УДК 519.2

В. И. Богачев, А. В. Колесников, К. В. Медведев

Треугольные преобразования мер

Получено новое тождество для энтропии нелинейного образа меры на $\mathbb{R}^n$, дающее известное неравенство Талаграна. Исследованы треугольные отображения в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^\infty$, т.е. отображения T, у которых i-я координатная функция T_i зависит только от переменных $x_1,\dots,x_i$. С помощью этих отображений дано положительное решение известной открытой проблемы о представимости всякой вероятностной меры ν, абсолютно непрерывной относительно гауссовской меры γ на бесконечномерном пространстве, в виде образа γ при отображении вида $T(x)=x+F(x)$, где F принимает значения в пространстве Камерона–Мартина меры γ. В качестве применения доказано также обобщенное логарифмическое неравенство Соболева.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

Эта работа посвящена изучению так называемых треугольных отображений, т.е. таких отображений $T=(T_1,\dots,T_n)\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, что T_1 есть функция x_1, T_2 – функция (x_1,x_2), T_3 – функция (x_1,x_2,x_3) и т.д.: T_i является функцией от $(x_1,x_2,\dots,x_i)$. Аналогично определяются треугольные отображения в $\mathbb{R}^\infty$ – счетном произведении прямых. Треугольное отображение называется *возрастающим*, если каждая его компонента T_i является возрастающей по переменной x_i. Такая же терминология употребляется для отображений, заданных на подмножествах $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^\infty$. Рассмотрение треугольных отображений весьма естественно в задачах теории вероятностей, связанных с преобразованиями последовательностей случайных величин. Выбор термина объясняется тем, что для дифференцируемого треугольного преобразования (например, линейного) матрица Якоби имеет треугольный вид. В работе [1] были построены треугольные преобразования равномерных распределений на выпуклых множествах (см. также [2]), а в работе [3] фактически установлено существование треугольного отображения T стандартной гауссовской меры γ на $\mathbb{R}^n$ в произвольную абсолютно непрерывную вероятностную меру $\nu=f\cdot\gamma$. Установленное с помощью такого преобразования неравенство Талаграна оценивает L^2-норму разности $T-I$ через интеграл от $f\log f$ по мере γ, т.е. энтропию плотности Радона–Никодима. Нами установлено точное равенство для энтропии нелинейного образа меры, из которого непосредственно

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00748), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1758.2003.1), Немецкого научного общества DFG (грант № 436 RUS 113/343/0(R)) и фонда INTAS (грант № 03-51-5018).

вытекает неравенство Талаграна. Найденное тождество используется при исследовании треугольных отображений.

Хорошо известно, что всякая радоновская вероятностная мера на метрическом пространстве является образом меры Лебега на отрезке (или любой другой безатомической вероятностной меры) при некотором борелевском отображении. Однако часто возникает задача о преобразовании одной заданной меры в другую с помощью отображений из более узких классов. Эта тематика, ставшая весьма популярной в последнее десятилетие, связана с целым рядом классических проблем из теории экстремальных задач, теории меры, нелинейного анализа и теории нелинейных уравнений с частными производными, в частности с известной задачей Монжа–Канторовича о перемещении масс. Взаимодействие всех этих направлений привело не только к ярким результатам о преобразованиях мер, но и к открытию новых интересных связей между различными областями и неожиданным приложениям. В частности, были получены некоторые новые функциональные неравенства. Среди различных классов отображений, рассматривавшихся многими авторами, следует особо выделить отображения монотонного типа (например, градиенты выпуклых функций) и определенные выше треугольные отображения.

Из недавних ярких результатов о монотонных отображениях отметим теорему из [4] и [5] (подробное обсуждение см. в [6]), согласно которой всякую абсолютно непрерывную вероятностную меру μ на $\mathbb{R}^n$ можно перевести в любую вероятностную меру ν на $\mathbb{R}^n$ с помощью преобразования T вида $T(x) = \nabla\varphi(x)$, где φ – выпуклая функция. Такие преобразования являются естественными аналогами возрастающих функций на прямой. Указанная теорема играет важную роль в получении ряда интересных неравенств в [7], [8]. В работах [9], [10] установлен бесконечномерный аналог этой теоремы в частном случае гауссовской меры, а именно показано, что радоновская гауссовская мера γ с пространством Камерона–Мартина H может быть преобразована в абсолютно непрерывную относительно нее вероятностную меру $\nu = f \cdot \gamma$, удовлетворяющую одному дополнительному ограничению, монотонным (в некотором естественном смысле) отображением вида

$$T(x) = x + F(x), \qquad F\colon X \to H, \tag{1.1}$$

где $F(x) = \nabla_H\varphi(x)$ для некоторой функции φ из класса Соболева $W^{2,1}(\gamma)$. Например, упомянутое ограничение удовлетворяется, если $f\log f \in L^1(\gamma)$. Преобразования вида (1.1) – это абстрактные преобразования Гирсанова классического винеровского пространства; их исследованию посвящены многие работы (см. ссылки на литературу в работах [11] и [12]). В случае классического винеровского пространства $C[0,1]$ пространство Камерона–Мартина состоит из абсолютно непрерывных функций x с $x(0) = 0$ и $x' \in L^2[0,1]$. В работах Камерона и Мартина, Маруямы, Прохорова, Скорохода и Гирсанова было выяснено, что при весьма широких условиях отображение вида

$$T(w)(t) = w(t) + \int_0^t \sigma(s, w(\,\cdot\,))\,ds$$

преобразует меру Винера в эквивалентную, причем многие важные в приложениях отображения, осуществляющие эквивалентные преобразования меры Винера, имеют указанную форму. Отметим, что меры вида $\gamma \circ T^{-1}$ с отображением T типа (1.1) названы в определении 2.7.1 книги [12] *представимыми*. В гл. 2 этой книги показано, что множество представимых мер всюду плотно в множестве всех вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно γ, в метрике, порожденной вариацией. Кроме того, там установлено, что всякую эквивалентную γ вероятностную меру μ можно перевести в γ отображением вида (1.1). В [13] показано, что меру γ можно преобразовать в любую абсолютно непрерывную относительно нее вероятностную меру ν отображением вида $T(x) = U(x) + F(x)$, где U сохраняет γ и $F\colon X \to H$. При этом, однако, после перечисленных работ оставался открытым вопрос о существовании преобразования $T = I + F$ с отображением F, принимающим значения в пространстве Камерона–Мартина, переводящего меру γ в произвольную абсолютно непрерывную относительно нее вероятностную меру ν.

Наши основные результаты (они были объявлены в [14]; здесь некоторые утверждения усилены) состоят в следующем. В § 2 введены и исследованы *канонические треугольные отображения* мер. В § 3 найдено точное равенство для энтропии нелинейного образа меры на $\mathbb{R}^n$, дающее неравенство Талаграна и усиливающее результат работы [15], полученный для градиентных отображений. В § 4 даны некоторые применения полученных результатов. В бесконечномерном случае доказано существование такого треугольного отображения T центрированной радоновской гауссовской меры γ в произвольную абсолютно непрерывную относительно γ вероятностную меру ν, что $T(x) = x + F(x)$, где F принимает значения в пространстве Камерона–Мартина H меры γ. Получено обобщение логарифмического неравенства Соболева.

О гауссовских мерах см. [11]. Далее можно считать, что речь идет о счетной степени стандартной гауссовской меры на прямой. В этом случае пространство Камерона–Мартина H есть классическое гильбертово пространство l^2.

Через $\mu \circ T^{-1}$ обозначается образ меры μ при измеримом отображении T, т.е. мера, задаваемая равенством $\mu \circ T^{-1}(B) := \mu(T^{-1}(B))$. Через $W^{p,r}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, где $p \geqslant 1$ и $r \in \mathbb{N}$, обозначается соболевский класс функций на $\mathbb{R}^n$, которые вместе с обобщенными частными производными до порядка r входят в $L^p(U)$ для каждого шара U.

§ 2. Свойства треугольных преобразований мер

Напомним (подробности можно найти в [16; гл. 10]), что для всякой вероятностной борелевской меры μ на пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, имеющей проекцию μ_n на $\mathbb{R}^n$, существуют такие условные вероятностные меры μ^x на аффинных подпространствах $x + \mathbb{R}^k$, где $x \in \mathbb{R}^n$, что для всякого борелевского множества B в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ функция $x \mapsto \mu^x(B)$ является борелевской, причем

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu^x(B)\, \mu_n(dx). \tag{2.1}$$

Можно также задавать условные меры на одном и том же пространстве $\mathbb{R}^k$ (такие условные меры будем обозначать через μ_x, чтобы отличить их от мер μ^x на слоях), но тогда (2.1) следует записывать в виде

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_x(B^x)\, \mu_n(dx),$$

где $B^x := \{y \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in B\}$. Мера μ^x представляет собой образ меры μ_x при сдвиге на вектор x. Для всякой ограниченной (или μ-интегрируемой) борелевской функции φ на $\mathbb{R}^{n+k}$ справедливы равенства

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \varphi(z)\,\mu(dz) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{x+\mathbb{R}^k} \varphi(z)\,\mu^x(dz)\,\mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x,y)\,\mu_x(dy)\,\mu_n(dx),$$

где в последнем интеграле точки $\mathbb{R}^{n+k}$ записываются в виде $z=(x,y)$.

Если мера μ задана плотностью ϱ относительно меры Лебега (в качестве ϱ мы условимся брать борелевскую версию), то мера μ_n задается плотностью

$$\varrho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x,y)\,dy,$$

а условные меры задаются плотностями

$$\varrho^x(y) = \varrho(x,y)\biggl(\int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x,z)\,dz\biggr)^{-1}$$

относительно k-мерной меры Лебега. При этом для тех точек x, для которых интеграл $\varrho(x,z)$ по z равен нулю (множество таких точек является борелевским и имеет μ_n-меру нуль), в качестве ϱ^x берется какая-нибудь фиксированная вероятностная плотность (для определенности будем брать стандартную гауссовскую плотность).

Для всякой пары вероятностных мер μ и ν на $\mathbb{R}^n$, где μ абсолютно непрерывна, существует борелевское возрастающее треугольное отображение $T_{\mu,\nu}$, переводящее μ в ν. Это отображение определено на некотором борелевском множестве полной μ-меры, причем k-я компонента $T_{\mu,\nu}$ как функция переменных $x_1,\ldots,x_k$ задана на борелевском множестве в $\mathbb{R}^k$, пересечения которого с прямыми, параллельными k-й координатной прямой, являются промежутками. Как показано ниже, такое отображение единственно с точностью до переопределения на множестве μ-меры нуль при условии, что ν обладает безатомическими условными мерами на координатных прямых (например, абсолютно непрерывна). Мы будем называть *канонической* версию $T_{\mu,\nu}$, которая определяется индукцией по n следующим образом. При $n=1$ положим

$$F_\mu(t) := \mu((-\infty,t)),\quad t\in\mathbb{R}^1,\qquad G_\mu(u) := \inf\{s : F_\mu(s) \geqslant u\},\quad u\in(0,1),$$
$$T_{\mu,\nu} := G_\nu \circ F_\mu.$$

Если при $u\to 0$ или $u\to 1$ функция G_ν имеет конечный предел, то мы задаем $G_\nu(0)$ или $G_\nu(1)$ как соответствующий предел. Если функция F_μ принимает какое-либо из значений 0 и 1 (множества $F_\mu^{-1}(0)$ и $F_\mu^{-1}(1)$ либо пусты, либо являются лучами), а функция G_ν не имеет конечного предела в соответствующей точке, то отображение $T_{\mu,\nu}$ задано на некотором промежутке (ограниченном или неограниченном) полной μ-меры. Отображение F_μ переводит μ в меру Лебега λ на $(0,1)$, а G_ν переводит λ в ν. Это остается в силе для любых вероятностных мер, если μ не имеет атомов. Отметим, что функция G_ν непрерывна слева. Действительно, пусть точки u_i возрастают к u, но $G_\nu(u_i) < G_\nu(u) - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда существуют точки s_i с $F_\nu(s_i) \geqslant u_i$ и $s_i < G_\nu(u) - \varepsilon$. Можно считать, что последовательность $\{s_i\}$ возрастает к некоторому $s \leqslant G_\nu(u) - \varepsilon$. Это дает $F_\nu(s) \geqslant u$ в силу непрерывности F_ν слева, что противоречит определению $G_\nu(u)$. Поскольку функция F_μ непрерывна, то функция $G_\nu \circ F_\mu$ непрерывна слева. Если мера ν эквивалентна мере Лебега (или хотя бы положительна на всех интервалах), то эта функция непрерывна. Легко видеть, что функция G_ν инъективна (в отличие, вообще говоря, от F_ν), если ν не имеет атомов (например, абсолютно непрерывна). В случае $n = 2$ обозначим через μ_1 и ν_1 проекции мер μ и ν на первую координатную прямую и возьмем каноническое отображение T_1, переводящее μ_1 в ν_1. Через μ_x и ν_x обозначим условные вероятностные меры на второй координатной прямой, $x \in \mathbb{R}^1$. При μ_1-почти всяком x_1 имеется условная вероятностная плотность

$$\varrho_\mu^{x_1}(x_2) := \varrho_\mu(x_1, x_2)\biggl(\int_{\mathbb{R}} \varrho_\mu(x_1, u)\, du\biggr)^{-1}.$$

Меру на прямой с плотностью $\varrho_\mu^{x_1}$ можно одномерным каноническим отображением преобразовать в условную вероятностную меру $\nu_{T_1(x_1)}$. Соответствующее каноническое отображение обозначим через $x_2 \mapsto T_2(x_1, x_2)$ (согласно одномерному случаю область определения этого отображения может быть собственным промежутком). Если ν имеет плотность ϱ_ν, то $\nu_{T_1(x_1)}$ задается плотностью $\varrho_\nu^{T_1(x_1)}(\,\cdot\,)$, где

$$\varrho_\nu^{x_1}(x_2) := \varrho_\nu(x_1, x_2)\biggl(\int_{\mathbb{R}} \varrho_\nu(x_1, u)\, du\biggr)^{-1}.$$

Заметим, что $\displaystyle\int \varrho_\nu(T_1(x_1), u)\, du > 0$ при μ_1-п.в. x_1 ввиду равенства $\nu_1 = \mu_1 \circ T_1^{-1}$. Ясно, что $T := (T_1, T_2)$ оказывается возрастающим треугольным отображением и переводит μ в ν. Действительно, для всякой ограниченной борелевской функции h на $\mathbb{R}^2$ имеем

$$\int h(x,t)\, d\nu = \iint h(x,t)\, \nu_x(dt)\, \nu_1(dx).$$

Дважды воспользовавшись заменой переменных, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\iint h(x,t)\, \nu_x(dt)\, \nu_1(dx) &= \iint h(T_1(x), t)\, \nu_{T_1(x)}(dt)\, \mu_1(dx) \\ &= \iint h(T_1(x), T_2(x,t))\, \mu_x(dt)\, \mu_1(dx) = \int h \circ T\, d\mu.\end{aligned}$$

Построение продолжается индуктивно с использованием одномерных условных плотностей на последней координатной прямой. Если для некоторого $n \geqslant 1$ существование канонических треугольных отображений уже установлено, то для мер на $\mathbb{R}^{n+1}$ такие отображения строятся так же, как и в рассмотренном выше двумерном случае. А именно проекции мер μ и ν на $\mathbb{R}^n$ обозначим через μ_n и ν_n. Соответствующие условные меры на последней координатной прямой обозначим через μ_x и ν_x, $x \in \mathbb{R}^n$, а плотность μ_x – через ϱ_μ^x. По предположению индукции существует каноническое борелевское треугольное отображение $T = (T_1, \dots, T_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящее μ_n в ν_n (область определения T может быть собственным борелевским подмножеством $\mathbb{R}^n$ полной μ_n-меры). В качестве $T_{\mu,\nu}$ берем отображение $T_{\mu,\nu} = (T_1, \ldots, T_{n+1})$, где последняя компонента задается так: при фиксированных $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ функция $t \mapsto T_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, t)$ является каноническим преобразованием меры с плотностью ϱ_μ^x в меру $\nu_{T(x)}$. Область определения T_{n+1} является борелевским множеством полной μ-меры, причем его пересечения с прямыми, параллельными последней координатной прямой, представляют собой промежутки (ограниченные или неограниченные). Проверим, что функция T_{n+1} борелевская. Поскольку она является возрастающей и непрерывной слева по x_{n+1}, то достаточно проверить ее борелевость по $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при фиксированном x_{n+1} (см., например, [16; лемма 6.4.6]). По построению имеем

$$T_{n+1}(x, x_{n+1}) = G_{\nu_{T(x)}}(F_{\mu_x}(x_{n+1})).$$

Функция $x \mapsto F_{\mu_x}(x_{n+1}) = \mu_x((-\infty, x_{n+1}))$ борелевская. Поэтому достаточно установить борелевость функции $(x, z) \mapsto G_{\nu_{T(x)}}(z)$ на $\mathbb{R}^n \times (0,1)$. Поскольку она возрастает и непрерывна слева по z, то нужно проверить лишь борелевость функции $x \mapsto G_{\nu_{T(x)}}(z)$ при фиксированном z, что ввиду борелевости T сводит все к обоснованию борелевости функции $\psi\colon x \mapsto G_{\nu_x}(z)$. Для каждого $c \in \mathbb{R}^1$ множество $\{x : \psi(x) < c\}$ является проекцией множества $E := \{(x,s) : \nu_x((-\infty, s)) \geqslant z,\ s < c\}$ на $\mathbb{R}^n$. Множество E борелевское, ибо такова функция $(x,s) \mapsto \nu_x((-\infty, s))$, которая возрастает и непрерывна слева по s и борелева по x. Поскольку сечения $E_x := \{s : (x,s) \in E\}$ представляют собой полуинтервалы и потому σ-компактны, то теорема Арсенина–Кунугуи (см. [17; теорема 35.46]) дает борелевость проекции E. Итак, борелевость T_{n+1} установлена. Указанная выше цепочка равенств остается в силе после замены μ_1 и ν_1 на μ_n и ν_n и показывает, что получено искомое отображение.

Если мера μ эквивалентна мере Лебега, то можно взять борелевскую версию ее плотности, не обращающуюся в нуль. Тогда отображение $T_{\mu,\nu}$ определено на всем $\mathbb{R}^n$ (это же верно, если проекция μ на первую координатную прямую и условные меры на остальных координатных прямых не сосредоточены на лучах). В общем случае область определения $T_{\mu,\nu}$ является борелевским множеством полной μ-меры, причем k-я компонента определена на борелевском множестве в $\mathbb{R}^k$, пересечения которого с прямыми, параллельными k-й координатной прямой, представляют собой промежутки. Отображение $T_{\mu,\nu}$ задано на всем пространстве и в том случае, когда мера ν сосредоточена на ограниченном множестве, ибо тогда при $n = 1$ функция $T_{\mu,\nu}$ определена на всей прямой ввиду существования конечных пределов функции G_ν в точках 0 и 1. Вообще говоря, не всегда можно продолжить $T_{\mu,\nu}$ до возрастающего отображения на всем пространстве. Например, если μ – мера Лебега на отрезке $[0,1]$, рассматриваемая на всей прямой, а ν – стандартная гауссовская мера на прямой, то отображение $T_{\mu,\nu}$ задано на $(0,1)$, но не продолжается до возрастающей функции на всей прямой.

Наконец, вместо преобразований мер на $\mathbb{R}^n$ можно иметь дело с преобразованиями мер на кубе $[0,1]^n$. Тогда отображение $T_{\mu,\nu}$ определено на всем кубе, ибо в одномерном случае оно оказывается заданным на всем отрезке $[0,1]$. В некоторых отношениях удобнее рассматривать отображения куба. Отметим, что случай $\mathbb{R}^n$ сводится к случаю $[0,1]^n$. Для этого с помощью отображения $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto$

$(\operatorname{arctg} x_1, \ldots, \operatorname{arctg} x_n)$ и обратного к нему переходим от $\mathbb{R}^n$ к $(0,1)^n$ (это сохраняет класс возрастающих треугольных борелевских отображений). Для мер μ и ν на $(0,1)^n$ берем отображение $T_{\mu,\nu}$ куба $[0,1]^n$, соответствующее их продолжениям на этот куб, и полагаем $\Omega := T_{\mu,\nu}^{-1}((0,1)^n)$. Теперь можно рассматривать отображение $T_{\mu,\nu}\colon \Omega \to (0,1)^n$.

Ясно, что в случае, когда мера μ эквивалентна мере Лебега, отображение $T_{\mu,\nu}$ инъективно, ибо первая его компонента инъективна на прямой, вторая компонента $T_2(x_1,x_2)$ инъективна как функция x_2 при фиксированном x_1 и т.д. Поэтому в силу теоремы Лузина $T_{\mu,\nu}$ переводит борелевские множества в борелевские. В общем случае, если ν обладает безатомическими условными мерами на координатных прямых (например, абсолютно непрерывна), то отображение $T_{\mu,\nu}$ инъективно на борелевском множестве полной μ-меры. Действительно, в одномерном случае это очевидно (в этом случае ν безатомична). Многомерный случай обосновывается по индукции. Для этого возьмем множество $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с $\mu_{n-1}(E) = 1$, на котором отображение $(T_1,\ldots,T_{n-1})$ инъективно. Тогда в $E\times\mathbb{R}^1$ найдется множество полной μ-меры, на котором $T_{\mu,\nu}$ инъективно, ибо для каждого $y = (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in E$ функция $t \mapsto T_n(x_1,\ldots,x_{n-1},t)$ инъективна на множестве полной μ_y-меры.

Отметим, что аналогичным образом возрастающие треугольные борелевские отображения $T_{\mu,\nu}$ строятся в более общем случае, когда ν – произвольная вероятностная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$, а вероятностная борелевская мера μ такова, что ее проекции на $\mathbb{R}^k$, $k = 1,\ldots,n$, и соответствующие условные меры не имеют атомов. Обоснование имеется в работе [18]. С помощью конечномерных канонических треугольных отображений очевидным образом строится каноническое борелевское треугольное отображение $T_{\mu,\nu}$ пространства $\mathbb{R}^\infty$, переводящее борелевскую вероятностную меру μ в борелевскую вероятностную меру ν, где предполагается, что конечномерные проекции μ удовлетворяют указанному выше условию, например абсолютно непрерывны. Для этого компоненты $T_{\mu,\nu}$ строятся индуктивно как компоненты канонических треугольных отображений, переводящих проекции μ на $\mathbb{R}^n$ в проекции ν. При этом в силу нашего построения первые n компонент канонического отображения на $\mathbb{R}^{n+1}$ дают каноническое отображение на $\mathbb{R}^n$.

Из построения ясно, что отображение $T_{\mu,\nu}$ зависит от выбора условных мер для μ и ν. Однако имеет место следующее свойство единственности в классе μ-эквивалентных возрастающих треугольных отображений.

Лемма 2.1. *Пусть μ – борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^\infty$. Предположим, что возрастающие треугольные борелевские отображения $T = (T_n)_{n=1}^\infty$ и $S = (S_n)_{n=1}^\infty$ таковы, что $\mu\circ T^{-1} = \mu\circ S^{-1}$ и для каждого n отображение $(T_1,\ldots,T_n)$ инъективно на борелевском множестве полной меры относительно проекции μ на $\mathbb{R}^n$. Тогда $T(x) = S(x)$ для μ-п.в. x.*

В частности, если проекции мер μ и ν на пространства $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывны, то существует каноническое треугольное отображение $T_{\mu,\nu}$, причем оно единственно с точностью до μ-эквивалентности в классе возрастающих борелевских треугольных отображений, переводящих μ в ν.

Доказательство. Ясно, что утверждение сводится к случаю отображений $\mathbb{R}^n$. Докажем его индукцией по n. Пусть $n = 1$. Предположим, что точка x_0 входит в топологический носитель μ. Если $T(x_0) < S(x_0)$, то x_0 не может быть атомом μ, ибо $\mu(x\colon T(x) < t) = \mu(x\colon S(x) < t)$ для всех t, и можно взять $t = (T(x_0) + S(x_0))/2$. Теперь можно считать, что обе функции T и S непрерывны в x_0, ибо точки их разрыва образуют не более чем счетное множество. Ввиду непрерывности обеих функций в x_0 найдется такая точка $x_1 > x_0$, не являющаяся атомом μ, что функции T и S непрерывны в x_1 и $T(x_1) < S(x_0)$. Взяв $t = T(x_1)$, получим, что найдется такая точка $y < x_0$, что $\mu((y, x_1)) = 0$ вопреки тому, что x_0 входит в топологический носитель μ.

Пусть наше утверждение уже доказано для некоторого $n \geqslant 1$. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим $\nu := \mu\circ T^{-1} = \mu\circ S^{-1}$. Обозначим через μ_n и ν_n проекции μ и ν на $\mathbb{R}^n$. На последней координатной оси зафиксируем условные меры μ_y и ν_y, $y \in \mathbb{R}^n$. В силу предположения индукции при $i \leqslant n$ имеем $T_i(x) = S_i(x)$ для μ-п.в. x. Действительно, образы меры μ_n при отображениях $T_0 := (T_1, \dots, T_n)$ и $S_0 := (S_1, \dots, S_n)$ равны (они совпадают с ν_n). Это дает $T_0 = S_0$ μ_n-п.в., что равносильно совпадению этих отображений μ-п.в., ибо они зависят только от $y := (x_1, \dots, x_n)$. Покажем теперь, что при μ_n-п.в. $y = (x_1, \dots, x_n)$ справедливо равенство $T_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = S_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ при μ_y-п.в. x_{n+1}. Для этого в силу одномерного случая достаточно проверить совпадение μ_n-п.в. мер $\mu_y \circ F_y^{-1}$ и $\mu_y \circ G_y^{-1}$, где

$$F_y(t) = T_{n+1}(x_1, \dots, x_n, t), \qquad G_y(t) = S_{n+1}(x_1, \dots, x_n, t).$$

По условию существует такое борелевское множество $E \subset \mathbb{R}^n$ с $\mu_n(E) = 1$, что отображение $T_0 = S_0$ является борелевским и инъективным на E. Найдется такое борелевское отображение J на $\mathbb{R}^n$, что $J(T_0(y)) = J(S_0(y)) = y$ для всех $y \in E$. Возьмем счетное семейство ограниченных борелевских функций φ_i на $\mathbb{R}^n$, разделяющих борелевские меры, и аналогичное счетное семейство функций ψ_j на прямой. Положим $\zeta_i = \varphi_i \circ J$. Тогда $\zeta_i(S_0(y)) = \zeta_i(T_0(y)) = \varphi_i(y)$ для всех $y \in E$, т.е. μ_n-п.в. Для всех i и j справедливо равенство

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_i(y)\psi_j(t)\,\nu(dy\,dt) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \zeta_i(S_0(y))\psi_j(S_{n+1}(y,t))\,\mu(dy\,dt)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\biggl(\int_{\mathbb{R}^1} \psi_j(S_{n+1}(y,t))\,\mu_y(dt)\biggr)\varphi_i(y)\,\mu_n(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\biggl(\int_{\mathbb{R}^1} \psi_j(t)\,\mu_y\circ G_y^{-1}(dt)\biggr)\varphi_i(y)\,\mu_n(dy).\end{aligned}$$

Такое же равенство выполняется и для мер $\mu_y\circ F_y^{-1}$ вместо $\mu_y\circ G_y^{-1}$. В силу нашего выбора функций φ_i и ψ_j получаем равенство $\mu_y \circ G_y^{-1} = \mu_y \circ F_y^{-1}$ для μ_n-п.в. y.

Предположение о том, что ν обладает безатомическими условными мерами на координатных прямых, существенно для утверждения о единственности. Действительно, пусть μ – мера Лебега на квадрате $[0,1]^2$, и пусть $T_1(x_1) = S_1(x_1) = 0$, $T_2(x_1, x_2) = x_2$, $S_2(x_1, x_2) = (x_2 + 1)/2$ при $0 \leqslant x_1 \leqslant 1/2$, $S_2(x_1, x_2) = (x_2 - 1)/2$ при $1/2 < x_1 \leqslant 1$. Тогда T и S переводят μ в меру Лебега на единичном отрезке второй координатной прямой.

Интересно сравнить каноническое треугольное отображение $T_{\mu,\nu}$, переводящее вероятностную меру μ на $\mathbb{R}^n$ в вероятностную меру ν, с отображением Ψ, которое также переводит μ в ν и удовлетворяет равенству

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Psi(x)-x|^2\,\mu(dx) = \inf_{\sigma\in M(\mu,\nu)} \biggl\{ \int_{\mathbb{R}^{2n}} |y-x|^2\,\sigma(dx\,dy) \biggr\},$$

где $M(\mu,\nu)$ – множество всех вероятностных мер на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, имеющих μ и ν в качестве проекций на сомножители. Известно (см. [19], [6]), что если μ абсолютно непрерывна и обе меры имеют конечные вторые моменты, то минимум достигается на мере σ, которая является образом μ при отображении $x\mapsto(\Psi(x),x)$ для некоторого отображения Ψ, представляющего собой градиент некоторой выпуклой функции V. В одномерном случае Ψ – возрастающая функция и потому совпадает с $T_{\mu,\nu}$. Однако в высших размерностях это уже не так: типичные треугольные отображения не являются градиентами, так как производная градиента задается симметричной матрицей (такая матрица может быть треугольной, лишь если она диагональна). Интересно выяснить, сколь велика разница между указанным минимумом и значением, которое дает каноническое треугольное отображение.

Теорема 2.2. *Пусть последовательность абсолютно непрерывных вероятностных мер ν_j на $\mathbb{R}^n$ сходится по вариации к мере ν, и пусть μ – вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$, эквивалентная мере Лебега. Тогда последовательность канонических треугольных отображений T_{μ,ν_j} сходится по мере μ к отображению $T_{\mu,\nu}$.*

Доказательство. Пусть $n=1$. Тогда $\lim_{j\to\infty} T_{\mu,\nu_j}(t)=T_{\mu,\nu}(t)$ для почти каждого t, ибо функция F_μ строго возрастает и $\lim_{j\to\infty} G_{\nu_j}(u)=G_\nu(u)$ для всех точек $u\in(0,1)$, в которых функция G_ν непрерывна, т.е. за исключением не более чем счетного множества. Действительно, пусть $u_0\in(0,1)$ – точка непрерывности G_ν и $s_0=G_\nu(u_0)$. Из непрерывности G_ν в u_0 следует, что при сколь угодно малом $\varepsilon>0$ выполняется неравенство

$$F_\nu(s_0-\varepsilon)<F_\nu(s_0)<F_\nu(s_0+\varepsilon).$$

Из сходимости по вариации мер ν_j к ν следует равномерная сходимость функций F_{ν_j} к F_ν. Поэтому для $\delta:=(F_\nu(s_0+\varepsilon)-u_0)/2$ можно найти такой номер N_1, что для всякого $j>N_1$ выполняется неравенство $|F_{\nu_j}(s_0+\varepsilon)-F_\nu(s_0+\varepsilon)|<\delta$. Следовательно,

$$F_{\nu_j}(s_0+\varepsilon)-u_0=F_{\nu_j}(s_0+\varepsilon)-F_\nu(s_0+\varepsilon)+F_\nu(s_0+\varepsilon)-u_0\geqslant F_\nu(s_0+\varepsilon)-u_0-\delta=\delta>0.$$

Значит, для всякого $j>N_1$ имеем $s_0+\varepsilon\geqslant\inf\{t: F_{\nu_j}(t)\geqslant u_0\}=G_{\nu_j}(u_0)$. Аналогично, найдется такое N_2, что $s_0-\varepsilon\leqslant G_{\nu_j}(u_0)$ для всех $j\geqslant N_2$. Итак, $|G_{\nu_j}(u_0)-s_0|<\varepsilon$ для всех достаточно больших j.

Пусть теорема доказана для некоторого $n\geqslant 1$, и пусть даны вероятностные меры $\nu_j=f_j\,dx$, сходящиеся по вариации к мере $\nu=f\,dx$ на $\mathbb{R}^{n+1}$. Достаточно проверить, что всякая подпоследовательность в $\{T_{\mu,\nu_j}\}$ содержит дальнейшую подпоследовательность, сходящуюся μ-п.в. Напомним следующий факт (см. [16;

следствие 9.9.11]). Пусть μ – радоновская вероятностная мера на вполне регулярном пространстве X с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}$, $T_j\colon X \to X$ – измеримые преобразования, сходящиеся μ-п.в. к преобразованию T, причем меры $\mu\circ T_j^{-1}$ и $\mu\circ T^{-1}$ абсолютно непрерывны относительно μ и плотности $f_j := d(\mu\circ T_j^{-1})/d\mu$ равномерно интегрируемы. Тогда если $\mathscr{B}$-измеримые функции φ_j сходятся по мере μ к функции φ, то функции $\varphi_j\circ T_j$ сходятся по мере к $\varphi\circ T$. Через P_n обозначим проекцию $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbb{R}^n$, а через $\mu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$ и $\nu_j^{(n)}$ будем обозначать проекции мер μ, ν и ν_j на $\mathbb{R}^n$. Ясно, что мера $\mu^{(n)}$ эквивалентна мере Лебега. Ввиду предположения индукции и теоремы Рисса можно считать, переходя к подпоследовательности, что отображения $P_n\circ T_{\mu,\nu_j}$ сходятся $\mu^{(n)}$-п.в. к отображению $P_n\circ T_{\mu,\nu}$, ибо они представляют собой естественные продолжения отображений $\Psi_j := T_{\mu^{(n)},\nu_j^{(n)}}$ и $\Psi := T_{\mu^{(n)},\nu^{(n)}}$ соответственно, т.е. $P_n\circ T_{\mu,\nu_j} = \Psi_j\circ P_n$, $P_n\circ T_{\mu,\nu} = \Psi\circ P_n$. Это легко усмотреть из свойств канонического отображения. Поскольку меры ν_j сходятся по вариации к мере ν, то, еще раз переходя к подпоследовательности, можно считать, что $f_j\to f$ п.в. При этом плотности f_j равномерно интегрируемы. Положим

$$\Phi_j(x) := (\Psi_j(P_n x), x_{n+1}), \qquad \Phi(x) := (\Psi(P_n x), x_{n+1}).$$

Обозначим через $\nu_{j,z}$, $z\in\mathbb{R}^n$, условные меры на последней координатной прямой для меры ν_j. Из описанного выше индуктивного построения компонент канонических отображений и рассмотренного одномерного случая явствует, что достаточно получить сходимость одномерных условных мер $\nu_{j,\Psi_j(y)}$ к условной мере $\nu_{\Psi(y)}$ для п.в. $y\in\mathbb{R}^n$. При $z\in\mathbb{R}^n$ положим

$$\theta_j(z) := \int_{\mathbb{R}^1} f_j(z,s)\,ds, \qquad \theta(z) := \int_{\mathbb{R}^1} f(z,s)\,ds.$$

Условные меры $\nu_{j,z}$ и ν_z задаются соответственно плотностями

$$g_j(z,t) = \frac{f_j(z,t)}{\theta_j(z)}, \qquad g(z,t) = \frac{f(z,t)}{\theta(z)}.$$

При этом $g(z,t)=0$, если $\theta(z)=0$, и аналогично для g_j. Функции θ_j сходятся к θ по норме $L^1(\mathbb{R}^n)$, а потому по мере $\mu^{(n)}$. Согласно упомянутому выше утверждению $\theta_j(\Psi_j(y))\to\theta(\Psi(y))$ по мере $\mu^{(n)}$. Переходим к п.в. сходящейся подпоследовательности. Ввиду того же утверждения функции $f_j\circ\Phi_j$ сходятся по мере μ к $f\circ\Phi$. Действительно, рассмотрим меру $\mu' := \mu^{(n)}\otimes\gamma$, где γ – стандартная гауссовская мера на последней координатной прямой. Эта мера эквивалентна μ, причем меры $\mu'\circ\Phi_j^{-1} = \nu_j^{(n)}\otimes\gamma$ сходятся по вариации к мере $\mu'\circ\Phi^{-1} = \nu^{(n)}\otimes\gamma$. Перейдя к подпоследовательности, получаем, что для $\mu^{(n)}$-п.в. y функции $g_j(\Psi_j(y),t)$ вещественного аргумента t сходятся п.в. к функции $g(\Psi(y),t)$. Так как мы имеем дело с вероятностными плотностями, то получаем сходимость в $L^1(\mathbb{R}^1)$, т.е. сходимость по вариации соответствующих мер, что дает сходимость п.в. последних компонент T_{μ,ν_j}.

Для возрастающих треугольных отображений справедлива следующая формула замены переменных.

Лемма 2.3. *Пусть* $T = (T_1, \dots, T_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – *возрастающее борелевское треугольное отображение. Предположим, что функции*

$$x_i \mapsto T_i(x_1, \dots, x_i)$$

абсолютно непрерывны на отрезках для п.в. $(x_1, \dots, x_{i-1}) \in \mathbb{R}^{i-1}$. *Положим по определению* $\det DT := \prod_{i=1}^n \partial_{x_i} T_i$. *Тогда для всякой интегрируемой на множестве* $T(\mathbb{R}^n)$ *борелевской функции* φ *функция* $\varphi\circ T \det DT$ *интегрируема по* $\mathbb{R}^n$ *и справедливо равенство*

$$\int_{T(\mathbb{R}^n)} \varphi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(T(x)) \det DT(x)\, dx. \tag{2.2}$$

Если отображение T *определено лишь на борелевском множестве* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *причем каждая функция* T_i *задана на борелевском множестве в* $\mathbb{R}^i$, *сечения которого прямыми, параллельными* i*-й координатной прямой, являются промежутками, а указанное условие выполнено для отрезков этих сечений, то это же утверждение верно с заменой* $\mathbb{R}^n$ *на* Ω.

Доказательство. При $n = 1$ наше утверждение совпадает с классической формулой замены переменных для абсолютно непрерывных функций. Далее применим индукцию по n и будем считать утверждение верным в случае размерности $n-1$. Вне суслинского множества $T(\mathbb{R}^n)$ функцию φ сделаем нулем. Положим $S = (T_1, \dots, T_{n-1})$. Тогда при почти каждом $y_n \in \mathbb{R}^1$ функция $(y_1, \dots, y_{n-1}) \mapsto \varphi(y_1, \dots, y_n)$ интегрируема по $\mathbb{R}^{n-1}$. Потому в силу предположения индукции и того факта, что отображение S на $\mathbb{R}^{n-1}$ удовлетворяет нашим условиям, получаем

$$\int_{T(\mathbb{R}^n)} \varphi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(S(z), y_n) \det DS(z)\, dz\, dy_n,$$

что после перестановки пределов интегрирования и замены $y_n = T_n(z, x_n)$ при фиксированном $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ приводит к (2.2), так как $\det DT = (\det DS)\partial_{x_n} T_n$. Аналогичные рассуждения применимы во втором случае, упомянутом в формулировке, когда T задано на Ω.

Приведем простое достаточное условие на меры μ и ν, обеспечивающее абсолютную непрерывность i-й компоненты $T_{\mu,\nu}$ по переменной x_i.

Лемма 2.4. *Каноническое треугольное отображение* $T_{\mu,\nu}$ *на* $\mathbb{R}^n$, *переводящее абсолютно непрерывную вероятностную меру* μ *в вероятностную меру* ν, *удовлетворяет условию предыдущей леммы, если мера* ν *эквивалентна мере Лебега.*

Доказательство. Достаточно заметить, что в одномерном случае функция $T_{\mu,\nu}$ абсолютно непрерывна на отрезках, ибо $T_{\mu,\nu} = G_\nu \circ F_\mu$, где обе функции возрастают и абсолютно непрерывны на отрезках. Абсолютная непрерывность F_μ очевидна, а абсолютная непрерывность (на каждом отрезке) функции G_ν, обратной к абсолютно непрерывной функции F_ν, вытекает из того, что она непрерывна, возрастает и имеет свойство Лузина (N) (см. [16; задача 5.8.48]). Наличие свойства (N) следует из условия $F_\nu' > 0$ п.в. (см. [16; лемма 5.8.13]).

Если мера ν не эквивалентна мере Лебега, то i-я компонента канонического треугольного отображения может оказаться разрывной. Например, каноническое отображение меры Лебега на $[0,1]$ в меру ν с плотностью 2 на $[0,1/4]\cup[3/4,1]$ и 0 на $(1/4,3/4)$ имеет скачок. Тем не менее, доказанная выше формула замены переменных остается в силе и без сделанного в лемме предположения об абсолютной непрерывности, если T является каноническим отображением абсолютно непрерывных мер (разумеется, не всякое возрастающее борелевское треугольное отображение таково).

Предложение 2.5. *Пусть μ и ν – вероятностные меры на $\mathbb{R}^n$ с плотностями ϱ_μ и ϱ_ν относительно меры Лебега. Тогда для канонического треугольного отображения $T_{\mu,\nu}=(T_1,\ldots,T_n)$ справедливо равенство*

$$\varrho_\mu(x)=\varrho_\nu(T_{\mu,\nu}(x))\det DT_{\mu,\nu}(x) \quad \textit{для} \ \ \mu\textit{-п.в.} \ \ x, \tag{2.3}$$

где $\det DT_{\mu,\nu}:=\prod_{i=1}^n \partial_{x_i}T_i$ существует почти всюду в силу монотонности T_i по x_i.

Доказательство. Рассмотрим сначала одномерный случай. Тогда $T_{\mu,\nu}=S\circ T$, где T – каноническое отображение меры μ в меру Лебега λ на $(0,1)$, т.е. функция распределения меры μ, а S – каноническое отображение меры λ в меру ν, т.е. функция, обратная к функции распределения F_ν меры ν. Из тождества $F_\nu(S(y))=y$ дифференцированием получаем $\varrho_\nu(S(y))S'(y)=1$ п.в. Действительно, достаточно заметить, что если Z – множество нулевой лебеговской меры, на котором производная F_ν не существует или отлична от ϱ_ν, то $S^{-1}(Z)$ имеет лебеговскую меру нуль. Это является прямым следствием равенства $\lambda\circ S^{-1}=\nu$ и абсолютной непрерывности ν. Теперь заметим, что

$$\varrho_\nu(S(T(x)))S'(T(x))=1 \quad \text{для} \ \ \mu\text{-п.в.} \ \ x.$$

Это ясно из равенства $\mu\circ T^{-1}=\lambda$. Аналогичным образом с помощью равенства $\mu\circ T^{-1}=\lambda$ заключаем, что

$$T'_{\mu,\nu}(x)=S'(T(x))T'(x) \quad \text{для} \ \ \mu\text{-п.в.} \ \ x.$$

Итак, для μ-п.в. x получаем

$$\varrho_\nu(T_{\mu,\nu}(x))T'_{\mu,\nu}(x)=\varrho_\nu(T_{\mu,\nu}(x))S'(T(x))T'(x)=T'(x)=\varrho_\mu(x).$$

Далее воспользуемся индукцией по n и будем считать наше утверждение доказанным для размерности $n-1$. Будем записывать точки $\mathbb{R}^n$ в виде (x,x_n), $x\in\mathbb{R}^{n-1}$. Положим $\widetilde{T}(x)=(T_1(x),\ldots,T_{n-1}(x))$. Проекции мер μ и ν на $\mathbb{R}^{n-1}$ обозначим через μ' и ν', а их плотности относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^{n-1}$ – через $\varrho_{\mu'}$ и $\varrho_{\nu'}$ соответственно. Заметим, что $\widetilde{T}$ совпадает с $T_{\mu',\nu'}$. По предположению индукции

$$\varrho_{\mu'}(x)=\varrho_{\nu'}(\widetilde{T}(x))\det D\widetilde{T}(x) \quad \mu'\text{-п.в.} \tag{2.4}$$

При μ'-п.в. фиксированном $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция $t \mapsto T_n(x,t)$ переводит одномерную условную плотность $\varrho_\mu^x(x_n) = \varrho_\mu(x,x_n)/\varrho_{\mu'}(x)$ меры μ в условную плотность

$$\varrho_\nu^{\widetilde{T}(x)}(x_n) = \frac{\varrho_\nu(\widetilde{T}(x), x_n)}{\varrho_{\nu'}(\widetilde{T}(x))}$$

меры ν. Согласно доказанному в одномерном случае получаем

$$\frac{\varrho_\mu(x,x_n)}{\varrho_{\mu'}(x)} = \frac{\varrho_\nu(\widetilde{T}(x), T_n(x,x_n))}{\varrho_{\nu'}(\widetilde{T}(x))}\, \partial_{x_n} T_n(x,x_n) \quad \text{для } \mu_x\text{-п.в. } x_n.$$

Вместе с (2.4) и равенством $\det DT(x,x_n) = \partial_{x_n} T_n(x,x_n) \det D\widetilde{T}(x)$ это завершает доказательство.

Подчеркнем еще раз, что частная производная в формулировке – это существующая почти всюду обычная частная производная, а не производная в смысле обобщенных функций (которая имеет сингулярную компоненту в случае функции, не являющейся абсолютно непрерывной). Этот результат существенно усиливает доказанное в [2] при дополнительных условиях на плотности данных мер. Приведем еще достаточное условие непрерывной дифференцируемости канонического отображения.

Лемма 2.6. *Предположим, что вероятностные меры μ и ν на $\mathbb{R}^n$ заданы непрерывными положительными плотностями ϱ_μ и ϱ_ν, у которых соболевские частные производные до порядка $n+1$ интегрируемы по $\mathbb{R}^n$. Тогда каноническое треугольное отображение $T_{\mu,\nu}$ непрерывно дифференцируемо. То же самое верно, если вместо интегрируемости частных производных до порядка $n+1$ потребовать непрерывность частных производных плотностей первого порядка и существование таких неотрицательных интегрируемых функций $\theta_1,\ldots,\theta_n$ на прямой, что функции ϱ_μ, ϱ_ν, $|\partial_{x_i}\varrho_\mu|$, $|\partial_{x_i}\varrho_\nu|$ оцениваются через функцию $\theta_1(x_1)\cdots\theta_n(x_n)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала каноническое отображение меры μ в лебеговскую меру λ на открытом кубе $(0,1)^n$. В этом случае последняя компонента T_n соответствующего канонического отображения имеет вид

$$T_n(x,x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \varrho_\mu(x,s)\,ds \biggl(\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_\mu(x,s)\,ds\biggr)^{-1},$$

где точки $\mathbb{R}^n$ записываются как (x,x_n), $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Заметим, что функция $\partial_{x_n} T_n$ непрерывна. Для этого достаточно убедиться в непрерывности функции

$$G(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_\mu(x,s)\,ds.$$

Легко видеть, что эта функция имеет интегрируемые по $\mathbb{R}^{n-1}$ соболевские частные производные до порядка n, что по теореме вложения Соболева влечет непрерывность G.

Функции $\partial_{x_i} T_n$, $i \leqslant n-1$, также непрерывны. Действительно, ввиду положительности ϱ_μ достаточно проверить непрерывность функций

$$H_i(x, x_n) := \int_{-\infty}^{x_n} \partial_{x_i} \varrho_\mu(x, s)\, ds.$$

Эти функции имеют интегрируемые обобщенные частные производные до порядка $n+1$ и потому непрерывны. Следовательно, отображение $T_{\mu,\lambda}$ непрерывно дифференцируемо.

В общем случае отображение $T_{\mu,\nu}$ является композицией отображений $T_{\mu,\lambda}$ и $T_{\lambda,\nu} = T_{\nu,\lambda}^{-1}$. Непрерывная дифференцируемость $T_{\lambda,\nu}$ следует из теоремы об обратном отображении ввиду невырожденности $DT_{\nu,\lambda}$. Второе утверждение леммы доказывается аналогично с помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

§ 3. Оценки энтропии плотностей Радона–Никодима

Если вероятностная мера ν задана плотностью f относительно вероятностной меры μ и $f \log f \in L^1(\mu)$, где при $f(x) = 0$ считаем, что $f(x)\log f(x) = 0$, то положим

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) := \int f \log f \, d\mu.$$

Определитель Фредгольма–Карлемана $\det_2 A$ матрицы A задается равенством

$$\det_2 A = \exp(\mathrm{Tr}(I - A)) \det A,$$

где I – единичная матрица и Tr – матричный след. Через D и D^2 обозначим первую и вторую производные. Для положительной функции ψ на $\mathbb{R}^n$ класса C^2 и векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ введем оператор

$$\Lambda[\psi, v_1, v_2] = \int_0^1 s D^2[-\log\psi]((1-s)v_1 + s v_2)\, ds.$$

Теорема 3.1. *Пусть на $\mathbb{R}^n$ заданы вероятностная мера $\mu = \exp(-\Phi)\,dx$ и два инъективных локально липшицевых отображения T_f и T_g с $\mu \circ T_f^{-1} = f \cdot \mu$ и $\mu \circ T_g^{-1} = g \cdot \mu = \exp(-\Theta)\,dx$, причем $\Phi, \Theta \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $f > 0$ п.в. и $f \log(f/g) \in L^1(\mu)$. Пусть T_g обладает локально липшицевым обратным отображением T_g^{-1}, $T = (T_1, \ldots, T_n) := T_f \circ T_g^{-1}$, причем $\det DT > 0$ п.в. Предположим, что μ-интегрируемы функции*

$$\langle DT_f(x)(DT_g(x))^{-1} e_i, e_i\rangle, \tag{3.1}$$

$$\log\det[DT_f(x)(DT_g(x))^{-1}], \tag{3.2}$$

$$\partial_{x_i}\Theta(x)(T_i(x) - x_i) g(x) \tag{3.3}$$

или, что равносильно, $g \cdot \mu$-интегрируемы функции

$$\partial_{x_i} T_i, \quad \log\det DT, \quad \partial_{x_i}\Theta(x)(T_i(x) - x_i).$$

Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_{g\cdot\mu}\left(\frac{f}{g}\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Theta}, T_f, T_g](T_f - T_g), T_f - T_g\rangle\, d\mu \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \log\det{}_2[DT_f(DT_g)^{-1}]\, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \bigl\{\langle \Lambda[e^{-\Theta}, T(x), x](T(x)-x), T(x)-x\rangle \\ &\quad - \log\det{}_2 DT(x)\bigr\} g(x)\,\mu(dx). \end{aligned} \tag{3.4}$$

В частности, это верно, если $T_f = T_{\mu,\, f\cdot\mu}$ *и* $T_g = T_{\mu,\, g\cdot\mu}$ *– канонические треугольные отображения, удовлетворяющие указанным условиям интегрируемости. Кроме того, в этом случае* $\log\det_2 DT_f(DT_g)^{-1} \leqslant 0$.

Доказательство. Множество $T_f(\mathbb{R}^n)$ является борелевским в силу инъективности T_f, причем его дополнение имеет меру нуль ввиду эквивалентности меры $f\cdot\mu$ мере Лебега. Положим $S_g := T_g^{-1}$. Отображение T также локально липшицево. По формуле дифференцирования композиции

$$DT(x) = DT_f(S_g(x))DS_g(x) = DT_f(S_g(x))[DT_g(S_g(x))]^{-1} \quad \text{п.в.}$$

По формуле замены переменных для локально липшицевых отображений для всякой интегрируемой по Лебегу функции φ на $\mathbb{R}^n$ функция $\varphi\circ T\,\det DT$ также интегрируема и справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(T(x))\det DT(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,dy.$$

Поэтому для всякой ограниченной борелевской функции ψ на $\mathbb{R}^n$ с учетом равенства $f\cdot\mu = (g\cdot\mu)\circ T^{-1}$ получаем

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \psi(T(x))f(T(x))\exp[-\Phi(T(x))]\det DT(x)\,dx \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)f(y)\exp[-\Phi(y)]\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(T(x))g(x)\exp[-\Phi(x)]\,dx.\end{aligned}$$

Поскольку отображение T инъективно, то приходим к равенству

$$f(T(x))\exp[-\Phi(T(x))]\det DT(x) = g(x)\exp[-\Phi(x)] = \exp[-\Theta(x)] \quad \text{п.в.} \tag{3.5}$$

Логарифмируя (3.5), получаем

$$\log f(T(x)) - \Phi(T(x)) + \log\det DT(x) = -\Theta(x) \quad \text{п.в.} \tag{3.6}$$

Добавляя $(\Phi - \log g)(T(x)) = \Theta(T(x))$ к обеим частям, получаем

$$\log f(T(x)) - \log g(T(x)) = \Theta(T(x)) - \Theta(x) - \log\det DT(x) \quad \text{п.в.}$$

Применим тождество

$$\Psi(a)-\Psi(b)=\langle\nabla\Psi(b),a-b\rangle+\int_0^1 s\langle D^2\Psi((b-a)s+a)(b-a),b-a\rangle\,ds \tag{3.7}$$

к $\Psi=\Theta$ и $a=T(x)$, $b=x$. Получим почти всюду

$$\log f(T(x))-\log g(T(x))=\langle\nabla\Theta(x),T(x)-x\rangle \\ +\int_0^1 s\bigl\langle D^2\Theta(sx+(1-s)T(x))(x-T(x)),x-T(x)\bigr\rangle\,ds-\log\det DT(x). \tag{3.8}$$

Отметим, что левая часть (3.8) интегрируема по мере $g\cdot\mu$ в силу интегрируемости функции $f\log(f/g)$ по мере μ и равенства $(g\cdot\mu)\circ T^{-1}=f\cdot\mu$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^n}\log\frac{f(T(x))}{g(T(x))}\,g(x)\,\mu(dx)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\log\frac{f(x)}{g(x)}\,\mu(dx).$$

Первое и третье слагаемые в правой части (3.8) интегрируемы по мере $g\cdot\mu$ согласно предположению. Поэтому второе слагаемое в правой части (3.8) также интегрируемо относительно $g\cdot\mu$. Интегрируя (3.8) по мере $g\cdot\mu$, приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^n}\log\frac{f(T(x))}{g(T(x))}\,g(x)\,\mu(dx)=\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla\Theta(x),T(x)-x\rangle g(x)\,\mu(dx) \\ +\int_{\mathbb{R}^n}\biggl[\int_0^1 s\bigl\langle D^2\Theta(sx+(1-s)T(x))(x-T(x)),x-T(x)\bigr\rangle\,ds\biggr]g(x)\,\mu(dx) \\ -\int_{\mathbb{R}^n}\log\det\bigl\{DT_f(S_g(x))[DT_g(S_g(x))]^{-1}\bigr\}g(x)\,\mu(dx). \tag{3.9}$$

Поскольку $(g\cdot\mu)\circ S_g^{-1}=\mu$, то последний интеграл в правой части записывается как

$$\int_{\mathbb{R}^n}\log\det DT_f(x)(DT_g(x))^{-1}\,\mu(dx).$$

Заметим, что $-\nabla\Theta$ – логарифмический градиент функции $\varrho:=\exp(-\Theta)$, т.е. $-\nabla\Theta=\dfrac{\nabla\varrho}{\varrho}$. По условию функции $\dfrac{\partial_{x_i}\varrho(x)}{\varrho(x)}(T_i(x)-x_i)$ и $\partial_{x_i}T_i$ интегрируемы по мере $\varrho\,dx=g\cdot\mu$, так как интегрируемость функции

$$\partial_{x_i}T_i(x)=\langle DT(x)e_i,e_i\rangle=\bigl\langle DT_f(S_g(x))[DT_g(S_g(x))]^{-1}e_i,e_i\bigr\rangle$$

по мере $g\cdot\mu$ ввиду равенства $(g\cdot\mu)\circ S_g^{-1}=\mu$ вытекает из интегрируемости функции $\langle DT_f(x)(DT_g(x))^{-1}e_i,e_i\rangle$ по мере μ. Таким образом, первый интеграл в правой части (3.9) с помощью интегрирования по частям преобразуется в

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}(T_i(x)-x_i)\,g(x)\,\mu(dx)=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}T_i(x)\,g(x)\,\mu(dx)-n \\ =\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n\langle DT_f(x)(DT_g(x))^{-1}e_i,e_i\rangle\,\mu(dx)-n.$$

Законность интегрирования по частям при наших предположениях следует из [11; теорема 5.1.2]. Используя равенство $x = T_g(S_g(x))$ и еще раз делая замену переменных, приходим к тождеству

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f\log\frac{f}{g}\,d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Theta}, T_f, T_g](T_f - T_g), T_f - T_g\rangle\, d\mu \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \bigl(\mathrm{Tr}[DT_f(x)(DT_g(x))^{-1}] - n - \log\det[DT_f(x)(DT_g(x))^{-1}]\bigr)\,\mu(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Theta}, T_f, T_g](T_f - T_g), T_f - T_g\rangle\, d\mu \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \log\det{}_2[DT_f(x)(DT_g(x))^{-1}]\,d\mu.
\end{aligned}
$$

В случае, когда T_f и T_g являются каноническими треугольными отображениями, матрицы DT_f и DT_g оказываются нижнетреугольными, причем их диагональные элементы положительны. Этими двумя свойствами обладает и матрица $DT_f(DT_g)^{-1}$. Остается заметить, что если A – треугольная матрица с числами $\alpha_i > 0$ на диагонали, то $0 < \det_2 A \leqslant 1$, ибо $\alpha_i \exp(1-\alpha_i) \leqslant 1$.

В случае, когда $T_g(x) = x$, $g = 1$, приходим к следующему утверждению.

Следствие 3.2. *Пусть на $\mathbb{R}^n$ даны вероятностные меры $\mu = \exp(-\Phi)\,dx$ и $f\cdot\mu$, где $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $f > 0$ п.в. Пусть дано локально липшицево отображение $T = (T_1, \ldots, T_n)$, причем $\mu\circ T^{-1} = f\cdot\mu$ и $\det DT > 0$ п.в. Предположим, что функции*

$$
f\log f, \quad \langle DT(x)e_i, e_i\rangle, \quad \log\det DT(x), \quad \partial_{x_i}\Phi(x)(T_i(x) - x_i)
$$

интегрируемы относительно меры μ. Тогда

$$
\mathrm{Ent}_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Phi}, T(x), x](T(x) - x), T(x) - x\rangle\,\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}^n} \log\det{}_2 DT\,d\mu.
$$

В частности, это верно, если T – каноническое треугольное отображение, удовлетворяющее указанным условиям интегрируемости. Кроме того, в этом случае справедливо неравенство $\log\det_2 DT \leqslant 0$.

Замечание 3.3. Из доказательства теоремы очевидно, что условия регулярности функций Φ, Θ и отображений T_f и T_g могут быть ослаблены следующим образом: достаточно включений $T_i, g \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\Phi, \Theta \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и справедливости формулы (3.5). Сказанное относится и к следствию. Более того, те же рассуждения приводят к следующему общему результату.

Теорема 3.4. *Пусть меры $\mu = \exp(-\Phi)\,dx$, $f\cdot\mu$ и $g\cdot\mu = \exp(-\Theta)\,dx$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, а борелевские отображения T_f и T_g на $\mathbb{R}^n$ таковы, что $\mu\circ T_f^{-1} = f\cdot\mu$, $\mu\circ T_g^{-1} = g\cdot\mu$. Предположим, что существуют такие борелевское отображение $T = (T_1, \ldots, T_n)$ на $\mathbb{R}^n$ и почти всюду положительная измеримая функция J_T, что $T_f = T\circ T_g$ и почти всюду выполнено равенство*

$$
f(T(x))\exp[-\Phi(T(x))]J_T(x) = g(x)\exp[-\Phi(x)] = \exp[-\Theta(x)]. \tag{3.10}
$$

Кроме того, предположим, что функции $x_i \mapsto T_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ *абсолютно непрерывны на отрезках для почти всех* $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$, *причем*

$$\frac{f}{g}\log\frac{f}{g},\ \partial_{x_i}T_i,\ \log J_T,\ \partial_{x_i}\Theta(x)(T_i(x)-x_i) \in L^1(g\cdot\mu). \tag{3.11}$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathrm{Ent}_{g\cdot\mu}\left(\frac{f}{g}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Theta}, T(x), x](T(x)-x), T(x)-x\rangle\, g(x)\,\mu(dx)$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n} [\mathrm{div}\, T(x) - n - \log J_T(x)] g(x)\,\mu(dx),$$

где $\mathrm{div}\, T(x) := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}T_i(x)$.

В частности, это равенство справедливо, если $f>0$ *п.в.,* T_f *и* T_g *– канонические треугольные отображения и выполнено условие* (3.11).

Замечание 3.5. Условия, наложенные на отображения T_f и T_g и меры $f\cdot\mu$ и $g\cdot\mu$, не являются независимыми, однако в сформулированном виде они более удобны для последующих применений. В случае, когда $g=1$ и $T_g=I$, следующее условие на отображение T_f достаточно для справедливости формулы (3.5): T_f входит в класс Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, обратимо, обладает свойством Лузина (N) и $\det DT(x)>0$ п.в. (см. [20]). Например, если $T_f\in W^{p,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, где $p>n$, то достаточно обратимости непрерывной версии T_f и $\det DT(x)>0$ п.в.

Замечание 3.6. (i) Все условия интегрируемости, наложенные в теореме 3.1, выполнены, если отображения T_f и T_g совпадают с тождественным вне некоторого компакта.

(ii) Условия интегрируемости функций (3.1)–(3.3) выполнены, если известна интегрируемость функции $|\nabla\Theta|g$ относительно меры μ, а функция $T_k(x)-x_k$ при каждом $k=1,\dots,n$ имеет вид $\theta_k(x_1,\dots,x_k)$, где функция θ_k на $\mathbb{R}^k$ имеет компактный носитель. Действительно, в этом случае функции $\partial_{x_i}T_i$, $\log\det DT = \sum_{i=1}^n \log\partial_{x_i}T_i$ и $T_i(x)-x_i=\theta_i$ ограничены, ибо функции θ_i и $\partial_{x_i}\theta_i$ ограничены, а функция $\partial_{x_i}T_i = 1+\partial_{x_i}\theta_i$ отделена от нуля ввиду того, что она не обращается в нуль и равна 1 для всех точек x, проекция которых на $\mathbb{R}^k$ не попадает в некоторый компакт.

(iii) В случае, когда $T_g(x)=x$, $g=1$ и $F(x):=T_f(x)-x$, достаточным условием интегрируемости функций (3.1)–(3.3) является μ-интегрируемость функции

$$|\nabla\Phi(x)|\,|F(x)| + \|DT_f(x)\| + |\log\det DT_f(x)|.$$

Например, это условие выполнено, если мера μ имеет все моменты, выполнена оценка

$$\|DT_f(x)\| + |\nabla\Phi(x)| \leqslant c_1 + c_2|x|^k,$$

а функция $\det DT_f(x)$ отделена от нуля.

Замечание 3.7. Если функция $|T(x)-x|g(x)$ интегрируема относительно μ, что равносильно μ-интегрируемости $|T_f(x)-T_g(x)|$, то вместо μ-интегрируемости каждой из функций $\langle DT_f(x)(DT_g(x))^{-1}e_i, e_i\rangle$ в (3.1) достаточно иметь μ-интегрируемость их суммы, равной $\mathrm{Tr}[DT_f(x)(DT_g(x))^{-1}]$. Иначе говоря, вместо $g\cdot\mu$-интегрируемости функций $\partial_{x_i}T_i$ достаточно потребовать интегрируемость их суммы $\operatorname{div} T$. Для этого при обосновании равенства

$$\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla\varrho(x), T(x)-x\rangle\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n}\operatorname{div} T(x)\,\varrho(x)\,dx + n$$

с $\varrho=\exp(-\Theta)$ вместо ϱ подставляем $\zeta\varrho$, где $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n}\zeta(x)\langle\nabla\varrho(x), T(x)-x\rangle\,dx + \int\langle\nabla\zeta(x), T(x)-x\rangle\varrho(x)\,dx$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^n}\operatorname{div} T(x)\,\zeta(x)\varrho(x)\,dx + n\int_{\mathbb{R}^n}\zeta(x)\varrho(x)\,dx.$$

Теперь остается взять последовательность функций $\zeta_k\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что $0\leqslant\zeta_k\leqslant 1$, $\zeta_k(x)=1$ при $|x|\leqslant k$ и $|\nabla\zeta_k(x)|\leqslant M<\infty$ для некоторого числа M, не зависящего от k. При этом второй интеграл в левой части будет стремиться к нулю ввиду теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Для $n=1$ и $g=1$ доказанное равенство (естественно, без следов и определителей) присутствует в рассуждениях [3], а в [8] близкие соображения с использованием формулы Тейлора применяются при выводе неравенства для некоторых оптимальных отображений. В многомерном случае равенство такого типа в более специальной ситуации впервые было получено в работе [15]. Найденное нами точное равенство может служить источником различных функциональных неравенств, что будет продемонстрировано ниже.

Приведем модификацию теоремы 3.1, наложив несколько иные условия. Пусть, как и выше, даны три вероятностные меры $\mu=\exp(-\Phi)\,dx$, $g\cdot\mu=\exp(-\Theta)\,dx$ и $f\cdot\mu$ на $\mathbb{R}^n$ и отображения $T_f, T_g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, переводящие меру μ в $g\cdot\mu$ и $f\cdot\mu$ соответственно. Предположим, что существует такое борелевское отображение $T=(T_1,\dots,T_n)$, что $T_f=T\circ T_g$.

Теорема 3.8. (i) *Пусть $T\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, причем справедлива формула* (3.5). *Предположим, что меры $f\cdot\mu$ и $g\cdot\mu$ обладают конечными вторыми моментами, $|\nabla\Theta|\in L^2_{\mathrm{loc}}(g\cdot\mu)$ и величина $\mathrm{Ent}_{g\cdot\mu}(f/g)$ конечна. Пусть $\det DT\geqslant 0$ и $D^2\Theta\geqslant C\cdot I$, $C\in\mathbb{R}$, причем существует такая функция $w\in L^1(g\cdot\mu)$, что $-\log\det_2 DT\geqslant w$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{Ent}_{g\cdot\mu}\left(\frac{f}{g}\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\langle\Lambda[e^{-\Theta}, T_f, T_g](T_f-T_g), T_f-T_g\rangle\,d\mu-\int_{\mathbb{R}^n}\log\det_2 DT\,g\,d\mu.$$

(ii) *Пусть T является каноническим треугольным отображением. Тогда для справедливости указанного равенства, в котором по определению полагаем*

$$\det_2 DT := \prod_{i=1}^n\exp(1-\partial_{x_i}T_i)\partial_{x_i}T_i,$$

достаточно лишь выполнения следующих условий: $f>0$ п.в., меры $f\cdot\mu$ и $g\cdot\mu$ обладают конечными вторыми моментами, имеют место включения $|\nabla\Theta|\in L^2_{\mathrm{loc}}(g\cdot\mu)$, $(f/g)\log(f/g)\in L^1(g\cdot\mu)$ и $D^2\Theta\geqslant C\cdot I$, где $C\in\mathbb{R}$.

Доказательство. (i) Поскольку $\log\det DT$ можно выразить через логарифм определителя Фредгольма–Карлемана матрицы DT посредством равенства

$$\log\det DT = \log\det{}_2 DT - \mathrm{Tr}(I - DT),$$

то, как и в доказательстве предыдущей теоремы, получаем формулу

$$\begin{aligned}&\log f(T(x)) - \log g(T(x)) - \langle\nabla\Theta(x), T(x) - x\rangle + \mathrm{Tr}(DT(x) - I)\\&\quad= \int_0^1 s\big\langle D^2\Theta(sx + (1-s)T(x))(x - T(x)), x - T(x)\big\rangle\,ds - \log\det{}_2 DT(x).\end{aligned}$$

Заметим, что функции, стоящие в левой части, локально интегрируемы по мере $g\cdot\mu$. Действительно, интегрируемость функции $\log f(T(x)) - \log g(T(x))$ ввиду формулы замены переменных следует из интегрируемости $f\log(f/g)$ по мере μ. Положим $F(x) := T(x) - x$. Существование конечных вторых моментов мер $f\cdot\mu$ и $g\cdot\mu$ означает μ-интегрируемость функций $x^2 g$ и $|T|^2 g$, ибо $(g\cdot\mu)\circ T^{-1} = f\cdot\mu$. Итак, $|F| \in L^2(g\cdot\mu)$. С учетом того, что $\nabla\Theta \in L^2_{\mathrm{loc}}(g\cdot\mu)$, неравенство Гёльдера дает локальную $g\cdot\mu$-интегрируемость функции $\langle\nabla\Theta, F\rangle$. Зафиксируем неотрицательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Интегрируя указанную формулу по мере $\varphi g\cdot\mu$, получаем

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\log\frac{f(T)}{g(T)}\,\varphi g\,d\mu - \int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla\Theta, F\rangle\varphi g\,d\mu + \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{Tr}(DF)\varphi g\,d\mu\\&\qquad= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^1 s\langle D^2\Theta(x + (1-s)F(x))(F(x)), F(x)\rangle\,ds\right]\varphi(x)g(x)\,\mu(dx)\\&\qquad\quad - \int_{\mathbb{R}^n}\log\det{}_2 DT\varphi g\,d\mu.\end{aligned}$$

Разбиение интеграла в правой части на сумму двух интегралов возможно, так как обе подынтегральные функции оцениваются снизу интегрируемыми функциями. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\log\frac{f(T)}{g(T)}\,\varphi g\,d\mu - \int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla\varphi, F\rangle g\,d\mu\\&\qquad= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^1 s\langle D^2\Theta(x + (1-s)F(x))(F(x)), F(x)\rangle\,ds\right]\varphi(x)g(x)\,\mu(dx)\\&\qquad\quad - \int_{\mathbb{R}^n}\log\det{}_2 DT\varphi g\,d\mu.\end{aligned}$$

Возьмем такую последовательность функций $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$ и равномерно ограниченными градиентами, что $\varphi_j(x) = 1$ при $|x| \leqslant j$. Используя, что

$$\langle D^2\Theta(x + (1-s)F(x))(F(x)), F(x)\rangle \geqslant C|F(x)|^2$$

и $-\log\det_2 DT \geqslant w$, где функции $|F|^2 g$ и wg интегрируемы относительно μ, заключаем по теореме Фату, что функции $\log\det_2 DT$ и

$$\int_0^1 s\langle D^2\Theta(x + (1-s)F(x))(F(x)), F(x)\rangle\,ds$$

интегрируемы относительно меры $g \cdot \mu$ и что в последнем равенстве можно положить $\varphi = 1$. После замены переменных это дает

$$\int_{\mathbb{R}^n} \log\frac{f}{g}\, f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Theta}, T_f, T_g](T_f - T_g), T_f - T_g\rangle\, d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} \log \det{}_2 DTg\, d\mu.$$

Утверждение (i) доказано. Утверждение (ii) легко усмотреть из приведенных выше рассуждений, поскольку формула (3.5) верна в силу доказанного выше, $\det DT \geqslant 0$, $\det_2 DT \leqslant 1$, причем функции $x_i \mapsto T_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i)$ абсолютно непрерывны на отрезках.

Будем говорить, что вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^n$ с дважды дифференцируемой плотностью $\exp(-\Phi)$ является *равномерно выпуклой с константой* $C > 0$, если

$$D^2\Phi(x) \geqslant C \cdot I.$$

Следствие 3.9. *Если в теореме* 3.8 *мера* $g \cdot \mu$ *равномерно выпукла с константой* C, *то для канонических треугольных отображений* T_f *и* T_g *имеем*

$$\mathrm{Ent}_{g\cdot\mu}\left(\frac{f}{g}\right) \geqslant \frac{C}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |T_f(x) - T_g(x)|^2\, \mu(dx).$$

Доказательство. Ввиду оценки $D^2\Theta \geqslant C \cdot I$ получаем

$$\int_0^1 s\langle D^2\Theta((1-s)T_f + sT_g)(v), v\rangle\, ds \geqslant \frac{C}{2}\,|v|^2$$

для всякого вектора v.

Следствие 3.10. *Предположим, что вероятностная мера* μ *на* $\mathbb{R}^n$ *является равномерно выпуклой с константой* C *(например, пусть* μ *– стандартная гауссовская мера). Пусть* ν *– абсолютно непрерывная вероятностная мера на* $\mathbb{R}^n$, *причем для* $f := d\nu/d\mu$ *имеем* $f \log f \in L^1(\mu)$. *Тогда для канонического треугольного отображения* $T_{\mu,\nu}$ *имеем*

$$\int |x - T_{\mu,\nu}(x)|^2\, \mu(dx) \leqslant \frac{2}{C}\int f(x)\log f(x)\, \mu(dx). \tag{3.12}$$

В случае стандартной гауссовской меры $C = 1$.

Доказательство. Найдем последовательность таких гладких функций f_j, сходящихся п.в. к f, что меры $\nu_j := f_j \cdot \mu$ являются вероятностными, $f_j = 1$ вне некоторого куба K_j, причем величины $\mathrm{Ent}_\mu(f_j)$ сходятся к $\mathrm{Ent}_\mu(f)$. Для этого сначала найдем такую положительную выпуклую функцию θ на $\mathbb{R}$, что функция $\theta(|f \log f|)$ интегрируема относительно μ. Нетрудно проверить, что существует последовательность таких неотрицательных гладких функций f_j, сходящаяся п.в. к f, что $f_j = 1$ вне некоторого куба K_j, $\int_{\mathbb{R}^n} f_j\, d\mu = 1$, причем величины $\int \theta(|f_j \log f_j|)\, d\mu$ равномерно ограничены. В силу равномерной интегрируемости функций $f_j \log f_j$

их интегралы сходятся к интегралу от $f \log f$. Из определения равномерной выпуклости вытекает, что мера μ эквивалентна мере Лебега. По построению имеем сходимость вероятностных плотностей f_j в $L^1(\mu)$, т.е. сходимость по вариации мер ν_j. Тогда по теореме 2.2 последовательность канонических треугольных отображений T_{μ,ν_j} сходится по мере μ к отображению $T_{\mu,\nu}$. Предположим, что для отображений T_{μ,ν_j} оценка (3.12) известна. Тогда по теореме Фату она выполняется и для $T_{\mu,\nu}$. Итак, наше утверждение сводится к случаю, когда функция f является гладкой и совпадает с 1 вне некоторого куба. Положим $T := T_{\mu,\nu}$. В силу выпуклости мера μ имеет конечный второй момент. Поэтому мера $f \cdot \mu$ также имеет конечный второй момент, что дает μ-интегрируемость функции $|T|^2$. Функция $|\nabla\Theta|$ локально ограничена ввиду выпуклости Θ. Таким образом, применимо утверждение (ii) предыдущей теоремы.

§ 4. Некоторые применения треугольных преобразований

Здесь мы обсудим применения полученных выше результатов к мерам на счетном произведении прямых и к обобщенным логарифмическим неравенствам Соболева.

Теорема 4.1. *Пусть μ – произведение счетного числа экземпляров вероятностной меры σ на прямой, равномерно выпуклой с константой C (например, невырожденной гауссовской меры), рассматриваемое на пространстве $\mathbb{R}^\infty$ всех вещественных последовательностей, и пусть ν – борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^\infty$, абсолютно непрерывная относительно μ. Тогда существует такое борелевское треугольное отображение $T\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, что $T(x) = x + F(x)$, где $F\colon \mathbb{R}^\infty \to l^2$ и $\nu = \mu \circ T^{-1}$. Если при этом для $f := d\nu/d\mu$ имеем $f \log f \in L^1(\mu)$, то*

$$\int |F(x)|_{l^2}^2 \, \mu(dx) \leqslant \frac{2}{C} \int f(x) \log f(x) \, \mu(dx). \tag{4.1}$$

Доказательство. Сначала предположим, что $f \log f \in L^1(\mu)$. Обозначим через ν_n проекцию ν на пространство $\mathbb{R}^n$. Ясно, что $\nu_n = f_n \cdot \mu_n$, где μ_n – произведение n экземпляров меры σ и $f_n \in L^1(\mu_n)$. В самом деле, для всякого борелевского множества A в $\mathbb{R}^n$ имеем

$$\nu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^\infty} I_A f \, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^\infty} I_A \mathsf{E}_\mu^{\mathscr{B}_n} f \, \mu(dx) = \int_A \mathsf{E}_\mu^{\mathscr{B}_n} f \, \mu_n(dx) = \int_A f_n \, \mu_n(dx),$$

где $\mathsf{E}_\mu^{\mathscr{B}_n} f$ является условным математическим ожиданием f относительно σ-алгебры $\mathscr{B}_n$, порожденной первыми n координатными функциями. Итак, $f_n = \mathsf{E}_\mu^{\mathscr{B}_n} f$. Так как функция $x \log x$ выпукла, то в силу неравенства Йенсена для условных математических ожиданий имеем равномерную ограниченность интегралов

$$\int f_n \log f_n \, d\mu_n.$$

Возьмем каноническое треугольное отображение $T_n = (T_n^1, \dots, T_n^n)$ в $\mathbb{R}^n$, переводящее μ_n в ν_n. В силу единственности канонического отображения T_n совпадает с $(T^1_{n+1},\dots,T^n_{n+1})$, т.е. $T^k_n = T^k_m$ при $n,m \geqslant k$. Таким образом, получаем функции $T^1 = T^1_1,\ T^2 = T^2_2,\dots,T^n = T^n_n,\dots$, задающие борелевское треугольное отображение T. Для всякого цилиндрического борелевского множества B с основанием B_n в $\mathbb{R}^n$ имеем

$$\mu\circ T^{-1}(B) = \mu_n(T_n^{-1}(B_n)) = \nu_n(B_n) = \nu(B).$$

Следовательно, $\mu\circ T^{-1} = \nu$. Из равномерной ограниченности интегралов от $|x - T_n(x)|^2$ по мере μ (вытекающей из следствия 3.9) и теоремы Фату следует, что $F(x) := T(x) - x \in l^2$ для μ-п.в. x и справедлива оценка (4.1). На борелевском множестве $F^{-1}(\mathbb{R}^\infty \setminus l^2)$ нулевой μ-меры переопределим F нулем.

В общем случае рассмотрим разбиение $\mathbb{R}^\infty$ на дизъюнктные множества E_n положительной μ-меры, на каждом из которых функция f ограничена. Для этого среди множеств $\{k \leqslant f < k+1\}$ выберем все множества ненулевой μ-меры. Разделим вещественную прямую на промежутки D_n с $\mu_1(D_n) = \nu(E_n)$. Меру $I_{D_n}\cdot\mu_1$ с помощью возрастающего отображения Ψ_n на интервале преобразуем в меру $\nu(E_n)\mu_1$. Представим μ в виде $\mu = \mu_1\otimes\mu'$, где μ' – произведение счетного числа экземпляров σ, соответствующих координатам $x_2, x_3, \dots$. Тогда отображение $x\mapsto(\Psi_n(x_1), x_2, x_3,\dots)$ переводит меру $(I_{D_n}\cdot\mu_1)\otimes\mu'$ в $\nu(E_n)\mu$. В силу доказанного выше найдется треугольное отображение Λ_n с $\Lambda_n(x) - x\in l^2$, переводящее меру $\nu(E_n)\mu$ в меру $I_{E_n}\cdot\nu$. Следовательно, получаем треугольное отображение T, переводящее меру $\mu = \sum_{n=1}^\infty (I_{D_n}\cdot\mu_1)\otimes\mu'$ в меру $\sum_{n=1}^\infty I_{E_n}\cdot\nu = \nu$. На $D_n\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\times\cdots$ отображение T равно композиции Ψ_n и Λ_n. Так как Ψ_n имеет указанный выше вид, то $x - T(x)\in l^2$.

Следствие 4.2. *Пусть γ – центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X, H – пространство Камерона–Мартина меры γ, $\{e_n\}$ – ортонормированный базис в H и $\widehat{e}_n$ – соответствующие измеримые линейные функционалы* (см. [11; гл. 2]). *Тогда для всякой вероятностной меры ν, абсолютно непрерывной относительно меры γ, существует такое борелевское отображение $T\colon X\to X$ вида $T(x) = x + F(x)$, где $F\colon X\to H$, что $\nu = \gamma\circ T^{-1}$, причем T треугольно относительно $\{e_n\}$, т.е. $\widehat{e}_n\circ T$ представляет собой борелевскую функцию от $\widehat{e}_1,\dots,\widehat{e}_n$. Иначе говоря, $(F(x), e_n)_H = \varphi_n(\widehat{e}_1(x),\dots,\widehat{e}_n(x))$, где φ_n – борелевская функция на $\mathbb{R}^n$. Наконец, если для $f := d\nu/d\gamma$ имеем $f\log f\in L^1(\gamma)$, то*

$$\int |F(x)|_H^2\,\gamma(dx) \leqslant 2\int f(x)\log f(x)\,\gamma(dx).$$

Доказанный результат означает, что всякая абсолютно непрерывная относительно γ вероятностная мера является представимой в смысле определения 2.7.1 в [12]. Остается невыясненным, можно ли преобразовать γ во всякую абсолютно непрерывную вероятностную меру ν возрастающим треугольным отображением или монотонным отображением рассмотренного в [9] типа, если не налагать на f дополнительных условий.

Использованный выше метод применим для доказательства некоторых обобщений логарифмического неравенства Соболева (ср. [8], [7]).

Предложение 4.3. *Пусть на* $\mathbb{R}^n$ *заданы вероятностные меры*

$$\mu = \exp(-\Phi)\,dx, \quad f\cdot\mu, \quad g\cdot\mu,$$

где $f>0$, $g>0$, Φ *– функции класса* C^2 *на* $\mathbb{R}^n$ *и* $f\log f, g\log g \in L^1(\mu)$. *Пусть даны канонические треугольные локально липшицевы отображения* T_f *и* T_g, *где* T_g *имеет обратное локально липшицево отображение* T_g^{-1}, *причем* $\mu\circ T_f^{-1} = f\cdot\mu$ *и* $\mu\circ T_g^{-1} = g\cdot\mu$. *Пусть* $T=(T_1,\ldots,T_n):=T_f\circ T_g^{-1}$. *Предположим, что* $g\cdot\mu$*-интегрируемы функции*

$$\partial_{x_i}T_i, \quad \log\det DT, \quad \partial_{x_i}\Phi(x)(T_i(x)-x_i), \quad \partial_{x_i}g(x)(T_i(x)-x_i).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(f\log f - g\log g)\,d\mu \geqslant \int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla g(T_g), T_f - T_g\rangle\,\frac{1}{g(T_g)}\,d\mu \\ + \int_{\mathbb{R}^n}\langle\Lambda[e^{-\Phi},T_f,T_g](T_f-T_g),T_f-T_g\rangle\,d\mu.\end{aligned}$$

В частности, для $f=1$ *получаем, что* $T=T_g^{-1}$ *и*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g\log g\,d\mu \leqslant -\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla g(x), T(x)-x\rangle\,\mu(dx) \\ -\int_{\mathbb{R}^n}\langle\Lambda[e^{-\Phi},T(x),x](T(x)-x),T(x)-x\rangle\,g(x)\,\mu(dx). \quad (4.2)\end{aligned}$$

Доказательство. Положим $T:=T_f\circ T_g^{-1}$. Поскольку отображения T_f и T_g являются каноническими, то $\det DT>0$. Кроме того, из определения T вытекает, что $f\cdot\mu=(g\cdot\mu)\circ T^{-1}$. Следовательно, для T выполняется равенство (3.6). Добавляя и вычитая $\langle\nabla\Phi(x),T(x)-x\rangle$ из правой части (3.6) и интегрируя полученную формулу по мере $g\cdot\mu$, получаем соотношение

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(f\log f-g\log g)\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla\Phi(x),T(x)-x\rangle g(x)\,\mu(dx) \\ +\int_{\mathbb{R}^n}\big[\Phi(T(x))-\Phi(x)-\langle\nabla\Phi(x),T(x)-x\rangle\big]g(x)\,\mu(dx) \\ -\int_{\mathbb{R}^n}\log\det DT(x)g(x)\,\mu(dx).\end{aligned}$$

Преобразуем первый интеграл в правой части следующим образом:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla\Phi(x),T(x)-x\rangle g(x)\,\mu(dx) = -\int_{\mathbb{R}^n}\langle g(x)\nabla e^{-\Phi(x)},T(x)-x\rangle\,dx \\ = -\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla(g(x)e^{-\Phi(x)}),T(x)-x\rangle\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\langle e^{-\Phi(x)}\nabla g(x),T(x)-x\rangle\,dx.\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, что возможно при наложенных условиях согласно [11; теорема 5.1.2], приходим к равенству

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla (g(x) e^{-\Phi(x)}), T(x) - x\rangle\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{Tr} DT - n) g\, d\mu.$$

Воспользовавшись тождеством (3.7) для $a = T(x)$ и $b = x$, получим

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \bigl[\Phi(T(x)) - \Phi(x) - \langle \nabla\Phi(x), T(x) - x\rangle\bigr] g(x)\,\mu(dx)\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \biggl[\int_0^1 s\bigl\langle D^2\Phi(sx + (1-s)T(x))(x - T(x)), x - T(x)\bigr\rangle\, ds\biggr] g(x)\,\mu(dx)\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \bigl\langle \Lambda[e^{-\Phi}, T(x), x](T(x) - x), T(x) - x\bigr\rangle g(x)\,\mu(dx)\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Phi}, T_f, T_g](T_f - T_g), T_f - T_g\rangle\, d\mu.
\end{aligned}$$

Используя доказанные равенства, после замены переменных приходим к окончательному соотношению

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f\log f - g\log g)\, d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla g(T_g), T_f - T_g\rangle \frac{1}{g(T_g)}\, d\mu\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Phi}, T_f, T_g](T_f - T_g), T_f - T_g\rangle\, d\mu\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{Tr} DT - n - \log\det DT) g\, d\mu.
\end{aligned}$$

Как уже было показано выше,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{Tr} DT - n - \log\det DT) g\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \log \det\nolimits_2 [DT_f (DT_g)^{-1}]\, d\mu.$$

Так как для треугольных канонических отображений $0 < \det_2[DT_f(DT_g)^{-1}] \leqslant 1$, то интеграл в левой части равенства неотрицателен. Предложение доказано.

Теорема 4.4. *Пусть μ – вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$ с плотностью вида $e^{-\Phi}$, где Φ – гладкая выпуклая функция с невырожденной второй производной. Пусть ψ – такая гладкая положительная функция, что $\psi^2 \cdot \mu$ – вероятностная мера, и пусть T – каноническое треугольное отображение, переводящее $\psi^2 \cdot \mu$ в μ. Тогда*

$$\operatorname{Ent}_\mu(\psi^2) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Phi}, T(x), x]^{-1}(\nabla\psi(x)), \nabla\psi(x)\rangle\, \mu(dx). \tag{4.3}$$

Доказательство. Положим $g := \psi^2$. Применив неравенство (4.2), получим

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g\log g\,d\mu \leqslant &- \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla g(x), T(x)-x\rangle\,\mu(dx) \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Lambda[e^{-\Phi}, T(x), x](T(x)-x), T(x)-x\rangle g(x)\,\mu(dx) \\
= &- \int_{\mathbb{R}^n} \biggl|\Lambda[e^{-\Phi}, T(x), x]^{1/2}(T(x)-x) \\
&+ \frac{1}{2}\Lambda[e^{-\Phi}, T(x), x]^{-1/2}\biggl(\frac{\nabla g(x)}{g(x)}\biggr)\biggr|^2 g(x)\,\mu(dx) \\
&+ \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} \biggl\langle \Lambda[e^{-\Phi}, T, x]^{-1}(\nabla g(x)), \frac{\nabla g(x)}{g(x)}\biggr\rangle\,\mu(dx) \\
\leqslant &\ \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} \biggl\langle \Lambda[e^{-\Phi}, T(x), x]^{-1}(\nabla g(x)), \frac{\nabla g(x)}{g(x)}\biggr\rangle\,\mu(dx).
\end{aligned}$$

Возвращаясь к ψ, приходим к оценке (4.3).

Следствие 4.5. *Пусть* $\mu = \exp\bigl[-V\bigl(\sum_{i=1}^n p_i(x_i)\bigr)\bigr]$ *– вероятностная мера на* $\mathbb{R}^n$, *где* V *и* p_i *– гладкие четные выпуклые функции на прямой,* $p_i \geqslant 0$, *причем* V, p_i *и* p_i'' *возрастают на полуоси. Пусть* ψ *– гладкая функция на* $\mathbb{R}^n$, *инвариантная относительно всех преобразований вида* $(x_1,\dots,x_n)\mapsto(\pm x_1,\dots,\pm x_n)$, *причем* $\displaystyle\int \psi^2\,d\mu = 1$. *Тогда*

$$\mathrm{Ent}_\mu(\psi^2) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \langle A\nabla\psi, \nabla\psi\rangle\,d\mu,$$

где $A(x)$ *– диагональная матрица с числами*

$$\biggl[\int_0^1 sV'\biggl(\sum_{i=1}^n p_i(sx_i)\biggr)p_k''(sx_k)\,ds\biggr]^{-1}, \qquad k=1,\dots,n,$$

на диагонали.

Доказательство. Рассмотрим вероятностную меру $\psi^2\cdot\mu$. Пусть

$$\Phi = V\biggl(\sum_{i=1}^n p_i(x_i)\biggr).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j} = V''\biggl(\sum_{k=1}^n p_k(x_k)\biggr)\frac{\partial p_i}{\partial x_i}\,\frac{\partial p_j}{\partial x_j} + V'\biggl(\sum_{k=1}^n p_k(x_k)\biggr)p_i''(x_i)\delta_{ij}.$$

Ясно, что

$$D^2\Phi \geqslant V'\biggl(\sum_{i=1}^n p_i(x_i)\biggr)\,\mathrm{diag}\{p_1''(x_1),\dots,p_n''(x_n)\}.$$

Из инвариантности ψ относительно преобразований указанного вида следует, что треугольное отображение $T = (T_1(x_1), T_2(x_1, x_2), \ldots, T_n(x_1, \ldots, x_n))$, переводящее меру $\psi^2 \cdot \mu$ в меру μ, обладает следующим свойством: $T_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i) = -T_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i)$. Так как функции p_i и p_i'' возрастают на полуоси, то получаем

$$p_i((1-s)T_i(x) + sx_i) \geqslant p_i(sx_i), \qquad p_i''((1-s)T_i(x) + sx_i) \geqslant p_i''(sx_i).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}((1-s)T(x) + sx) \geqslant V'\biggl(\sum_{i=1}^n p_i(sx_i)\biggr) p_i''(sx_i)\delta_{ij}.$$

Поскольку $A(x)$ – диагональная матрица с числами

$$\biggl[\int_0^1 sV'\biggl(\sum_{i=1}^n p_i(sx_i)\biggr) p_k''(sx_k)\,ds\biggr]^{-1}$$

на диагонали, то

$$\int_0^1 sD^2\biggl[V\biggl(\sum_{i=1}^n p_i(x_i)\biggr)\biggr]((1-s)T(x) + sx)\,ds \geqslant A(x)^{-1}.$$

Итак, $\Lambda\bigl[\exp\bigl(-V\bigl(\sum_{i=1}^n p_i(x_i)\bigr)\bigr), T(x), x\bigr]^{-1} \leqslant A(x)$ и наше утверждение вытекает из предыдущей теоремы.

Ряд других результатов, примыкающих к этой работе, получен в работах [21], [22], где рассмотрен бесконечномерный случай, в частности преобразования равномерно выпуклых и гауссовских мер на бесконечномерных пространствах, и в работе [23], где изучаются отображения градиентного типа.

Список литературы

1. *Knote H.* Contributions to the theory of convex bodies // Michigan Math. J. 1957. V. 4. P. 39–52.
2. *Bobkov S. G.* Large deviations via transference plans // Advances in Math. Research. V. 2. New York: Nova Sci. Publ., 2003. P. 151–175.
3. *Talagrand M.* Transportation cost for Gaussian and other product measures // Geom. Funct. Anal. 1996. V. 6. P. 587–600.
4. *Brenier Y.* Polar factorization and monotone rearrangement of vector valued functions // Comm. Pure Appl. Math. 1991. V. 44. P. 375–417.
5. *McCann R. J.* Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps // Duke Math. J. 1995. V. 80. P. 309–323.
6. *Villani C.* Topics in optimal transportation. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003.
7. *Otto F., Villani C.* Generalization of an inequality by Talagrand, and links with the logarithmic Sobolev inequality // J. Funct. Anal. 2000. V. 173. P. 361–400.
8. *Cordero-Erausquin D.* Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities // Arch. Ration. Mech. Anal. 2002. V. 161. P. 257–269.
9. *Feyel D., Üstünel A. S.* Transport of measures on Wiener space and the Girsanov theorem // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2002. V. 334. №1. P. 1025–1028.
10. *Feyel D., Üstünel A. S.* Monge–Kantorovitch measure transportation and Monge–Ampère equation on Wiener space // Probab. Theory Related Fields. 2004. V. 128. №3. P. 347–385.

11. *Богачев В.И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997.
12. *Üstünel A.S., Zakai M.* Transformation of measure on Wiener space. Berlin: Springer, 2000.
13. *Fernique X.* Extension du théorème de Cameron–Martin aux translations aléatoires // Ann. Probab. 2003. V. 31. №3. P. 1296–1304.
14. *Богачев В.И., Колесников А.В., Медведев К.В.* О треугольных преобразованиях мер // Докл. РАН. 2004. Т. 396. №6. С. 438–442.
15. *Колесников А.В.* Неравенства выпуклости и нелинейные преобразования мер // Докл. РАН. 2004. Т. 396. №3. С. 300–304.
16. *Богачев В.И.* Основы теории меры. Т. 1, 2. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
17. *Kechris A.* Classical descriptive set theory. Berlin: Springer, 1995.
18. *Александрова Д.Е.* Сходимость треугольных преобразований мер // Теория вероятностей и ее прим. 2005. Т. 50. №1.
19. *Rachev S.T., Rüschendorf L.* Mass transportation problems. V. I. New York: Springer-Verlag, 1998.
20. *Hajłasz P.* Change of variables formula under minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64. №1. P. 93–101.
21. *Богачев В.И., Колесников А.В.* Нелинейные преобразования выпуклых мер и энтропия плотностей Радона–Никодима // Докл. РАН. 2004. Т. 397. №2. С. 155–159.
22. *Богачев В.И., Колесников А.В.* О нелинейных преобразованиях выпуклых мер // Теория вероятностей и ее прим. 2005. V. 50. №1.
23. *Kolesnikov A.V.* Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures // J. Math. Pures Appl. (9). 2004. V. 83. P. 1373–1404.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
27.05.2004