ портфеля $\pi^* \in \mathrm{SF}$ в момент времени N имеет место равенство $X_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet)$ Q^*-п. н., а портфель π^* — *минимаксным хеджирующим.*

Из теорем 12, 13 вытекает следующее утверждение.

Теорема 14. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда существует наихудший полный рынок, причем капитал минимаксного хеджирующего портфеля Q^*-п. н. равен капиталу минимального совершенного суперхеджирующего портфеля с тривиальным потреблением.*

2.7. Теорема 10 устанавливает существование относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ минимального совершенного суперхеджирующего портфеля. Однако из нее не следует способ построения такого портфеля и его капитала. В данном разделе, основываясь на утверждениях теорем 11–14, мы устанавливаем вид минимаксного хеджирующего портфеля и его капитала.

Теорема 15. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Пусть $\pi^* \in \mathrm{SF}$ — минимаксный хеджирующий портфель. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Минимаксный хеджирующий портфель π^* допускает представление:*

i) *для любого $t \in N_1$ существует $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримый d-мерный вектор*

γ_t^*, *удовлетворяющий соотношению* Q^*-*п. н.*

$$\overline{V}_{t-1} = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathrm{M}^{Q^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \mathrm{M}^{Q^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1}^S\right],$$
$$\overline{V}_t|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}; \tag{36}$$

ii) *для любого* $t \in N_1$ *существует* $\mathcal{F}_{t-1}^S$-*измеримая случайная величина* β_t^*, *удовлетворяющая рекуррентному соотношению*

$$\beta_t^* = \beta_{t-1}^* - (\gamma_t^*, S_{t-1}), \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*, \tag{37}$$

причем $\beta_0^* = \ln \overline{V}_0$, *а* $\gamma_0^* = 0$.

2) *Для любого* $t \in N_0$ *капитал* $X_t^{\pi^*}$ *самофинансирующего портфеля* $\pi^* \in \mathrm{SF}$ *допускает* Q^*-*п. н. представления*:

a) $X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t$,

b) $X_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \sum_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i)$, *причем* $X_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet)$ Q^*-*п. н.*, $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0 = \mathrm{M}^{Q^*}[f_N(S_\bullet)|\mathcal{F}_0]$.

§ 3. Доказательства утверждений теорем 1–9

3.1. В данном разделе содержатся доказательства теоремы 1 и следствия 2. Для этого нам понадобятся дополнительные построения.

3.1.1. Так как $Q \in \mathfrak{R}_N$, то в силу теоремы Радона–Никодима [6] существует единственная $\mathcal{F}_N$-измеримая положительная расширенная случайная величина z_N, являющаяся плотностью меры Q относительно меры P, т. е. $z_N(\omega) = (dQ/dP)(\omega)$. Пусть $Q_t \triangleq Q|_{\mathcal{F}_t}$, $P_t \triangleq P|_{\mathcal{F}_t}$. Очевидно, что для любого $t \in N_0$ вероятностные меры Q_t и P_t эквивалентны. Значит, существует такая единственная $\mathcal{F}_t$-измеримая положительная случайная величина $z_t(\omega) \triangleq (dQ_t/dP_t)(\omega)$, называемая *локальной плотностью* [12], что: i) $0 < z_t < \infty$ P-п. н. для любого $t \in N_0$; ii) если $Q_0 = P_0$, то $z_t|_{t=0} = 1$; iii) $\mathrm{M}^P(z_t|\mathcal{F}_{t-1}) = z_{t-1}$ P-п. н. для любого $t \in N_1$.

Обозначим $\overline{Z}_t^N$ множество, элементами которого являются последовательности $\{\overline{z}_s^{t,N}, \mathcal{F}_s^S\}_{s \in N_0}$, любое $t \in N_0$,

$$\overline{z}_s^{t,N} \triangleq \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant t, \\ z_s/z_t, & t < s \leqslant N. \end{cases} \tag{38}$$

Для удобства изложения введем обозначение: $\overline{z}_t^N \triangleq \{\overline{z}_s^{t,N}\}_{s \in N_0}$ Ясно, что относительно меры P и фильтрации $\{\mathcal{F}_s^S\}_{s \in N_0}$ последовательность $\{\overline{z}_s^{t,N}\}_{s \in N_0}$ является мартингалом. Семейство множеств $\{\overline{Z}_t^N\}_{t \in N_0}$ обладает следующими свойствами [6]:

1) $\overline{Z}_t^N \subseteq \overline{Z}_{t-1}^N \subseteq \cdots \subseteq \overline{Z}_0^N$;

2) для любого $t \in N_0$ множество $\overline{Z}_t^N$ выпукло.

3.1.2. Рассмотрим оценку допустимой t-бистратегии (Q, γ_{t+1}^N). Из телескопического свойства условных математических ожиданий следует, что $I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению Q-п. н.

$$I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) = \mathrm{M}^Q\left[I_{t+1}^{Q, \gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S\right],$$
$$I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}. \tag{39}$$

Из определения оценки $I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ допустимой t-бистратегии (Q,γ_{t+1}^N) и того, что $Q,\ P\in\mathfrak{R}_N$, в силу теоремы Гирсанова [6] имеем $Q(P)$-п. н.

$$I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)=\mathrm{M}^P\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N}\exp\left\{f_N(S_\bullet)-\sum_{i=t+1}^{N}(\gamma_i,\Delta S_i)\right\}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{40}$$

Для удобства изложения выражение, стоящее в правой части равенства (40), обозначим $I_t^{P,\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$, где $(\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N)\in\overline{Z}_t^N\times D_{t+1}^N$. Из (39) и (40) следует, что для любых $t\in N_0$ и $(\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N)\in\overline{Z}_t^N\times D_{t+1}^N$ случайная величина $I_t^{P,\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению P-п. н.

$$I_t^{P,\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)=\mathrm{M}^P\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N}I_{t+1}^{P,\overline{z}_{t+1}^N,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{41}$$

Поскольку для любого $t\in N_0$ имеем $I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)=I_t^{P,\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ $Q(P)$-п. н., то, очевидно, что $\overline{V}_t$ допускает представление

$$\overline{V}_t=\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N}\ \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{z}_t^N\in\overline{Z}_t^N}I_t^{P,\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)\quad P\text{-п. н.} \tag{42}$$

3.2. Доказательство теоремы 1.

Установим сначала, что для любого $t\in N_0$ справедливо неравенство P-п. н.

$$\overline{V}_t\geqslant\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma\in D_{t+1}}\operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N}\mathrm{M}^Q\left[V_{t+1}e^{-(\gamma,\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{43}$$

Обозначим $\overline{I}_t^{P,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)\triangleq\operatorname{ess\,sup}_{\overline{z}_t^N\in\overline{Z}_t^N}I_t^{P,\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$. Из определения существенной верхней грани следует, что величина $\overline{I}_t^{P,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ — $\mathcal{F}_t^S$-измерима. Так как $I_t^{P,\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (41), то в силу свойств существенной верхней грани имеем неравенство P-п. н.

$$\begin{aligned}
\overline{I}_t^{P,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)&=\operatorname*{ess\,sup}_{\overline{z}_t^N\in\overline{Z}_t^N}\mathrm{M}^Q\left[I_{t+1}^{P,\overline{z}_{t+1}^N,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]\\
&\geqslant\operatorname*{ess\,sup}_{\overline{z}_{t+2}^{t+1,N}\in\overline{Z}_{t+1}^N}\mathrm{M}^P\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N}I_{t+1}^{P,\overline{z}_{t+1}^N,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]\\
&=\mathrm{M}^P\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N}\operatorname*{ess\,sup}_{\overline{z}_{t+1}^N\in\overline{Z}_{t+1}^N}I_{t+1}^{P,\overline{z}_{t+1}^N,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]\\
&=\mathrm{M}^P\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N}\overline{I}_{t+1}^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]\\
&=\mathrm{M}^Q\left[\overline{I}_{t+1}^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right].
\end{aligned} \tag{44}$$

Поскольку левая часть (44) не зависит от $Q\in\mathfrak{R}_N$, то из (44) следует, что P-п. н. справедливы неравенства

$$\overline{I}_t^{P,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)\geqslant\operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N}\mathrm{M}^Q\left[\overline{I}_{t+1}^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]$$

$$\geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+2}^N\in D_{t+2}^N} \overline{I}_{t+1}^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]$$

$$\geqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}\in\overline{D}_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+2}^N\in D_{t+2}^N} \overline{I}_{t+1}^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})\right.$$

$$\left.\times\, e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{45}$$

Учитывая в неравенстве (45), что $\overline{V}_{t+1} = \operatorname{ess\,sup}_{\gamma_{t+2}^N\in D_{t+2}^N} \overline{I}_{t+1}^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})$, имеем P-п. н.

$$\overline{I}_t^{P,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t) \geqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}\in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1}}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{46}$$

Так как правая часть (46) не зависит от $\gamma_{t+1}\in D_{t+1}$, то из (46) следует неравенство (43).

Установим теперь, что для любого $t\in N_0$ справедливо неравенство P-п. н.

$$\overline{V}_t \leqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma\in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma,\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{47}$$

Поскольку $I_t^{P,\overline{z}_{t+1}^N,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1}) \leqslant I_t^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})$ P-п. н., в силу теоремы Гирсанова из (41) следует, что для любого $\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N$ справедливы P-п. н. неравенства

$$I_t^{P,\overline{z}_{t+1}^{t,N},\gamma_{t+1}^N}(S_0^t) \leqslant \mathrm{M}^Q\left[I_{t+1}^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1}}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{I}_{t+1}^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{48}$$

Так как правая часть неравенства (48) не зависит от меры $Q\in\Re_N$, то из него следует, что для любой $\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N$ справедливо неравенство P-п. н.

$$\overline{I}_t^{P,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{I}_{t+1}^{P,\gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{49}$$

Заметим, что: i) для любого $\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N$ справедливо неравенство $\overline{V}_t \leqslant \overline{I}_t^{P,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ P-п. н.; ii) из определения существенной нижней грани, лемм Звонкина и Янкова–Неймана [10] следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\overline{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon,N} \triangleq \{\overline{\gamma}_s^\varepsilon\}_{s\in\{t+1,t+2,ldots,N\}}$ $\in D_{t+1}^N$, где $\overline{\gamma}_s^\varepsilon - \mathcal{F}_{s-1}$ — такой измеримый d-мерный вектор (зависящий от ε), что для любого $t\in N_0$ имеет место равенство $\overline{V}_t \geqslant \overline{I}_t^{P,\overline{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon,N}}(S_0^t) - \varepsilon$ P-п. н. Поэтому в силу сделанных замечаний неравенство (49) можно усилить, имеем P-п. н.

$$\overline{V}_t \leqslant \overline{I}_t^{P,\overline{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon,N}}(S_0^t) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{I}_{t+1}^{P,\overline{\gamma}_{t+2}^{\varepsilon,N}}(S_0^{t+1})e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[(\overline{V}_{t+1}+\varepsilon)e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]$$

$$+\,\varepsilon \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\left[e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\middle|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{50}$$

Поскольку левая часть (50) не зависит от $\gamma_{t+1} \in D_{t+1}$, то из (50) следует, что P-п. н. справедливо неравенство

$$\overline{V}_t \leqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} \Big| \mathcal{F}_t^S \right]$$
$$+ \varepsilon \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} e^{G_Q(t+1, S_0^t, -\gamma)}. \qquad (51)$$

Поэтому в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ из (51) следует (47).

Из неравенств (43), (47) следует рекуррентное соотношение (8). Очевидно, что $\overline{V}_t|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}$. Доказательство закончено.

3.3. Доказательство следствия 2.

1) Так как для любых $t \in N_0$, $\gamma \in D_t$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$ справедливо неравенство P-п. н.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \geqslant \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right],$$

то отсюда следует, что справедливо неравенство P-п. н.

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \geqslant \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right].$$

Из (8) и последнего неравенства следует (9).

2) Второе утверждение непосредственно следует из (8) и определения существенной нижней грани. Доказательство закончено.

3.4. В данном разделе мы приводим доказательство теоремы 3.

3.4.1. Положим $\Phi_{t-1}^Q(\gamma) \triangleq \mathrm{M}^Q[\overline{V}_t^P e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S]$, где любое $Q \in \mathfrak{R}_N$. Непосредственной проверкой легко установить справедливость следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любых* $t \in N_1$ *и* $Q \in \mathfrak{R}_N$ $\mathcal{F}_{t-1}$*-измеримая функция* $\Phi_{t-1}^Q(\gamma)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $\Phi_{t-1}^Q(\gamma)$ *является выпуклой полунепрерывной снизу по* γ;

2) *если для любого* $x_\cdot \in \mathbf{R}^{d(N+1)}$ *функция* $f_N(x_\cdot) \geqslant -c_3$, *где* c_3 *— положительная константа, и выполнено условие* (γ), *то функция* $\Phi_{t-1}^Q(\gamma)$ Q*-п. н. ограничена снизу по* γ, *причем* $\Phi_{t-1}^Q(\gamma) \geqslant e^{-c_3} c_2^{N-t+1}$ Q*-п. н.*

3.4.2. Доказательство теоремы 3. Установим существование такого γ_t^*, что выполнено равенство (11). Из условий теоремы, определения существенной верхней грани и из утверждения леммы 1 следует, что для любого $t \in N_1$ $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримая функция $\operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S]$ является выпуклой полунепрерывной снизу ограниченной снизу по γ. Поэтому из леммы Янкова–Неймана [10] вытекает, что существует такая $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримая функция γ_t^* со значениями в $\mathbf{R}^d$, что выполнено (11). Из (11) и свойств существенной верхней грани следует, что для любых $t \in N_1$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$ справедливо неравенство P-п. н.

$$\overline{V}_{t-1} = \left(\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \right) \Big|_{\gamma_t = \gamma_t^*}$$
$$\geqslant \left(\mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \right) \Big|_{\gamma_t = \gamma_t^*} = \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right].$$

Отсюда следует (12).

Для завершения доказательства нам осталось установить, что $\gamma_t^* \in D_t$. Заметим, что: i) в силу следствия 2 для любого $\gamma \in D_t$ справедливо неравентво (10); ii) в силу условий теоремы существует такая константа $c_4 > 0$, что $|f_N(S_\bullet)| \leqslant c_4$; iii) для любого $t \in N_1$ $\gamma_t = 0$ — допустимо. Поэтому из пункта 2) следствия 2 имеем для любого $t \in N_1$

$$\overline{V}_{t-1} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \left[e^{f_N(S_\bullet)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \leqslant e^{c_4} \quad Q\text{-п. н.} \tag{52}$$

Значит, $\gamma_t^* \in D_t$. Доказательство закончено.

3.5. Доказательство теоремы 4. Из утверждения теоремы 3 следует, что для любого $t \in N_1$ справедливо неравенство (12). Поскольку Q и P — эквивалентные вероятностные меры, то в силу теоремы Гирсанова и замечаний пункта 3.1.1 неравенство (12) можно переписать в виде P-п. н.

$$\overline{V}_{t-1} \geqslant \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] = \mathrm{M}^P \left[\overline{z}_t^{t-1,t} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right], \tag{53}$$

где любое $\overline{z}_t^{t-1,t} \in \overline{Z}_{t-1}^t$.

Пусть $\{g_t\}_{t \in N_1}$ — последовательность случайных величин, где g_t — любая $\mathcal{F}_t^S$-измеримая положительная ограниченная случайная величина. Пусть $\{z_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ допускает представление

$$z_t = z_{t-1} \frac{g_t}{\mathrm{M}^P(g_t | \mathcal{F}_{t-1}^S)}, \quad z_t|_{t=0} = 1. \tag{54}$$

Очевидно, что $\{z_t\}_{t \in N_0} \in \overline{Z}_0^N$ и для любого $t \in N_0$ $\mathcal{F}_t^S$-измеримая случайная величина z_t такова, что $0 < z_t < \infty$ P-п. н. Поэтому неравенство (53) с учетом (54) примет вид

$$\overline{V}_{t-1} \mathrm{M}^P \left[g_t \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \geqslant \mathrm{M}^P \left[g_t \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad P\text{-п. н.}$$

Отсюда следует неравенство

$$0 \geqslant \mathrm{M}^P \left[g_t \left(\frac{\overline{V}_t}{\overline{V}_{t-1}} e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} - 1 \right) \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad P\text{-п. н.} \tag{55}$$

Так как

$$\exp\{\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t)\} - 1 - [\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t)] \geqslant 0 \quad P\text{-п. н.},$$

то из (55) следует, что справедливы следующие неравенства P-п. н.

$$0 \geqslant \mathrm{M}^P \Big\{ g_t \Big[e^{\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t)} - 1 - (\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t)) + \Delta \ln \overline{V}_t$$
$$- (\gamma_t^*, \Delta S_t) \Big] \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \Big\} \geqslant \mathrm{M}^P \Big\{ g_t [\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t)] \Big| \mathcal{F}_{t-1}^S \Big\}.$$

Отсюда в силу произвольности случайной величины g_t получаем, что P-п. н. справедливо неравенство

$$\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) \leqslant 0. \tag{56}$$

Из (56) следует, что для любого $t \in N_1$ существует $\mathcal{F}_t^S$-измеримая случайная величина ΔC_t^*, определяемая (13), причем в силу (56) P-п. н. $\Delta C_t^* \geqslant 0$. Поэтому для любого $t \geqslant s$ P-п. н. $C_t^* \geqslant C_s^*$. Из (13) и сделанного замечания получаем, что P-п. н.

$$C_N^* = \sum_{i=1}^N \Delta C_i^* = \sum_{i=1}^N [(\gamma_i^*, \Delta S_i) - \Delta \ln \overline{V}_i] = \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) - \ln \overline{V}_N + \ln \overline{V}_0. \tag{57}$$

Учитывая в (57), что $\ln \overline{V}_N = f_N(S_\bullet)$, получаем (14). Доказательство закончено.

3.6. В данном разделе мы приводим доказательство теоремы 5.

3.6.1. Доказательство теоремы 5 опирается на вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любого* $t \in N_1$ Q-*п. н. справедливы равенства*

$$\overline{V}_{t-1} = \left(\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] \right) \Big|_{\gamma = \gamma^*_t}$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma^*_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right]. \qquad (58)$$

2) Q-*п. н. справедливы неравенства:*

i) $$0 \leqslant \exp\left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=1}^{N} (\gamma^*_i, \Delta S_i) \right\} \leqslant e^{c_4}, \qquad (59)$$

ii) *для любого* $t \in N_1$

$$0 \leqslant \overline{V}_t e^{-(\gamma^*_t, \Delta S_t)} \leqslant e^{c_4} \quad P\text{-п. н.} \qquad (60)$$

Доказательство леммы 2. 1) Установим (58). Для этого достаточно доказать, что Q-п. н. справедливо равенство

$$\overline{V}_{t-1} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma^*_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right]. \qquad (61)$$

Из определения существенной верхней грани следует, что существует такая последовательность вероятностных мер $\{Q_n\}_{n \geqslant 1}$, где $Q_n \in \Re_N$ и $Q_n(A) \triangleq \mathrm{M}^P z_N^{(n)}(\omega) 1_A(\omega)$, где любое $A \in \mathcal{F}_N$, что для любого $\gamma_t \in D_t$ P-п. н.

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}^{Q_n} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right]. \qquad (62)$$

Поскольку $\gamma^*_t \in D_t$, то из (62) следует, что P-п. н.

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}^{Q_n} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma^*_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma^*_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right]. \qquad (63)$$

Рассмотрим левую часть равенства (63). В силу леммы Дынкина–Евстигнеева [14], $\mathcal{F}^S_{t-1}$-измеримости и допустимости d-мерного случайного вектора $\gamma^*_t \in D_t$ имеем P-п. н.

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}^{Q_n} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma^*_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] = \lim_{n \to \infty} \left(\mathrm{M}^{Q_n} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] \Big|_{\gamma_t = \gamma^*_t} \right) \qquad (64)$$
$$= \left(\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}^{Q_n} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] \right) \Big|_{\gamma_t = \gamma^*_t} = \left(\operatorname*{ess\,inf}_{Q \in \Re_N} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] \right) \Big|_{\gamma_t = \gamma^*_t}.$$

Тогда (61) следует из (64) и (11) (см. утверждение теоремы 3).

2) Установим неравенство (59). Из s-опционального разложения (14) следует равенство Q-п. н.

$$\overline{V}_0 e^{-C^*_N} = \exp\left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=1}^{N} (\gamma^*_i, \Delta S_i) \right\}. \qquad (65)$$

В силу (52) для любого $t \in N_0$ $\overline{V}_t \leqslant e^{c_4}$ $Q(P)$-п. н. Кроме того, $C^*_N \geqslant 0$ Q-п. н. Поэтому из (65) следует неравенство (59). Неравенство (60) устанавливается аналогично и следует из (13). Доказательство закончено.

3.6.2. Доказательство теоремы 5. Пусть $\xi(\omega)$ — любая $\mathcal{F}_N^S$-измеримая ограниченная случайная величина. Тогда из определения $\sup_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\xi(\omega)$ следует, что существует такая последовательность неотрицательных случайных величин $\{\overline{z}_N^{(n)}(\omega)\}_{n\geqslant 1}$, причем $\{\overline{z}_t^{(n)}(\omega)\}_{t\in N_0} \in \overline{Z}_0^N$ для любого $n \geqslant 1$, что

$$\sup_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^P\xi(\omega)z_N^{(n)}(\omega). \tag{66}$$

Поскольку $\{\overline{z}_t^{(n)}(\omega)\}_{t\in N_0} \in \overline{Z}_0^N$ для любого $n \geqslant 1$, то определена вероятностная мера $Q^{(n)}$: $Q^{(n)}(A) \triangleq \int_A \overline{z}_N^{(n)}(\omega)P(d\omega)$, где любое $A \in \mathcal{F}_N^S$. Очевидно, что $Q^{(n)} \in \Re_N$. Следовательно, (66) можно переписать в виде

$$\sup_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^{Q^{(n)}}\xi(\omega). \tag{67}$$

Пусть

$$\lambda(A) \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}Q^{(i)}(A), \tag{68}$$

где любое $A \in \mathcal{F}_N^S$. Очевидно, что λ — вероятностная мера на (Ω, F), причем $Q^{(n)} \ll \lambda$ для любого $n \geqslant 1$. Поэтому в силу теоремы Радона–Никодима при каждом n существует плотность $\frac{dQ^n}{d\lambda}(\omega)$ меры $Q^{(n)}$ относительно меры λ.

Обозначим $ca_1(\Omega, F, \lambda)$ множество вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно меры λ. Обозначим $L_1(\Omega, F, \lambda)$ банахово пространство $\mathcal{F}$-измеримых абсолютно интегрируемых по мере λ случайных величин. Очевидно, что $\Re_N \subset ca_1(\Omega, F, \lambda)$. В силу теоремы Радона–Никодима для любой меры $\widehat{Q} \in ca_1(\Omega, F, \lambda)$ существует такая неотрицательная $\mathcal{F}_N$-измеримая случайная величина $\widehat{f}(\omega)$, что

$$\widehat{Q}\{A\} = \int_A \widehat{f}(\omega)\lambda(d\omega). \tag{69}$$

Формула (69) устанавливает эквивалентность пространств $ca_1(\Omega, F, \lambda)$ и $L_1(\Omega, F, \lambda)$. Поэтому существует относительно слабо компактное множество $K \subset L_1(\Omega, F, \lambda)$, соответствующее $\Re_N$. Стало быть, в силу теоремы Данфорда–Петтиса [13] множество K ограниченно и равномерно интегрируемо. Следовательно, последовательность $\{(dQ^{(n)}/d\lambda)(\omega)\}_{n\geqslant 1}$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой случайной величине $\chi \in L_1(\Omega, F, \lambda)$. Чтобы не вводить новых обозначений, эту подпоследовательность будем обозначать так же: $\{\frac{dQ^n}{d\lambda}(\omega)\}_{n=1,2,\dots}$. Значит,

$$\sup_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^\lambda\xi(\omega)\frac{dQ^{(n)}}{d\lambda}(\omega) = \mathrm{M}^\lambda\xi(\omega)\chi(\omega). \tag{70}$$

Из (70) следует, что ля любого $A \in \mathcal{F}$

$$\lim_{n\to\infty} Q^{(n)}(A) = \int_A \chi(\omega)\lambda(d\omega). \tag{71}$$

Значит, существует такая вероятностная мера Q^*, определяемая равенством $Q^*\{A\} = \int_A \chi(\omega)\lambda(d\omega)$, что

$$\sup_{Q\in\Re_N} \mathrm{M}^Q\xi(\omega) = \mathrm{M}^{Q^*}\xi(\omega). \tag{72}$$

Единственность вероятностной меры Q^* очевидна.

Установим теперь справедливость равенства (15). Пусть случайная величина $\xi(\omega) = \eta_{t-1}\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}$, где η_{t-1} — $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримая ограниченная, $(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$

удовлетворяет рекуррентному соотношению (8), а $(\gamma_t^*, \mathcal{F}_{t-1}^S)_{t\in N_1}$ определяется (11). Из второго утверждения леммы 2 следует, что для любого $t \in N_1$ $\overline{V}_t$ и $\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}$ — $\mathcal{F}_t^S$-измеримые ограниченные случайные величины. Рассмотрим

$$\sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \eta_{t-1}\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}.$$

С одной стороны, из свойств условного математического ожидания $\mathrm{M}^Q[\cdot|\mathcal{F}_{t-1}^S]$ и существенной верхней грани следует, что в силу утверждений теоремы 1 и пункта 1 леммы 2 справедливы равенства

$$\sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \eta_{t-1}\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} = \sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \eta_{t-1} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]$$
$$= \sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \eta_{t-1} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \eta_{t-1}\overline{V}_{t-1}. \quad (73)$$

Последнее равенство следует из первого утверждения леммы 2 (см. равенство (58)). Далее, в силу (72) имеем:

$$\sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \eta_{t-1}\overline{V}_{t-1} = \mathrm{M}^{Q^*} \eta_{t-1}\overline{V}_{t-1}, \quad (74)$$

$$\sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \eta_{t-1} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]$$
$$= \mathrm{M}^{Q^*}\left\{\eta_{t-1} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]\right\}. \quad (75)$$

Из (73)-(75) и произвольности случайной величины η_{t-1} следует, что для любого $t \in N_1$ справедливо равенство

$$\overline{V}_{t-1} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right] \quad Q^*\text{-п. н.} \quad (76)$$

С другой стороны, в силу (70), (71) и свойств условного математического ожидания имеем

$$\sup_{Q\in\mathfrak{R}_N} \mathrm{M}^Q \eta_{t-1}\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^{Q^{(n)}} \eta_{t-1}\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^\lambda \eta_{t-1}\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\frac{dQ^{(n)}}{d\lambda}(\omega) = \mathrm{M}^\lambda \eta_{t-1}\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\chi(\omega)$$
$$= \mathrm{M}^{Q^*} \eta_{t-1}\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} = \mathrm{M}^{Q^*} \eta_{t-1} \mathrm{M}^{Q^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \quad (77)$$

Из равенств (73), (74) и (77) имеем

$$\mathrm{M}^{Q^*} \eta_{t-1}\overline{V}_{t-1} = \mathrm{M}^{Q^*} \eta_{t-1} \mathrm{M}^{Q^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \quad (78)$$

Из (78) в силу произвольности η_{t-1} следует, что для любого $t \in N_1$ Q^*-п. н.

$$\overline{V}_{t-1} = \mathrm{M}^{Q^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \quad (79)$$

Из равенств (76) и (79) следует утверждение теоремы 5. Доказательство закончено.

3.7. Доказательство теоремы 7.

1) Пусть выполнено i), установим ii). Положим Q^* — наихудшая вероятностная мера. Требуется установить равенство (15). Доказательство проведем методом «от противного», т. е. предположим, что для некоторого $t \in N_1$ на множестве ненулевой меры Q^* выполнено неравенство $\overline{V}_{t-1} > \mathrm{M}^{Q^*}[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S]$ и, следовательно, справедливо неравенство $\overline{V}_t > I_t^{Q^*, \gamma_{t+1}^{*N}}(S_0^t)$. Последнее означает, что мера Q^* не является наихудшей. Стало быть, мы пришли к противоречию. Поэтому наше предположение неверно, что и доказывает утверждение.

2) Пусть выполнено ii), установим iii). Умножим левую и правую части (15) на $\exp\{-\sum_{i=1}^{t-1}(\gamma_i^*, \Delta S_i)\}$ и из определения последовательности $\{\overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$, а также свойств условного математического ожидания выводим, что Q^*-п. н.

$$\overline{\mu}_{t-1} = \overline{V}_{t-1} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t-1}(\gamma_i^*, \Delta S_i)\right\}$$
$$= \mathrm{M}^{Q^*}\left[\overline{V}_t \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t}(\gamma_i^*, \Delta S_i)\right\}\middle| \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \mathrm{M}^{Q^*}\left[\overline{\mu}_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}^S\right].$$

Из утверждений леммы 1 и теоремы 3 следует, что $\mathrm{M}^{Q^*}\overline{\mu}_t < \infty$. Значит, относительно меры Q^* последовательность $\{\overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ является мартингалом.

3) Пусть выполнено iii), установим i). Из определения S-оценивающей последовательности $\{\overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ и условий теоремы имеем Q^*-п. н.:

а) $\overline{\mu}_N = \exp\{f_N(S_\bullet) - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i)\}$;

б) $\overline{\mu}_0 = \overline{V}_0 = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_1^N \in D_1^N} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} I_0^{Q, \gamma_1^N}(S_0)$;

в) $\{\overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ — мартингал относительно меры Q^*.

Отсюда следует (15). Из (15) вытекает, что Q^*-п. н.

$$\overline{V}_t = I_t^{Q^*, \gamma_{t+1}^{*N}}(S_0^t). \tag{80}$$

Из замечания 4 следует, что для любых $t \in N_0$ и меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ справедливо неравенство

$$\overline{\mu}_t \geqslant \mathrm{M}^Q\left[\overline{\mu}_{t+1}\middle| \mathcal{F}_t^S\right] \quad Q\text{-п. н.} \tag{81}$$

Поэтому для любых $t \in N_0$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$ в силу (12), (80), (81), замечания 1 и рекуррентного соотношения (39) имеем неравенства

$$I_t^{Q^*, \gamma_{t+1}^{*N}}(S_0^t) = \overline{V}_t \geqslant \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1})}\middle| \mathcal{F}_t^S\right]$$
$$\geqslant \mathrm{M}^Q\left[I_{t+1}^{Q, \gamma_{t+2}^{*N}}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1})}\middle| \mathcal{F}_t^S\right] = I_t^{Q, \gamma_{t+1}^{*N}}(S_0^t) \quad Q^*\text{-п. н.}$$

Значит, мера Q^* — наихудшая. Доказательство закончено.

3.8. Доказательство теоремы 8 следует из утверждений теорем 1–7.

§ 4. Доказательства утверждений теорем 10–15

4.1. В данном разделе мы приводим доказательство теоремы 10, которое интересно тем, что устанавливает связь между решением задачи (1) и решением задачи расчета европейского опциона на неполном $(1, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$-рынке.

4.1.1. Доказательство теоремы 10. Из утверждения теоремы 3 следует, что существует стратегия $\{\gamma_t^*\}_{t\in N_1} \in D_1^N$, удовлетворяющая (11). Поэтому для любого $t \in N_1$ в силу (19) определена предсказуемая последовательность $\{\beta_t^*\}_{t\in N_0}$,

$$\Delta\beta_t^* = -(S_{t-1}, \Delta\gamma_t^*), \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*. \tag{82}$$

Значение величины β_0^* мы установим позже. Стало быть, мы построили самофинансирующий портфель $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t\in N_0}$. Поэтому в соответствии с формулой (18) для любого $t \in N_0$ определен капитал $X_t^{\pi^*}$ портфеля π^*

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + (\gamma_t^*, S_t). \tag{83}$$

Отсюда следует, что для любого $t \in N_1$ имеет место равенство Q-п. н.

$$\Delta X_t^{\pi^*} \triangleq X_t^{\pi^*} - X_{t-1}^{\pi^*} = \Delta\beta_t^* + \Delta(\gamma_t^*, S_t). \tag{84}$$

Выражение (84) с учетом (82) примет вид

$$\Delta X_t^{\pi^*} \triangleq (\gamma_t^*, \Delta S_t) \quad Q\text{-п. н.} \tag{85}$$

Из утверждения теоремы 4 (см. формулу (13)) следует, что для любого $t \in N_1$

$$(\gamma_t^*, \Delta S_t) = \Delta \ln \overline{V}_t + \Delta C_t^* \quad Q\text{-п. н.}, \tag{86}$$

где $(C_t^*, \mathcal{F}_t)_{t\in N_0}$ — такая последовательность, что: i) $C_0^* = 0$; ii) для любых $t \in N_0$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$ справедливо неравенство $\Delta C_t^* \geqslant 0$ Q-п. н. Поэтому (85) с учетом (86) примет вид $\Delta(X_t^{\pi^*} - \ln \overline{V}_t - C_t^*) = 0$ Q-п. н. Из последнего равенства следует, что для любого $t \in N_0$

$$X_t^{\pi^*} - \ln \overline{V}_t - C_t^* = X_0^{\pi^*} - \ln \overline{V}_0 - C_0^* \quad Q\text{-п. н.} \tag{87}$$

Положим

$$X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0 \quad Q\text{-п. н.} \tag{88}$$

Тогда из (87), (88) и равенства $C_0^* = 0$ следует, что для любых $t \in N_0$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$ справедливо равенство

$$X_t^{\pi^*} - C_t^* = \ln \overline{V}_t \quad Q\text{-п. н.} \tag{89}$$

Так как $(C_t^*, \mathcal{F}_t)_{t\in N_0}$ — возрастающая последовательность с $C_0^* = 0$, то в силу (20) $\widehat{X}_t^{\pi^*} = X_t^{\pi^*} - C_t^*$ является капиталом портфеля π^* с потреблением C_t^* в момент времени $t \in N_0$, а в силу (89) $\widehat{X}_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t$ — капитал портфеля с потреблением (π^*, C^*). Поскольку $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0$, то без ограничения общности можно считать, что $\beta_0^* = \ln \overline{V}_0$, а $\gamma_0^* = 0$.

Из утверждения теоремы 4 (см. формулу (13)) следует, что $\widehat{X}_N^{\pi^*} = \ln \overline{V}_N = f_N(S_\bullet)$ Q-п. н. относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ и, значит, $f_N(S_\bullet) = \ln \overline{V}_N = \ln \overline{V}_0 + \sum_{t=1}^N (\gamma_t^*, \Delta S_t) - C_N^*$ Q-п. н.

Стало быть, портфель с потреблением (π^*, C^*) является совершенным суперхеджирующим.

Для завершения доказательства теоремы осталось установить, что (π^*, C^*) является минимальным совершенным суперхеджирующим портфелем. Для его доказательства нам понадобится вспомогательное утверждение.

4.1.2. **Лемма 3.** *Пусть $f_N(S_\bullet)$ — ограниченное $\mathcal{F}_N^S$-измеримое платежное обязательство, а (π^*, C^*) — совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением, определенный соотношениями* (11), (13), (19). *Пусть (π, C) — любой другой совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением, т. е. $(\pi, C) \neq (\pi^*, C^*)$. Тогда для любых $t \in N_0$ и $Q \in \Re_N$ справедливо неравенство Q-п. н.*

$$1 \geqslant \exp\left\{\widehat{X}_t^{\pi^*} - \widehat{X}_t^{\pi}\right\}. \tag{90}$$

Доказательство леммы 3. Из утверждения теоремы 4 и условий леммы 3 следует, что платежное обязательство допускает относительно любой меры $Q \in \Re_N$ представления $f_N(S_\bullet) = \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} + \sum_{i=t_0+1}^N(\gamma_i^*, \Delta S_i) - (C_N^* - C_{t_0}^*) = \widehat{X}_{t_0}^{\pi} + \sum_{i=t_0+1}^N(\gamma_i, \Delta S_i) - (C_N - C_{t_0})$ Q-п. н. с любым $t_0 \in N_0$. Из этих равенств следует, что относительно любой меры $Q \in \Re_N$

$$\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} - \sum_{i=t_0+1}^N \Delta C_i^* = \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i - \gamma_i^*, \Delta S_i) - (C_N - C_{t_0}) \quad Q\text{-п. н.} \tag{91}$$

Так как $C_N - C_{t_0} \geqslant 0$ Q-п. н., то из (91) следует неравенство

$$\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} - \sum_{i=t_0+1}^N \Delta C_i^* \leqslant \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i - \gamma_i^*, \Delta S_i) \quad Q\text{-п. н.} \tag{92}$$

Поскольку для любого $t \in \{t_0+1, \dots, N\}$ $\widehat{X}_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t$ Q-п. н., то в силу (15) имеем $\Delta\widehat{X}_t^{\pi^*} = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta C_t^*$ Q-п. н. Поэтому неравенство (92) с учетом последнего равенства можно переписать в виде

$$\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} + \sum_{i=t_0+1}^N \left[\Delta\widehat{X}_i^{\pi^*} - (\gamma_i, \Delta S_i)\right] \leqslant 0 \quad Q\text{-п. н.}$$

Отсюда следует, что справедливо неравенство

$$\exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} + \sum_{i=t_0+1}^N \left[\Delta\widehat{X}_i^{\pi^*} - (\gamma_i, \Delta S_i)\right]\right\} \leqslant 1 \quad Q\text{-п. н.} \tag{93}$$

Возьмем условное математическое ожидание $\mathrm{M}^Q[\cdot|\mathcal{F}_{t_0}^S]$, где любое $Q \in \Re_N$, относительно левой и правой частей неравенства (93), учитывая, что $\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} = \ln \overline{V}_{t_0}$, $\widehat{X}_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet)$, а также (4), в результате имеем Q-п. н. неравенство

$$\begin{aligned}
1 &\geqslant \exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi}\right\}\mathrm{M}^Q\left[\exp\left\{\widehat{X}_N^{\pi^*} - \ln\overline{V}_{t_0} - \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i)\right\}\middle|\mathcal{F}_{t_0}^S\right] \\
&= \frac{\exp\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi}\}}{\overline{V}_{t_0}}\mathrm{M}^Q\left[\exp\left\{f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i)\right\}\middle|\mathcal{F}_{t_0}^S\right] \\
&= \exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi}\right\}\frac{I_{t_0}^{Q,\gamma_{t_0+1}^N}(S_0^{t_0})}{\overline{V}_{t_0}}.
\end{aligned}$$

Поскольку левая часть последнего неравенства не зависит от $Q \in \Re_N$, то для любого $\gamma^N_{t_0+1} \in D^N_{t_0+1}$ справедливо неравенство

$$1 \geqslant \exp\left\{\widehat{X}^{\pi^*}_{t_0} - \widehat{X}^{\pi}_{t_0}\right\} \frac{\operatorname{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} I^{Q,\gamma^N_{t_0+1}}_{t_0}(S^{t_0}_0)}{\overline{V}_{t_0}} \quad Q\text{-п. н.} \tag{94}$$

Из (94), в свою очередь, следует, что для любого $t \in N_0$ и относительно любой меры $Q \in \Re_N$ справедливо неравенство Q-п. н.

$$1 \geqslant \exp\left\{\widehat{X}^{\pi^*}_{t_0} - \widehat{X}^{\pi}_{t_0}\right\} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{\gamma^N_{t_0+1} \in D^N_{t_0+1}} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} I^{Q,\gamma^N_{t_0+1}}_{t_0}(S^{t_0}_0)}{\overline{V}_{t_0}} = \exp\left\{\widehat{X}^{\pi^*}_{t_0} - \widehat{X}^{\pi}_{t_0}\right\}.$$

Доказательство закончено.

4.1.3. Завершение доказательства теоремы 10. Доказательство мы проведем методом «от противного». Последнее означает, что найдутся такие момент времени $t_0 \in N_0$, мера $Q \in \Re_N$ и совершенный суперхеджирующий портфель (π, C), что $Q\{\widehat{X}^{(\pi^*)}_{t_0} > \widehat{X}^{(\pi)}_{t_0}\} > 0$. С другой стороны, в силу неравенства (90) $Q\{(\widehat{X}^{(\pi^*)}_{t_0} \leqslant \widehat{X}^{(\pi)}_{t_0}\} = 1$. Получено противоречие. Значит, наше предположение неверно. Поэтому совершенный суперхеджирующий портфель (π^*, C^*) является минимальным совершенным суперхеджирующим портфелем. Доказательство закончено.

4.2. Доказательство теоремы 11.

1) Из утверждений следствия 2 и теоремы 5 для любого $\gamma \in D_t$ имеем неравенство Q^*-п. н.

$$\overline{V}_{t-1} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right] = \mathrm{M}^{Q^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right]. \tag{95}$$

Пусть $\gamma = \gamma^*_t + h\overline{\gamma}_t$, где любое $h \in (0, 1]$, а $\overline{\gamma}_t$ — $\mathcal{F}^S_{t-1}$-измеримый случайный вектор, причем без ограничения общности можно считать, что $|\overline{\gamma}_t| \leqslant 1$. Тогда из (95) следует, что Q^*-п. н. справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\overline{V}_{t-1} &\leqslant \mathrm{M}^{Q^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma^*_t, \Delta S_t)} e^{-h(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right] \\ &= \overline{V}_{t-1} \mathrm{M}^{Q^*}\left[\exp\{\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma^*_t, \Delta S_t)\} e^{-h(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right].\end{aligned} \tag{96}$$

Из утверждения следствия 6 вытекает, что $\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma^*_t, \Delta S_t) = -\Delta C^*_t \leqslant 0$ Q^*-п. н. Поэтому неравенство (96) можно усилить, имеем Q^*-п. н.

$$1 \leqslant \mathrm{M}^{Q^*}\left[\exp\{-\Delta C^*_t - h(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)t\} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right] \leqslant \mathrm{M}^{Q^*}\left[e^{-h(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right]. \tag{97}$$

Неравенство (97) в силу формулы Ньютона–Лейбница можно переписать в виде

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \mathrm{M}^{Q^*}\left[\frac{1}{h}\int_0^h \frac{d}{du} e^{-u(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)}\, du \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right] \\ &= -\mathrm{M}^{Q^*}\left[(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)\frac{1}{h}\int_0^h e^{-u(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)}\, du \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right] \quad Q^*\text{-п. н.}\end{aligned} \tag{98}$$

Переходя в неравенстве (98) к пределу при $h \to 0$, в силу леммы Фату имеем Q^*-п. н.

$$\begin{aligned}0 &\geqslant \varliminf_{h \downarrow 0} \mathrm{M}^{Q^*}\left[(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)\frac{1}{h}\int_0^h e^{-u(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)}\, du \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right] \\ &\geqslant \mathrm{M}^{Q^*}\left[(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t) \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\int_0^h e^{-u(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t)}\, du \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right] = \mathrm{M}^{Q^*}\left[(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t) \middle| \mathcal{F}^S_{t-1}\right].\end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\overline{\gamma}_t$ получаем, что $\mathrm{M}^{Q^*}[\Delta S_t|\mathcal{F}^S_{t-1}] = 0$ Q^*-п. н. Следовательно, последовательность $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$ — локальный мартингал относительно меры Q^*. Значит, мера Q^* — мартингальная. Доказательство закончено.

З а м е ч а н и е 9. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 11, легко установить, что мера $\widetilde{Q}^*\{A\} \triangleq \mathrm{M}^{Q^*} e^{-C^*_N} 1_A(\omega)$, где любое $A \in \mathcal{F}_N$, $1_A(\omega)$ — индикатор множества A, вероятностная и является мартингальной. Очевидно, что мера Q^* доминирует [6, 7] меру $\widetilde{Q}^*$.

4.5. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 12. 1) С одной стороны, из утверждения следствия 6 вытекает, что $Q^*\{\Delta C^*_t \geqslant 0\} = 1$ для любого $t \in N_1$. Поэтому для любого $t \in N_1$

$$1 - e^{-\Delta C^*_t} \geqslant 0 \quad Q^*\text{-п. н.} \tag{99}$$

С другой стороны, из утверждения теоремы 5 в силу (15) для любого $t \in N_1$ имеем

$$\mathrm{M}^{Q^*}\left[1 - e^{-\Delta C^*_t}\middle|\mathcal{F}^S_{t-1}\right] = 0 \quad Q^*\text{-п. н.} \tag{100}$$

Из (99) и (100) следует, что для любого $t \in N_1$

$$\Delta C^*_t = 0 \quad Q^*\text{-п. н.} \tag{101}$$

Поскольку $C^*_0 = 0$, то из (101) получаем, что $Q^*\{C^*_t = 0\} = 1$ для любого $t \in N_0$.

2) Второе утверждение вытекает из первого утверждения ~~следствия и~~ теоремы следствия 6. Действительно, из (16) и равенства (101) имеем для любого $t \in N_1$ $\Delta \ln \overline{V}_t = (\gamma^*_t, \Delta S_t)$ Q^*-п. н. В силу того, что $\ln \overline{V}_t|_{t=0} = \ln \overline{V}_0$ и $\ln \overline{V}_t|_{t=N} = f_N(S_\bullet)$, из последнего рекуррентного соотношения имеем (31). Доказательство закончено.

4.6. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 13.

1) Проведем его методом «от противного». Последнее означает, что $Q^* \in \mathfrak{R}_N$. Поскольку $\mathfrak{R}_N$ — выпуклое множество, существуют такие $\alpha \in (0,1)$ и меры Q_1 и Q_2, причем $Q_1 \neq Q_2$, что

$$Q^*(A) = \alpha Q_1(A) + (1-\alpha)Q_2(A), \tag{102}$$

с любым $A \in F$.

Поскольку $Q_1 \neq Q_2$, существует такое множество B, что $Q_1(B) \neq Q_2(B)$. Без ограничения общности можно считать, что $Q_1(B) > Q_1(B) > Q_2(B)$. Поскольку Q^* — наихудшая, для любого $A \in FQ^*(A) \geqslant Q_i(A)i = 1, 2$. Следовательно, из (102) имеем неравенство

$$Q^*(B) = \alpha Q_1(B) + (1-\alpha)Q_2(B) < Q_1(B) \leqslant Q^*(B).$$

Получено противоречие. Значит, наше предложение неверно, т. е. $Q^* \notin \mathfrak{R}_N$.

2) Второе утверждение теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 5.38 (стр 264) из [15]. Поэтому его мы не приводим. Доказательство завершено.

З а м е ч а н и е 10. 1) Из доказательства теоремы 13 следует, что $P\{\Delta C^*_t > 0\} = 1$ для любого $t \in N_1$. Поэтому $Q\{\Delta C^*_t > 0\} = 1$ для любых $t \in N_1$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$.

2) Из утверждений 11–13 следует, что $Q^* = Q^*_s$ является единственной наихудшей мартингальной дискретной вероятностной мерой и поэтому $Q^* \notin \mathfrak{R}_N$.

4.7. Д о к а з а т е л ь с т в о утверждений т е о р е м 14 и 15 следует из доказательств утверждений 10–13 и замечания 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *El Karoui N., Quenez M. C.* Dynamic programming and pricing of contingent alaims in a incomplete merbet. — SIAM J. Control Optim., 1995, v. 33, № 1, p. 29–66.
2. *Kramkov D. O.* Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent alaims in incomplete security markets. — Probab. Theory Related Fields, 1996, v. 105, № 4, p. 459–479.
3. *Föllmer H., Kramkov D.* Optional decomposition under constraints. — Probab. Theory and Related Fields, 1997, v. 109, № 1, p. 1–25.
4. *Волков С. Н., Крамков Д. О.* О методологии хеджирования опционов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1998, т. 4, в. 1, с. 18–65.
5. *Föllmer H., Kabanov Yu. M.* Optional decomposition and Lagrange multipliers. — Finance Stoch., 1998, v. 2, № 1, p. 69–81.
6. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998, 544 с.
7. *Фёльмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008, 496 с.
8. *Эллиотт Р.* Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986, 351 с.
9. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1972, 400 с.
10. *Бертсекас Д., Шрив С.* Оптимальное стохастическое управление. М.: Наука, 1985, 280 с.
11. *Бояринцева Н. С., Хаметов В. М.* Новая теорема о представлении мартингалов (Дискретное время). — Матем. заметки, 2004, т. 75, в. 1, с. 40–54.
12. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Т.1, 2. М.: МЦНМО, 2004, 927 с.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ., 1962, 895 с.
14. *Дынкин Е. Б., Евстигнеев И. В.* Регулярные условные математические ожидания соответствий. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XXI, в. 2, с. 334–347.
15. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984, 484 с.
16. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксный суперхеджирующий портфель Европейского опциона. — В сб.: Российский экономический конгресс. Сборник докладов участников. М.: ИЭ РАН, 2009 (электронное издание).

Поступила в редакцию
20.XII.2010

ISSN 0869-8325

ТОМ 18

Выпуск 1

ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В выпуске:

Секция **«Финансовая и страховая математика»**
Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

1 – 8 V • 2011

ВОСЕМНАДЦАТАЯ ВСЕРОССИЙСКАЯ ШКОЛА-КОЛЛОКВИУМ
ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ

ДВЕНАДЦАТЫЙ ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ
Весенняя сессия. НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ. ЧАСТЬ I

16 – 23 X • 2010

ОДИННАДЦАТАЙ ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ МАКРОСИМПОЗИУМ
«НАСУЩНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ НА КУБАНИ»
Осенняя сессия. НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ. ЧАСТЬ III

Редакция журнала «ОПиПМ» • МОСКВА
2011