В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на сфере в топологический поток, *УМН*, 2016, том 71, выпуск 6(432), 163–164

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/rm9747

О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на сфере в топологический поток

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка

Основным показателем адекватности численного моделирования решений автономной системы дифференциальных уравнений является топологическая сопряженность полученной дискретной модели сдвигу на единицу времени исходного потока. Наиболее значимые результаты в этом направлении получены для структурно устойчивых потоков. В частности, в [1], [2] показано, что для потока Морса–Смейла без периодических траекторий на n-мерном диске ($n \geqslant 2$) его дискретизация методом Рунге–Кутты топологически сопряжена сдвигу на единицу времени (при достаточно малой величине шага). В связи с этим естественно возникает вопрос, восходящий к Дж. Палису [3], о необходимых и достаточных условиях включения диффеоморфизма Морса–Смейла в топологический поток.

Напомним, что диффеоморфизм f, заданный на замкнутом многообразии M^n, называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек, а для любых двух точек $p,q \in \Omega_f$ пересечение устойчивого многообразия W^{s}_p точки p и неустойчивого многообразия W^{u}_q точки q трансверсально. В [3] сформулированы следующие необходимые условия включения диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$ в топологический поток, которые мы называем *условиями Палиса*: 1) неблуждающее множество Ω_f совпадает с множеством неподвижных точек; 2) ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию; 3) если для различных седловых точек $p,q \in \Omega_f$ пересечение $W^{\mathrm{s}}_p \cap W^{\mathrm{u}}_q$ непусто, то оно не содержит компактных компонент связности.

Согласно [3], в случае $n=2$ эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными. В [4] построены примеры диффеоморфизмов Морса–Смейла на трехмерной сфере, удовлетворяющих условиям Палиса, но не включающихся в топологический поток, и получены необходимые и достаточные условия включения диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на 3-многообразиях. Дополнительное препятствие к включению таких диффеоморфизмов в топологический поток связано с возможностью нетривиального вложения сепаратрис седловых периодических точек в несущее многообразие. В настоящей работе установлено, что для класса $G(S^n)$ диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере S^n размерности $n \geqslant 4$ и удовлетворяющих условиям Палиса, подобных препятствий не существует и верна следующая теорема.

Теорема 1. *Любой диффеоморфизм* $f \in G(S^n)$, $n \geqslant 4$, *включается в топологический поток.*

Основным инструментом доказательства является схема диффеоморфизма, определяемая следующим образом. Пусть $f \in G(S^n)$. Из связи динамики диффеоморфизма f с гомологиями сферы S^n следует, что для любой седловой точки f либо устойчивое, либо неустойчивое многообразие имеет размерность 1. Обозначим через A_f и R_f объединения замыканий неустойчивых и устойчивых одномерных многообразий седловых точек соответственно; если седловых точек с одномерными неустойчивыми (устойчивыми) многообразиями у диффеоморфизма f нет, то f имеет единственную стоковую (источниковую) точку, которую обозначим через A_f (R_f). Положим $V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f)$. Согласно [5], множества A_f, R_f, V_f связны, причем A_f является

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ "ВШЭ" в 2016 г. (проект "Топологические методы в динамике"), РФФИ (гранты № 13-01-12452-офи_м, 15-01-03689-а) и Российского научного фонда (грант № 14-41-00044).

DOI: 10.4213/rm9747

аттрактором, R_f – репеллером, а V_f состоит из блуждающих точек диффеоморфизма f, движущихся от R_f к A_f, и содержит все седловые сепаратрисы коразмерности 1.

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f, через $p_f : V_f \to \widehat{V}_f$ естественную проекцию и через $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \to \mathbb{Z}$ эпиморфизм, индуцированный отображением p_f. Пусть $\widehat{L}^{\mathrm{s}}_f$ и $\widehat{L}^{\mathrm{u}}_f$ обозначают объединения проекций в $\widehat{V}_f$ всех соответственно устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых точек. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \eta_f, \widehat{L}^{\mathrm{s}}_f, \widehat{L}^{\mathrm{u}}_f)$ называют *схемой диффеоморфизма* $f \in G(S^n)$. Схемы S_f, $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G(S^n)$ называют *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ со следующими свойствами: 1) $\eta_f = \eta_{f'} \widehat{\varphi}_*$; 2) $\widehat{\varphi}(\widehat{L}^{\mathrm{s}}_f) = \widehat{L}^{\mathrm{s}}_{f'}$ и $\widehat{\varphi}(\widehat{L}^{\mathrm{u}}_f) = \widehat{L}^{\mathrm{u}}_{f'}$.

Согласно [6] схема является полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов из $G(S^n)$. Ключевым и наиболее нетривиальным моментом включения в поток диффеоморфизма $f \in G(S^n)$, $n \geqslant 4$, оказалась эквивалентность схемы S_f следующему стандартному объекту. Пусть a_0^t – поток на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, определяемый формулами $a_0^t(x_1, \dots, x_n) = (2^{-t}x_1, \dots, 2^{-t}x_n)$, a_0 – сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока a_0^t, $\widehat{V}_{a_0}$ – пространство орбит действия диффеоморфизма a_0 (диффеоморфное $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$) и $p_{\widehat{V}_{a_0}} : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \widehat{V}_{a_0}$ – естественная проекция. Выберем на стандартной сфере $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ произвольным образом k гладких попарно непересекающихся $(n-2)$-сфер $S_1^{n-2}, \dots, S_k^{n-2}$. Положим $\widetilde{c}_i = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} a_0^t(S_i^{n-2})$ и $c_i = p_{\widehat{V}_{a_0}}(\widetilde{c}_i)$. Выберем произвольным образом целое число $m \in [0, k]$ и положим $\widehat{L}^{\mathrm{s}}_{a_0} = \bigcup_{i=1}^m c_i$, $\widehat{L}^{\mathrm{u}}_{a_0} = \bigcup_{i=m+1}^k c_i$. Набор $S_{a_0} = \{\widehat{V}_{a_0}, \eta_{\widehat{V}_{a_0}}, \widehat{L}^{\mathrm{s}}_{a_0}, \widehat{L}^{\mathrm{u}}_{a_0}\}$ называется *стандартной схемой.*

Лемма. *Схема S_f любого диффеоморфизма $f \in G(S^n)$, $n \geqslant 4$, эквивалентна стандартной схеме при некоторых k и m.*

Методом, аналогичным методу работы [4], по стандартной схеме конструируется поток X^t, сдвиг на единицу времени которого имеет схему, эквивалентную S_f. Поскольку схема является полным топологическим инвариантом, то существует гомеоморфизм $h\colon S^n \to S^n$ такой, что $f = hX^1h^{-1}$. Таким образом, f включается в поток $Y^t = hX^th^{-1}$.

Список литературы

[**1**] B. M. Garay, *Acta Math. Univ. Comenian.* (*N. S.*), **62**:2 (1993), 249–275. [**2**] B. M. Garay, *Numer. Math.*, **72**:4 (1996), 449–479. [**3**] J. Palis, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404. [**4**] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, *Матем. сб.*, **203**:12 (2012), 81–104. [**5**] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Тр. МИАН, **271**, МАИК, М., 2010, 111–133. [**6**] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, Проблемы матем. анализа, **79**, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2015, 73–82.

В. З. Гринес (V. Z. Grines)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”;
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@hse.ru

Е. Я. Гуревич (E. Ya. Gurevich)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: egurevich@hse.ru

О. В. Починка (O. V. Pochinka)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: opochinka@hse.ru

Представлено Ю. С. Ильяшенко
Принято редколлегией
12.10.2016