

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ РЕЖИМОВ ДИНАМИКИ ВАЛЮТНОГО КУРСА ДОЛЛАР—ЕВРО: ПОДХОД НА ОСНОВЕ РЕКОНСТРУКЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### Постановка задачи

В современной международной экономике существует ряд так называемых «загадок» — эмпирических фактов, не согласующихся с принятыми теориями<sup>1</sup>. Немало таких «загадок» связано с валютным рынком, точнее — с формированием валютного курса. В последние десятилетия ученые пытаются решить «загадку отрыва валютного курса» (*exchange rate disconnect puzzle*), заключающуюся в неспособности макроэкономических переменных, которые, казалось бы, должны объяснять динамику валютного курса, достоверно предсказывать его изменение.

Результаты исследований прогнозируемости валютного курса на основе структурных макроэкономических моделей неоднозначны. Авторы первых работ пришли к выводу о непрогнозируемости обменного курса в краткосрочном периоде<sup>2</sup>, затем были получены свидетельства его прогнозируемости в долгосрочном, но не в краткосрочном периоде<sup>3</sup>, позднее было высказано мнение об абсолютной непрогнозируемости курса на любых горизонтах<sup>4</sup>.

Вместе с тем в некоторых работах показано, что существенную роль в курсообразовании важнейших валютных пар должны играть ключевые процентные ставки центральных банков. В работе Т. Молодцовой и др.<sup>5</sup> поведение валютного курса предлагается объяснять на основе правил Тейлора, предполагая частичное выполнение паритета процентных ставок, то есть наличие зависимости между ставками (которыми управляют банки) и будущим изменением кур-

---

<sup>1</sup> *Obstfeld M., Rogoff K.* The Six Major Puzzles in International Macroeconomics: Is There a Common Cause? // NBER Macroeconomics Annual. Cambridge, 2000. P. 339–390.

<sup>2</sup> *Meese R., Rogoff K.* Empirical Exchange Rate Models of the Seventies: Do They Fit out of Sample? // Journal of International Economics. 1983. Vol. 14, No 1/2. P. 3–24; *Meese R., Rogoff K.* The Out-of-Sample Failure of Empirical Exchange Rate Models: Sampling Error or Misspecification? // Exchange Rates and International Macroeconomics. Chicago, 1983. P. 67–112.

<sup>3</sup> *Mark N. C.* Exchange Rate and Fundamentals: Evidence on Long-horizon Predictability // American Economic Review. 1995. Vol. 85, No 1. P. 201–218; *Chen J., Mark N. C.* Alternative Long-horizon Exchange-rate Predictors // International Journal of Finance and Economics. 1996. Vol. 1, No 4. P. 229–250.

<sup>4</sup> *Cheung Y.-W., Chinn M. D., Pascual A. G.* Empirical Exchange Rate Models of the Nineties: Are Any Fit to Survive? // Journal of International Money and Finance. 2005. Vol. 24, No 7. P. 1150–1175.

<sup>5</sup> *Molodtsova T., Nikolsko-Rzhevskyy A., Papell D.* Taylor Rules and the Euro / University Library of Munich. 2008. MPRA Paper. [mpra.ub.uni-muenchen.de/11348](http://mpra.ub.uni-muenchen.de/11348).

са. Однако предложенная модель весьма специфична и нацелена лишь на одношаговое прогнозирование валютного курса. В целом ни один подход не позволяет моделировать динамику валютного курса с приемлемо низкой ошибкой на временном отрезке протяженностью от года и больше.

Таким образом, динамика валютного курса в значительной мере остается необъясненной. При этом есть свидетельства в пользу прогнозируемости валютного курса на основе моделей, включающих функции реагирования центральных банков. Денежно-кредитная политика, по-видимому, важна для ценообразования на валютном рынке. В статье рассматривается взаимосвязь денежно-кредитной политики центральных банков и валютного курса на примере валютной пары доллар—евро на основе реконструкции динамических систем. Как было показано в предыдущих исследованиях автора, ключевые процентные ставки Федеральной резервной системы (ФРС) США и Европейского центрального банка (ЕЦБ) могут считаться основным курсообразующим фактором для пары доллар—евро<sup>6</sup>.

При анализе типологии динамики валютного курса можно выделить несколько подходов. В соответствии с первым подходом режимы валютного курса рассматриваются с точки зрения его регулируемости денежными властями. Принято выделять плавающий и фиксированный валютные курсы, а также набор промежуточных режимов. В эмпирических исследованиях в этой области авторы стремятся определить по наблюдаемым данным нарушение денежными властями выбранного режима валютного курса<sup>7</sup>. Характеристики валютного рынка ученые полагают заранее известными и пытаются установить, соответствует ли им рынок.

В рамках второго подхода режимы рассматривают как совокупности некоторых числовых характеристик временного ряда котировок, например, волатильности валютного курса. Наблюдаемые эмпирические феномены изменения уровня волатильности связывают с существованием различных состояний экономики, которые моделируют с помощью переменной состояния, следующей марковскому процессу первого порядка<sup>8</sup>. Это помогает объяснить, в частности, одновременное изменение волатильности валютного курса и спреда процентных ставок.

К третьему подходу можно отнести построение имитационных моделей валютного рынка, воссоздающих его микроструктурные

<sup>6</sup> Камротов М. В. Кредитно-денежная политика США и Еврозоны: координация действий центральных банков и последствия для валютного курса доллара к евро // Экономика XXI века. 2009. № 10. С. 61—84.

<sup>7</sup> Frankel J. A., Fajnzylber E., Schmukler S. L., Serven L. Verifying Exchange Rate Regimes // Journal of Development Economics. 2001. Vol. 66, No 2. P. 351—386.

<sup>8</sup> Beyaert A., Garcia-Solanes J., Perez-Castejon J. J. Uncovered Interest Parity with Switching Regimes // Economic Modelling. 2007. Vol. 24, No 2. P. 189—202; Anker P. Uncovered Interest Parity, Monetary Policy and Time-varying Risk Premia // Journal of International Money and Finance. 1999. Vol. 18, No 6. P. 835—851; Kirikos D. G. Discrete Policy Interventions and Rational Forecast Errors in Foreign Exchange Markets: The Uncovered Interest Parity Hypothesis Revisited // International Journal of Finance and Economics. 2002. Vol. 7, No 4. P. 327—338; Kirikos D. G. A Reconsideration of Uncovered Interest Rate Parity under Switching Policy Regimes // Economia Internazionale. 2004. Vol. 57, No 2. P. 125—144.

особенности. Например, некоторые эмпирические «загадки» объясняют с помощью моделирования поведения трейдеров на рынке, которые переходят от одной стратегии к другой в зависимости от их доходности в прошлом<sup>9</sup>. Это позволяет реконструировать нелинейный характер поведения рынка, однако модель не проверяется на реальных данных и дает возможность только теоретически обосновать наблюдаемые феномены.

Таким образом, несмотря на широкое разнообразие используемых методов, всем работам в данной области присуща единая логика анализа: исследователи пытаются объяснить уже наблюдаемые типы поведения валютного курса. Однако ни в одной из известных нам работ не поставлены вопросы о поиске более общего механизма, порождающего различные режимы функционирования, например, системы «процентные ставки — валютный курс», об определении исчерпывающего перечня возможных режимов, свойственных валютному рынку.

Цель статьи — обнаружить по наблюдаемым данным все типы динамики финансового временного ряда. Мы предлагаем решение данной задачи для частного случая — валютной пары доллар—евро. Важна также возможность реконструкции эмпирически ненаблюдаемых режимов функционирования рынка. Иными словами, получив более сложную порождающую систему, можно выявить все возможные режимы, как фактически наблюдавшиеся раньше, так и еще не сложившиеся.

Реконструкция исходит из обоснованного в предыдущих исследованиях автора вывода о том, что динамика пары доллар—евро может быть достоверно смоделирована относительно простой системой линейных дифференциальных уравнений, в которую включены три переменные: ключевые процентные ставки ФРС и ЕЦБ и валютный курс. Ниже показано, что такую систему можно представить как проявление более сложной нелинейной «базовой» системы, которая определяет закон функционирования рынка. Равновесные состояния нелинейной системы формируют рыночные режимы, при этом каждый из них может быть выражен с помощью более простой линейной системы. В результате мы получим *не только количественный прогноз* поведения валютного курса (на основе линейной динамической системы), *но и качественный прогноз*, заключающийся в выявлении свойственных рынку режимов в различные периоды. Причем качественный прогноз становится продуктом формального моделирования, а не традиционных экспертных оценок.

Объектами анализа выступают центральная пара валютного рынка доллар—евро<sup>10</sup> и ключевые процентные ставки ФРС и ЕЦБ. В качестве процентных ставок, отражающих поведение ФРС и ЕЦБ, были выбраны эффективная ставка по федеральным фондам (*effective federal funds rate, FFR*) и индекс «элония» (*European*

<sup>9</sup> De Grauwe P., Grimaldi M. Exchange Rate Puzzle: A Tale of Switching Attractors // European Economic Review. 2006. Vol. 50, No 1. P. 1–33.

<sup>10</sup> По доле в совокупном обороте валютного рынка, по данным Банка международных расчетов.

*overnight index average, EONIA*). Это ставки межбанковского рынка, для которых центральные банки устанавливают целевой уровень. Банки обладают необходимыми инструментами воздействия на ставку по федеральным фондам и индекс «эония», чтобы удерживать их на желаемом уровне. При построении моделей использованы ежемесячные данные, взятые из баз данных ЕЦБ<sup>11</sup> и Федерального резервного банка Сент-Луиса<sup>12</sup>.

### **Линейная динамическая система как способ моделирования взаимосвязи процентных ставок и валютного курса**

ФРС США и ЕЦБ отвечают за проведение денежно-кредитной политики в двух крупнейших экономиках мира — США и еврозоне. У них примерно одинаковый размер населения (309 млн человек в США, 329 млн человек в еврозоне на начало 2010 г.), близкий по объему ВВП (по рыночным валютным курсам в 2009 г. ВВП США составлял 24,5% мирового ВВП, а еврозоны — 21,4%<sup>13</sup>). Масштабы этих экономик определяют, с одной стороны, их существенное влияние на состояние мировой финансовой системы, а с другой — создают предпосылки для взаимозависимости действий их денежных властей. К тому же в условиях значительных объемов торгов по валютной паре доллар—евро, приводящих, по сути, к бесконечной ликвидности этого рынка, процентные ставки становятся фактически единственным инструментом регулирования валютного курса, доступным центральным банкам.

При объяснении изменения котировок евро к доллару в экономическом сообществе зачастую принято ссылаться на динамику процентных ставок. Но зависимость между процентными ставками и динамикой данной валютной пары в настоящее время не находит эмпирического подтверждения в научной литературе. Традиционно такая зависимость проверяется методами регрессионного анализа, которые позволяют построить дискретные модели. Однако переход к непрерывным моделям может дать важные новые результаты. Мы проводим эмпирическое исследование с применением системы линейных дифференциальных уравнений, рассматривая динамику валютного курса и процентных ставок для непрерывного случая. Такой подход приводит к нетрадиционному выводу: динамика пары доллар—евро в существенной степени зависит от динамики процентных ставок в США и еврозоне. Более того, поведение валютного курса можно описать с помощью простой системы, состоящей только из трех переменных. В отличие от классических дискретных моделей конструируемая система позволяет рассмотреть непрерывный вариант функции реагирования, в котором учитываются потенциальное взаимодействие ФРС и ЕЦБ и взаимозависимость курса доллара к евро и основных процентных ставок США и еврозоны.

<sup>11</sup> См.: [www.ecb.int](http://www.ecb.int).

<sup>12</sup> См.: [research.stlouisfed.org](http://research.stlouisfed.org).

<sup>13</sup> По данным Всемирного банка ([data.worldbank.org](http://data.worldbank.org)).

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dFFR}{dt} &= m_{11}FFR + m_{12}EONIA + m_{13}EXR, \\ \frac{dEONIA}{dt} &= m_{21}FFR + m_{22}EONIA + m_{23}EXR, \\ \frac{dEXR}{dt} &= m_{31}FFR + m_{32}EONIA + m_{33}EXR, \\ FFR(0) &= c_1, \quad EONIA(0) = c_2, \quad EXR(0) = c_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где:  $EXR$  — курс доллара к евро;  $FFR$  — ставка по федеральным фондам;  $EONIA$  — индекс «эония»;  $t$  — переменная времени;  $m_{ij}$ ,  $i = 1...3$ ,  $j = 1...3$  — неизвестные параметры модели;  $c_i$  — начальные условия. Коэффициенты  $m_{ij}$ ,  $i = 1...3$ ,  $j = 1...3$  подбираются численными методами так, чтобы порождаемые системой траектории были близки к фактически наблюдаемым.

Исследования взаимосвязи ставки по федеральным фондам, индекса «эония» и курса доллара к евро на ежемесячных данных позволили выявить два временных отрезка с различным характером этой взаимосвязи<sup>14</sup>: декабрь 1999 — октябрь 2005 г.; ноябрь 2005 — январь 2010 г. В результате путем минимизации суммы квадратов отклонений модельных значений от фактических мы получаем два набора коэффициентов динамической системы:  $M_1$  — для первого периода,  $M_2$  — для второго<sup>15</sup>. Матрицы и соответствующие им фазовые диаграммы линейной динамической системы (1) приведены на рисунке 1. В качестве начальных значений были выбраны исторические средние по каждому временному ряду за период с января 1999 по август 2010 г.

Получив значения неизвестных параметров, можно построить траектории процентных ставок и валютного курса, порождаемые системой, и сравнить их с фактическими (см. рис. 2–4).

Мы получили достаточно качественное приближение реально наблюдаемых процессов для обоих периодов. Отметим, что во втором периоде в момент начала мирового финансового кризиса произошло разовое существенное отклонение валютного курса от расчетных значений, однако впоследствии котировки вернулись к модельной траектории. Данное возмущение следует рассматривать как шок, вызванный кризисными явлениями.

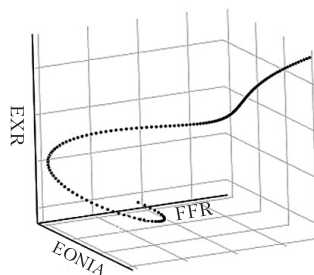
Возможность успешного моделирования процентных ставок и валютного курса с помощью автономной линейной динамической системы свидетельствует о высокой степени независимости этих переменных от других факторов. В отличие от традиционных моделей, включающих большое количество объясняющих переменных, наша система позволяет выявить внутренние законы развития в связке «ставка—курс». Мы показали, что ставка по федеральным фондам, индекс «эония» и курс доллар—евро могут быть выражены как функции только пе-

<sup>14</sup> Камротов М. В. Указ. соч.

<sup>15</sup> Здесь и далее значения приводятся с округлением до 0,001.

**Матрицы коэффициентов линейной динамической системы (1)  
и соответствующие им фазовые диаграммы  
в координатах EONIA—FFR—EXR**

$$M_1 = \begin{pmatrix} -0,093 & 0,103 & -0,011 \\ -0,089 & 0,046 & 0,102 \\ 0,013 & -0,015 & 0,005 \end{pmatrix}$$

а) с набором коэффициентов  $M_1$ 

$$M_2 = \begin{pmatrix} -0,089 & 0,119 & -0,097 \\ -0,144 & 0,125 & -0,020 \\ 0,008 & -0,002 & -0,010 \end{pmatrix}$$

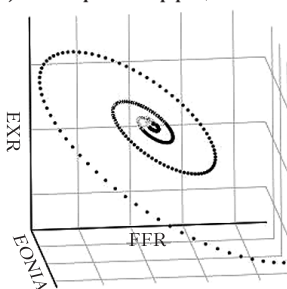
б) с набором коэффициентов  $M_2$ 

Рис. 1

ременной времени. Это подтверждает устойчивость механизмов их формирования, которые обусловлены не внешним воздействием, а особенностями взаимосвязей внутри рассмотренной системы на каждом из выделенных периодов.

Отметим, что нам потребовалось несколько однотипных систем, различающихся лишь значениями коэффициентов, чтобы описать поведение процентных ставок и валютного курса на рассматриваемом периоде. Таким образом, структуру механизма формирования котировок и процентных ставок следует признать неизменной, при этом она допускает наличие нескольких режимов.

В данном случае под режимом подразумевается определенная структура взаимосвязей валютного курса и процентных ставок. Набор коэффициентов определяет степень и направление влияния переменных друг на друга. С точки зрения валютного курса режим отражает масштабы влияния денежно-кредитной политики банков США и еврозоны на котировки доллара к евро в каждый момент, степень влияния предыдущих значений валютного курса на будущее. Соотношение трех факторов формирования курса (двух ключевых ставок и значений котировок) задает траекторию валютного курса на период, в течение которого действует данное соотношение, то есть данный режим. За исследуемый промежуток времени мы наблюдали проявление двух режимов курса доллара к евро. Идентификация режимов эквивалентна выбору мотивации, которой руководствуют-

**Динамика модельного и фактического индексов «эония»**

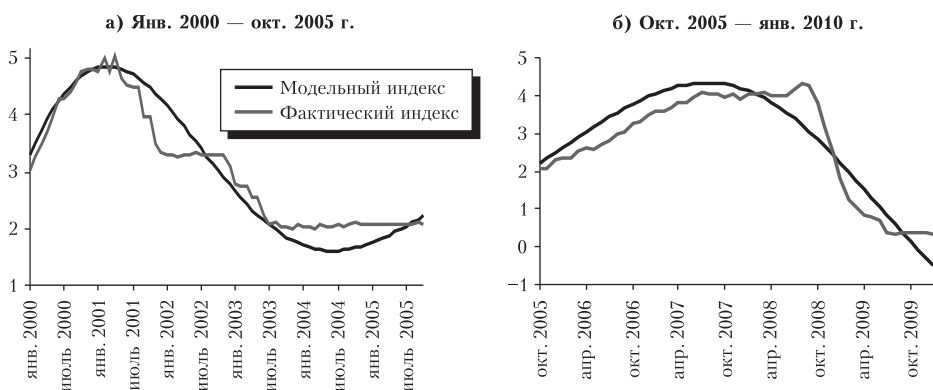


Рис. 2

**Динамика модельной и фактической ставок по федеральным фондам**

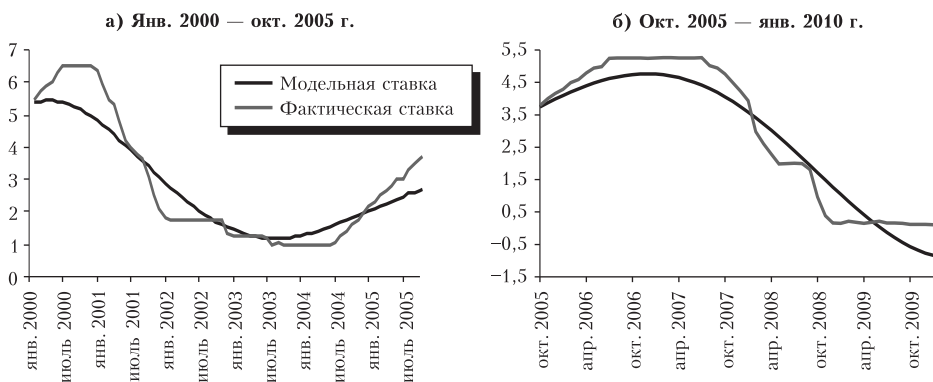


Рис. 3

**Динамика модельного и фактического валютных курсов**

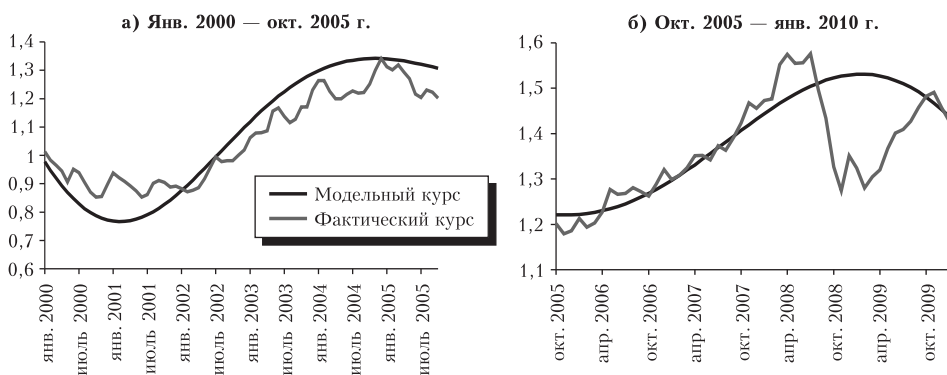


Рис. 4

ся участники валютного рынка в своих ожиданиях. Так, в первом периоде ведущей мотивацией служили краткосрочные ожидания, во втором — среднесрочные.

## **Режимы валютного рынка как равновесные состояния нелинейной динамической системы**

Многие теоретические модели убедительно показывают, что формирование валютного курса и ключевых процентных ставок центральных банков должно происходить под влиянием широкого спектра показателей, таких как индексы инфляции, объем денежной массы, торговый баланс и пр. Теоретически чем важнее экономическая переменная с точки зрения мировой финансовой системы, тем более сложную структуру должен иметь механизм ее формирования. Валютная пара доллар—евро, индекс «эония» и ставка по федеральным фондам относятся к ключевым параметрам мировой финансовой системы. Однако, согласно нашим эмпирическим оценкам, при теоретической обоснованности многофакторных моделей на практике для моделирования траекторий выбранной валютной пары и процентных ставок достаточно небольшого числа переменных. Объяснение этого феномена лежит в области синергетического подхода.

С момента образования еврозоны мировая финансовая система перешла на качественно новый уровень системности. Появление двух сопоставимых по влиянию денежных властей — ФРС и ЕЦБ, введение в обращение новой валюты евро, в которой многие эксперты видят альтернативу доминирующему доллару, существенно изменили глобальную финансовую архитектуру, создав фактически новую систему, находящуюся в некоторых начальных условиях, скорее всего неравновесных. Как показывают работы в области синергетики<sup>16</sup>, в таких обстоятельствах в системе возможны процессы самоорганизации, которые приводят к созданию устойчивой конструкции из небольшого числа составляющих. Из множества величин, описывающих систему, выделяется небольшое число параметров порядка — ведущих переменных, к динамике которых подстраиваются все остальные величины<sup>17</sup>. Описание поведения параметров порядка позволяет охарактеризовать поведение системы в целом. В нашем случае в качестве параметров порядка, по-видимому, выступают курс доллара к евро, индекс «эония» и ставка по федеральным фондам.

Каждый из рассмотренных подпериодов был достаточно длительным — несколько лет, что при выбранном масштабе данных составляет около 60 наблюдений. Это подтверждает относительную устойчивость обоих режимов. Каждый режим соответствует определенному типу динамики параметров порядка — валютного курса и процентных ставок, и, как показали наши исследования<sup>18</sup>, наблюдавшееся переключение между режимами произошло практически мгновенно.

Смена режимов означает изменение законов, в соответствии с которыми формируются анализируемые переменные. Их поведение, как в случае любых других экономических переменных, определяется процессом принятия решений участниками рынка. Законы, по

<sup>16</sup> *Хакен Г.* Синергетика. М., 1980; *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М., 1979.

<sup>17</sup> *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М., 2000.

<sup>18</sup> *Камротов М. В.* Указ. соч.



которым формируются траектории валютного курса и процентных ставок, обусловлены параметрами поведения экономических агентов. Устойчивость наблюдаемых режимов свидетельствует в пользу существования нескольких равновесных наборов параметров, каждый из которых может проявляться в течение определенного периода. Идея подобной фундаментальной нелинейности экономической системы, заключающейся в наличии ряда аттракторов, между которыми происходят практически мгновенные переключения, уже находила отражение в экономической литературе<sup>19</sup>.

Как указывает Н. Моисеев<sup>20</sup>, сложные нелинейные системы могут иметь большое число аттракторов, при этом состояние системы после быстрой перестройки к новому аттрактору практически непредсказуемо, целесообразно говорить лишь о возможных сценариях дальнейшего развития. В нашем случае мы наблюдали два возможных состояния, соответствующие двум наборам коэффициентов системы линейных дифференциальных уравнений. Ниже мы попытаемся ответить на вопрос, сколько всего может быть состояний у рассматриваемой системы и какие законы изменения валютного курса и процентных ставок они определяют.

Прежде всего необходимо теоретически определить количество возможных равновесий в системе. Мы не знаем истинную модель, описывающую закон формирования переменных, то есть динамику поведенческих параметров. Мы знаем лишь оцененные модели двух частных проявлений этого закона, по которым необходимо восстановить информацию о нем. Имеющиеся модели основаны на системе линейных дифференциальных уравнений, при этом модель самого закона предполагается сложной, нелинейной.

Формальное описание ситуации возможно в нашем случае на основе теоремы Гробмана—Хартмана<sup>21</sup>. Согласно данной теореме, при выполнении некоторых условий существует такой гомеоморфизм  $h$ , который отображает траектории нелинейной системы в окрестности равновесий в траектории ее линеаризованной системы с сохранением их типов и параметризации по времени. Оставив в стороне формальный анализ (вернемся к нему позже), рассмотрим на содержательном уровне применение данной теоремы к анализу системы «процентные ставки—валютный курс». Утверждения теоремы с учетом выполнения условий позволяют интерпретировать траектории полученных систем линейных дифференциальных уравнений как представление поведения некоторой нелинейной системы в окрестности ее равновесных точек. При этом нелинейная система описывает поведение фундаментального закона изменения процентных ставок и валютного курса, и ее решения находятся в пространстве поведенческих параметров,

<sup>19</sup> Евстигнеев В. Р. Идеи И. Пригожина в экономике. Нелинейность и финансовые системы // *Общественные науки и современность*. 1998. № 1. С. 112–121; Чернавский Д. С., Старков Н. И., Щербаков А. В. Динамическая модель поведения общества. Синергетический подход к экономике / *Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие*. М., 2002. С. 239–291; Чернавский Д. С., Старков Н. И., Щербаков А. В. О проблемах физической экономики // *Успехи физических наук*. 2002. Т. 172, № 9. С. 1045–1066.

<sup>20</sup> Моисеев Н. Н. Системная организация биосферы и концепция коэволюции // *Общественные науки и современность*. 2000. № 2. С. 123–124.

<sup>21</sup> Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Указ. соч. С. 66–67.

которые, предположительно, отвечают за формирование этого закона. Гомеоморфизм  $h$  отображает траектории нелинейной системы в пространство наблюдаемых переменных.

Таким образом, теорема Гробмана—Хартмана позволяет представить следующую схему моделирования экономической системы: характеристики поведения экономических агентов моделируются нелинейной динамической системой и могут находиться в одном из ее равновесий; равновесные значения этих параметров порождают определенный тип динамики процентных ставок и валютного курса, что формально выражается в отображении траекторий параметров в окрестности равновесия в пространство наблюдаемых переменных. Каждый конкретный механизм поведения курса доллара к евро, ставки по федеральным фондам и индекса «эония» и их взаимодействия, представляемый в виде конкретной линейной динамической системы, выражает одно из состояний более сложной нелинейной системы.

Формально процентные ставки и валютный курс — это функция характеристик поведения. В этом случае два наблюдаемых режима валютного курса и процентных ставок соответствуют двум равновесиям нелинейной системы, и вопрос о количестве возможных режимов сводится к вопросу о количестве ее равновесий.

Какие именно поведенческие параметры моделирует нелинейная система? Проблема выбора конкретной экономической величины, которую можно напрямую отождествить (или хотя бы однозначно связать) с модельной переменной, выступающей в качестве фундаментальной, — одна из самых сложных в экономической науке. Зачастую математический инструментарий позволяет утверждать, что одни переменные выступают в роли фактора формирования других, однако не дает однозначного алгоритма, по которому можно дать экономическую интерпретацию факторов.

Например, модели фондового рынка на базе метода независимых компонент<sup>22</sup> позволяют выявить сигналы, на основе которых формируется фондовый индекс (то есть индекс — функция этих сигналов). Они дают возможность реконструировать ряды сигналов, при этом нельзя формально определить содержательное наполнение полученных рядов, даже построение иерархии найденных сигналов — нетривиальная задача<sup>23</sup>, что не мешает этим моделям служить эффективным инструментом прогнозирования.

В качестве одного из возможных вариантов интерпретации переменных, входящих в нелинейную систему, рассмотрим показатели доверия к центральному банку и отношение участников рынка к риску. Доверие участников рынка к ЦБ считается ключевой характеристикой его денежно-кредитной политики, отражающей способность банка контролировать определяющий параметр экономической системы — ожидания участников рынка<sup>24</sup>. Более высокий уровень доверия к ЦБ

<sup>22</sup> *Back A., Weigend A. A First Application of Independent Component Analysis to Extracting Structure from Stock Returns // International Journal of Neural Systems. 1997. Vol. 8, No 4. P. 473–484.*

<sup>23</sup> *Cheung Y., Xu L. Independent Component Ordering in ICA Time Series Analysis // Neurocomputing. 2001. Vol. 41, No 1. P. 145–152.*

<sup>24</sup> *Gomme P. Central Bank Credibility / Federal Reserve Bank of Cleveland. 2006. www.clevelandfed.org/Research/commentary/2006/0801.pdf.*

способствует стабильности финансовой системы, поскольку снижает разнородность ожиданий в экономике<sup>25</sup>.

Отношение участников рынка к риску и доверие к политике денежных властей порождают прямую и обратную зависимость и создают, собственно, «маятник» нелинейной динамической системы. Политика низких процентных ставок, как и повышение прозрачности денежно-кредитной политики, формирует предпосылки для принятия участниками рынка более рискованных решений<sup>26</sup>. Покупка валюты — это кредитование эмиссионного банка, что позволяет говорить о наличии связи между курсом валютной пары и доверием к центральным банкам, эмитирующим эти валюты.

Доверие к ЦБ и отношение к риску — величины, которые можно формально измерить, поэтому правомерно их отождествлять с переменными нелинейной динамической системы. Доверие к ЦБ, например, можно измерить на основе соотношения ожидаемой инфляции и ее целевого уровня<sup>27</sup>. Распространенная мера отношения к риску участников рынка — индекс *VIX*, измеряющий ожидания относительно будущей волатильности рынка (рассчитывается Чикагской биржей опционов<sup>28</sup>).

### Реконструкция нелинейной динамической системы

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = F(x). \quad (2)$$

Пусть  $x_0$  — решения алгебраических уравнений  $F(x) = 0$ . Теорема Гробмана—Хартмана говорит о возможности представить поведение нелинейной системы (2) в окрестности неподвижных точек  $x_0$  через линеаризованные системы следующего вида:

$$\dot{u} = Au, \quad (3)$$

где  $A_{ij} \equiv \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=x_0}$  — матрица Якоби, причем во всех точках  $x_0$  у матрицы  $A$  должны отсутствовать собственные значения с нулевой действительной частью. Заметим, что у системы (1) именно такой вид. Принимая интерпретацию, предложенную в предыдущем разделе, предположим, что оцененные матрицы  $M_1$  и  $M_2$  — это матрицы Якоби в двух неподвижных точках неизвестной нелинейной системы. Легко проверить, что все собственные значения матриц  $M_1$  и  $M_2$  имеют ненулевые действительные части.

<sup>25</sup> Faust J., Svensson L. E. Transparency and Credibility: Monetary Policy with Unobservable Goals // International Economic Review. 2001. Vol. 42, No 2. P. 369–397.

<sup>26</sup> Gambacorta L. Monetary Policy and the Risk-taking Channel // BIS Quarterly Review. 2009. Dec. P. 43–53.

<sup>27</sup> Cecchetti S. G., Krause S. Central Bank Structure, Policy Efficiency and Macroeconomic Performance: Exploring Empirical Relationships // Federal Reserve Bank of St. Louis Review. 2002. July. P. 47–60; Svensson L. How Should Monetary Policy Be Conducted in an Era of Price Stability // NBER Working Paper No 7516. 2000. www.nber.org/papers/w7516.

<sup>28</sup> Подробную информацию об индексе *VIX* можно найти на сайте Чикагской биржи опционов: www.cboe.com/vix.

Наша задача заключается в том, чтобы восстановить вид нелинейной системы, зная численные значения элементов ее матрицы Якоби в двух неподвижных точках. Мы имеем следующую нелинейную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= F_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= F_3(x, y, z). \end{aligned} \quad (4)$$

Запишем соответствующую ей матрицу Якоби:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Если матрицы  $M_1$  и  $M_2$  — это матрицы Якоби в двух неподвижных точках, то должны выполняться следующие равенства:

$$\begin{aligned} J(x_1, y_1, z_1) &= M_1, \\ J(x_2, y_2, z_2) &= M_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  — неподвижные точки системы (4). Последнее условие ведет к необходимости выполнения еще нескольких равенств:

$$\begin{aligned} F_i(x_k, y_k, z_k) &= 0, \\ i &= 1 \dots 3, \quad k = 1 \dots 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Объединяя системы (6) и (7), получаем систему, включающую 24 алгебраических уравнения. Она обеспечивает соответствие в смысле теоремы Гробмана–Хартмана траекторий линейной системы с матрицами коэффициентов  $M_1$  и  $M_2$  траекториям нелинейной системы в окрестности ее неподвижных точек.

Чтобы решить данную систему уравнений, необходимо сделать предположение о конкретном виде элементов матрицы Якоби (5). Заметим, что такое предположение автоматически определяет и вид самой нелинейной системы. В результате решения объединенной системы мы получим численные значения неподвижных точек системы (4), которым соответствуют матрицы  $M_1$  и  $M_2$ , а также значения параметров, входящих в производные функций  $F_1, F_2, F_3$ . Для обеспечения совместности системы из 24 уравнений необходимо, чтобы она содержала не менее 24 неизвестных. Такому условию удовлетворяет, например, параметризация элементов матрицы Якоби как линейных функций, при которой ее элементы будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} J_{i1}(x, y, z) &\equiv \frac{\partial F_i}{\partial x} = a_{i1}x + b_{i1}, \\ J_{i2}(x, y, z) &\equiv \frac{\partial F_i}{\partial y} = a_{i2}y + b_{i2}, \\ J_{i3}(x, y, z) &\equiv \frac{\partial F_i}{\partial z} = a_{i3}z + b_{i3}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $a_{ij}, b_{ij}$  — неизвестные параметры,  $i = 1 \dots 3, j = 1 \dots 3$ . В этом случае объединенная система (6)–(7) содержит необходимое количество неизвестных, а функции  $F_1, F_2, F_3$  имеют нелинейный вид:

$$F_i(x, y, z) = \frac{1}{2} a_{i1} x^2 + b_{i1} x + \frac{1}{2} a_{i2} y^2 + b_{i2} y + \frac{1}{2} a_{i3} z^2 + b_{i3} z. \quad (9)$$

Объединяя (8) и (9), получим:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + b_{11} & a_{12}y_1 + b_{12} & a_{13}z_1 + b_{13} \\ a_{21}x_1 + b_{21} & a_{22}y_1 + b_{22} & a_{23}z_1 + b_{23} \\ a_{31}x_1 + b_{31} & a_{32}y_1 + b_{32} & a_{33}z_1 + b_{33} \end{pmatrix} = M_1,$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_2 + b_{11} & a_{12}y_2 + b_{12} & a_{13}z_2 + b_{13} \\ a_{21}x_2 + b_{21} & a_{22}y_2 + b_{22} & a_{23}z_2 + b_{23} \\ a_{31}x_2 + b_{31} & a_{32}y_2 + b_{32} & a_{33}z_2 + b_{33} \end{pmatrix} = M_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_{11}x_1^2 + b_{11}x_1 + \frac{1}{2}a_{12}y_1^2 + b_{12}y_1 + \frac{1}{2}a_{13}z_1^2 + b_{13}z_1 &= 0, \\ \frac{1}{2}a_{21}x_1^2 + b_{21}x_1 + \frac{1}{2}a_{22}y_1^2 + b_{22}y_1 + \frac{1}{2}a_{23}z_1^2 + b_{23}z_1 &= 0, \\ \frac{1}{2}a_{31}x_1^2 + b_{31}x_1 + \frac{1}{2}a_{32}y_1^2 + b_{32}y_1 + \frac{1}{2}a_{33}z_1^2 + b_{33}z_1 &= 0, \\ \frac{1}{2}a_{11}x_2^2 + b_{11}x_2 + \frac{1}{2}a_{12}y_2^2 + b_{12}y_2 + \frac{1}{2}a_{13}z_2^2 + b_{13}z_2 &= 0, \\ \frac{1}{2}a_{21}x_2^2 + b_{21}x_2 + \frac{1}{2}a_{22}y_2^2 + b_{22}y_2 + \frac{1}{2}a_{23}z_2^2 + b_{23}z_2 &= 0, \\ \frac{1}{2}a_{31}x_2^2 + b_{31}x_2 + \frac{1}{2}a_{32}y_2^2 + b_{32}y_2 + \frac{1}{2}a_{33}z_2^2 + b_{33}z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Система (10) включает 24 уравнения и 24 неизвестных: 18 параметров  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $i = 1 \dots 3$ ,  $j = 1 \dots 3$  и две тройки координат  $(x_k, y_k, z_k)$ ,  $k = 1 \dots 2$ , определяющих неподвижные точки системы (4). Решения системы будем искать численными методами в среде *Mathcad 13* (программа использует квазиньютоновский метод, метод сопряженных градиентов и метод Левенберга—Марквардта). Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

**Значения параметров нелинейной системы**

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
-0,007	-0,024	0,254	0,091	-0,12	0,36	0,009	-0,02	0,044
$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$
-0,088	0,121	-0,11	-0,151	0,137	-0,038	0,007	0	-0,012

Вместе со значениями параметров получаем значения координат  $(x_k, y_k, z_k)$ ,  $k = 1 \dots 2$ . Зная значения параметров, можно найти все неподвижные точки системы (4) из решения соответствующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} F_i(x, y, z) &= 0, \\ i &= 1 \dots 3. \end{aligned} \tag{11}$$

Решения (11), полученные с помощью тех же численных методов, приведены в таблице 2 (тривиальное решение  $x = y = z = 0$  не рассматривается). У системы (11) оказалось семь нетривиальных решений, что определяет существование *семи режимов валютного курса и процентных ставок, два из которых уже наблюдались на рынке*. Поскольку

Координаты неподвижных точек нелинейной системы

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
$x_n$	-0,312	0,054	0,783	1,246	3,984	7,873	11,255
$y_n$	-3,039	0,069	0,855	1,283	3,396	-9,488	-11,632
$z_n$	2,367	0,033	0,431	0,592	-0,67	5,414	-4,496

формально режим представлен в виде матрицы Якоби — матрицы коэффициентов системы линейных дифференциальных уравнений, получаем семь матриц  $J_n$ ,  $n = 1..7$ , соответствующих семи линейным системам. Собственные значения всех семи матриц имеют ненулевые действительные части, следовательно, условия теоремы Гробмана—Хартмана выполняются.

При построении фазовых диаграмм системы (1) было выявлено, что матрицы  $J_1, J_6, J_7$  порождают «катастрофический» характер поведения траекторий решений системы: все переменные резко устремляются к бесконечности. Мы не будем рассматривать эти случаи, поскольку они отражают, по-видимому, резкую смену структуры финансовой системы, которая требует построения других моделей. Ниже приведены матрицы  $J_2, J_3, J_4, J_5$ , обеспечивающие более реалистичное поведение решений системы (1). На рисунке 5 показаны соответствующие этим матрицам фазовые диаграммы. Как и прежде, в качестве начальных значений выбраны исторические средние по каждому временному ряду за январь 1999 — август 2010 г.

Отметим, что при применении численных методов возникают некоторые погрешности в вычислениях. Среди матриц  $J_n$  нет таких, которые полностью совпадали бы с матрицами  $M_1$  и  $M_2$ , однако путем сопоставления траекторий систем линейных дифференциальных уравнений с наборами коэффициентов  $J_n$  и  $M_1$  и  $M_2$  можно установить соответствие между матрицами  $J_n$  и наблюдавшимися на рынке режимами. Анализ показывает, что решения системы (1) имеют практически совпадающие траектории для пары матриц  $J_2—M_2$  и пары  $J_3—M_1$ , различие пренебрежимо мало. Таким образом, из четырех режимов второй и третий уже имели место на рынке.

Типологизация поведения валютного курса и процентных ставок создает строгий формальный инструмент для построения сценарных прогнозов. Проведенный анализ позволил идентифицировать четыре режима, свойственных динамике моделируемых переменных. Им соответствуют матрицы  $J_2, J_3, J_4, J_5$ . До настоящего времени мы наблюдали действие режима  $J_2$ . Следовательно, можно представить следующие варианты развития событий в рамках принятой модели:

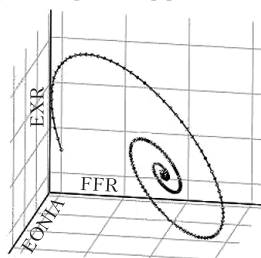
- рынок продолжает функционировать в действующем режиме  $J_2$ ;
- происходит переключение режима на один из трех вариантов —  $J_3, J_4$  или  $J_5$ .

Таким образом, возможны четыре сценария дальнейшего поведения курса доллара к евро и ключевых процентных ставок ФРС и ЕЦБ (см. рис. 6—8). При построении решений системы (1) в качестве начальных значений были выбраны:

**Матрицы Якоби  $J_2, J_3, J_4, J_5$  и соответствующие им фазовые диаграммы линейной динамической системы (1) в координатах EONIA—FFR—EXR**

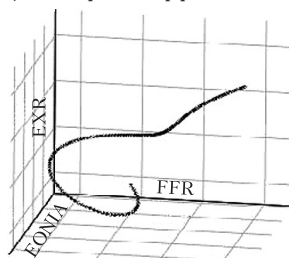
$$J_2 = \begin{pmatrix} -0,088 & 0,119 & -0,102 \\ -0,146 & 0,129 & -0,026 \\ 0,008 & -0,001 & -0,011 \end{pmatrix}$$

а) с набором коэффициентов  $J_2$



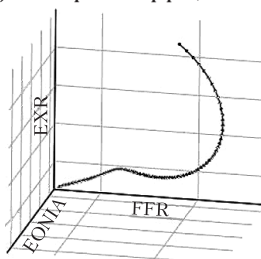
$$J_3 = \begin{pmatrix} -0,093 & 0,100 & 0 \\ -0,080 & 0,034 & 0,117 \\ 0,014 & -0,017 & 0,007 \end{pmatrix}$$

б) с набором коэффициентов  $J_3$



$$J_4 = \begin{pmatrix} -0,096 & 0,090 & 0,040 \\ -0,038 & -0,017 & 0,175 \\ 0,018 & -0,025 & 0,014 \end{pmatrix}$$

в) с набором коэффициентов  $J_4$



$$J_5 = \begin{pmatrix} -114,0 & 0,039 & -0,280 \\ 0,212 & -0,271 & -0,279 \\ 0,041 & -0,068 & -0,041 \end{pmatrix}$$

г) с набором коэффициентов  $J_5$

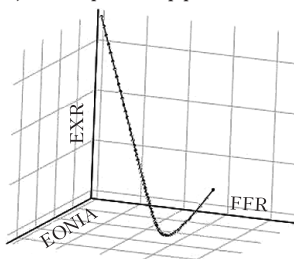


Рис. 5

— в случае матриц  $J_3, J_4, J_5$  — последнее доступное на текущий момент значение временного ряда (август 2010 г.);

— в случае матрицы  $J_2$  — значение временного ряда на момент наблюдавшегося переключения режимов (сентябрь 2005 г.), учитывая, что режим  $J_2$  уже действовал в период октября 2005 — августа 2010 г.

Отрицательные значения процентных ставок, полученные в наших прогнозах, означают политику околонулевых ставок, при которой возможности использования ключевой процентной ставки центрального

**Четыре сценария динамики индекса «эония»,  
сентябрь 2010 — август 2013 г.**

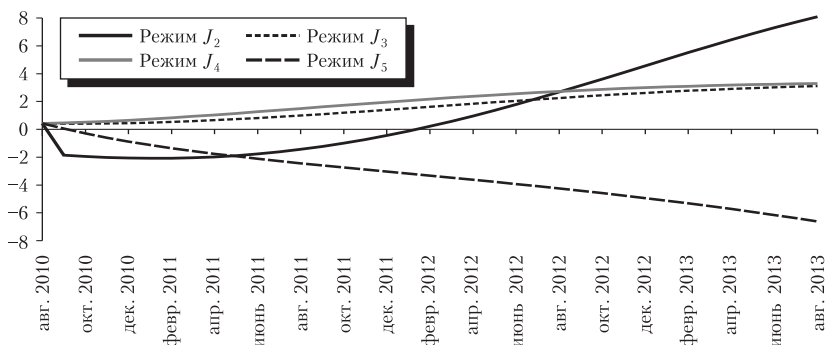


Рис. 6

**Четыре сценария динамики ставки по федеральным фондам,  
сентябрь 2010 — август 2013 г.**

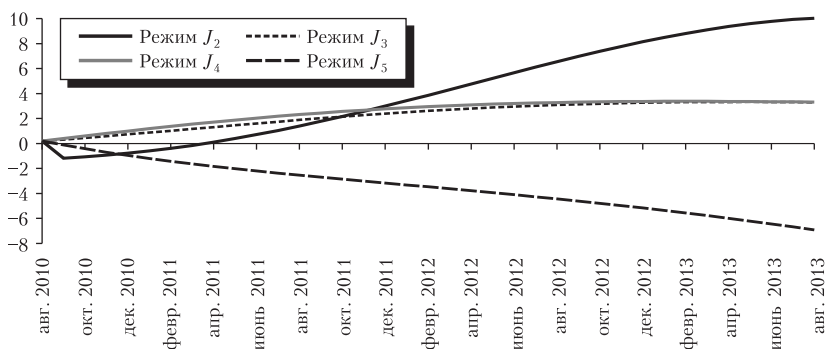


Рис. 7

**Четыре сценария динамики курса доллар—евро,  
сентябрь 2010 — август 2013 г.**

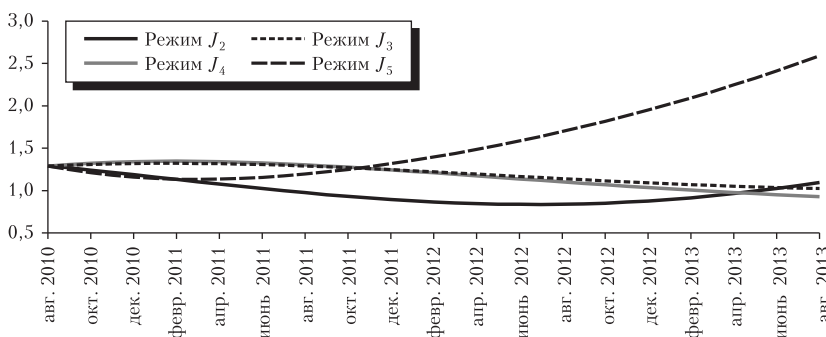


Рис. 8

банка как инструмента стимулирования экономики уже исчерпаны. Тогда денежные власти прибегают к использованию альтернативных инструментов денежно-кредитной политики.

Мы видим, что переключение на режимы  $J_3$  или  $J_4$  приведет к постепенному увеличению в течение прогнозного периода индекса



«эзония» в пределах 3 п. п. и ставки по федеральным фондам в пределах 2 п. п., обменный курс при этом будет колебаться в границах 1—1,4 долл./евро. Продолжение функционирования системы в текущем режиме также вызовет повышение ключевых процентных ставок, однако оно начнется спустя некоторое время и будет более резким; валютный курс при этом будет находиться в границах 0,8—1,4. При режиме  $J_5$  наблюдается резкий рост курса евро по отношению к доллару, а процентные ставки снижаются и находятся в отрицательной зоне в течение всего периода. Поскольку режим не предусматривает возврата ставок к положительным значениям, ситуация потребует политического вмешательства и, возможно, коренной перестройки всей системы. Таким образом, тип поведения  $J_5$  оказывается нежизнеспособным.

Предложенная схема анализа позволяет типологизировать поведение рынка на основе априорных предположений не о сущности возможных типов динамики, а о фундаментальном механизме формирования финансовых переменных. Это обеспечивает реконструкцию «естественных» типов поведения, в том смысле, что существование выделенных режимов обусловлено сложившимся механизмом функционирования рынка. Для действующего типа мировой финансовой системы возможно несколько комбинаций доверия, которые соответствуют равновесиям, определяющим динамику ставок и курса. Проведенные эмпирические оценки позволяют делать как количественные, так и качественные, сценарные прогнозы.

Вопрос об устойчивости равновесий системы (4), безусловно, важен, однако такой анализ выходит за рамки нашей статьи. Необходимо подробно исследовать поведение системы в окрестности равновесий, чтобы получить представление о механизме перехода от одного равновесия к другому.

Заметим, что в случае устойчивости равновесий в модель нужно ввести внешнюю нагрузку, которая позволила бы моделировать переход от одного режима к другому. В окрестности равновесий она должна быть нулевой, чтобы обеспечивать наблюдающуюся устойчивость режимов, однако при случайном колебании системы за пределы этой окрестности нагрузка должна резко возрастать, переводя систему в новое равновесие.

\* \* \*

В статье предложен новый метод выявления режимов динамики валютной пары доллар—евро и денежно-кредитной политики ФРС и ЕЦБ. Применение теоремы Гробмана—Хартмана позволило реконструировать систему нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующую закон, по которому изменяется взаимосвязь процентных ставок и валютного курса. В результате эмпирически идентифицированы семь возможных режимов динамики данных переменных, обусловленных сложившейся структурой финансовой системы. Рассмотренный подход можно использовать для целей прогнозирования и построения сценариев развития мировой финансовой системы.