УДК 519.626

ОДНОПРОДУКТОВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФОНДОВ. МАГИСТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА[1)]

© 2012 г. Л. А. Бекларян, С. В. Борисова, Н. К. Хачатрян

(117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, Ипр РАН)

e-mail: beklar@cemi.rssi.ru; boriss@cemi.rssi.ru; nerses@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию 26.05.2011 г.
Переработанный вариант 14.11.2011 г.

Представлены результаты численного моделирования однопродуктовой динамической модели экономики, позволяющей исследовать характер оптимальных сроков функционирования производственных фондов. Рассматриваемая модель учитывает инерционные свойства вводимых фондов и позволяет определять оптимальные сроки службы основных фондов и режимы ввода новых фондов. Библ. 1. Фиг. 8. Табл. 5.

Ключевые слова: производственные фонды, модели с лагами, оптимальная траектория, дифференциальная оптимизация, интегральная оптимизация, численные методы оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе функционирования основные производственные фонды подвержены физическому и моральному износу. Физический износ определяется сроком использования основных фондов в производстве, а также воздействием природных факторов. Моральный износ основных фондов обусловлен развитием научно-технического прогресса и, в частности, созданием более эффективных технологий.

Одним из ранних примеров макроэкономической модели, учитывающей действие научно-технического прогресса, является модель Солоу (см. [1]), в которой технический прогресс воплощен в основных производственных фондах: фонды, созданные недавно, более эффективны по сравнению с ранее созданными. Если $\chi(\tau, t)$ – количество основных фондов, созданных в момент времени τ и задействованных в производстве в текущий момент времени t; $\varphi(\tau, t)$ – количество трудовых ресурсов на основных фондах $\chi(\tau, t)$, тогда совокупный выпуск $P(t)$ в момент времени t определяется по формуле:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} U(\tau, t, \chi(\tau, t), \varphi(\tau, t))d\tau,$$

где $U(\tau, t, \chi(\tau, t), \varphi(\tau, t))$ – производственная функция Кобба–Дугласа в виде

$$U(\tau, t) = e^{\lambda\tau}\chi^{\beta}(\tau, t)\varphi^{1-\beta}(\tau, t), \quad 0 < \beta < 1,$$

где λ – темп овеществленного технического прогресса.

В каждый момент времени t задан совокупный объем трудовых ресурсов $T(t)$

$$T(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau, t)d\tau.$$

Предполагается, что основные фонды выбывают вследствие физического износа с постоянным темпом:

$$\chi(\tau, t) = I(\tau)e^{\xi(\tau - t)}, \quad \xi > 0,$$

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00324).

где $I(\tau)$ – инвестиции в момент τ, ξ – норма амортизации в связи с физическим износом фондов. Распределение трудовых ресурсов в соответствии с различными технологиями производства подчиняется требованию максимизации выпуска.

Недостатком модели Солоу является то, что она позволяет исследовать только случай равномерных темпов износа фондов и не учитывает того, что с научно-техническим прогрессом связано появление новой важной характеристики производства: сопоставимость времени жизни основных фондов и трудовых ресурсов. В связи с этим одной из важнейших проблем является поиск оптимальных сроков службы фондов. Такие модели были введены Л.В. Канторовичем в 1959 г. (см. [2]). В 1973 г. была предложена и исследована однопродуктовая макроэкономическая динамическая модель (см. [3]).

Принципиально новым в модели Канторовича является учет срока службы фондов через введение в модель новой характеристики $m(t)$ – временной границы использования фондов: все фонды, созданные ранее момента $m(t) < t$, в момент t выводятся из производства. При этом функция $m(t)$ является эндогенной переменной модели и не учитывается физический износ производственных фондов. Используя введенные выше обозначения, модель записывается в следующем виде:

национальный доход в каждый момент времени t:

$$P(t) = \int_{m(t)}^{t} U(\tau, t, \chi(\tau, t), \varphi(\tau, t))d\tau;$$

уравнение баланса трудовых ресурсов:

$$T(t) = \int_{m(t)}^{t} \varphi(\tau, t)d\tau.$$

Здесь функция $\chi(t)$ описывает интенсивность ввода капиталовложений, идущих на увеличение фондов и замену выбывающих из производства фондов. Функция $\varphi(t)$ определяет интенсивность ввода трудовых ресурсов, занятых на создаваемых фондах.

Для поиска оптимальной политики вывода устаревших фондов используется принцип дифференциальной оптимизации, согласно которому стратегия выбора переменных модели должна быть такова, чтобы в каждый момент времени обеспечить максимальный темп роста национального дохода. Очевидно, что принципы оптимизации могут быть выбраны различные. В этом случае становится важным сравнение результатов, полученных при применении различных принципов оптимизации. В частности, в [4] проводилось сравнение результатов применения принципа дифференциальной оптимизации с результатами применения принципа интегральной оптимизации для модели, предложенной в [3].

Модели и методы для решения задачи об оптимальном выводе устаревших фондов в сложных экономических системах с комплексными экономическими показателями получили развитие в прикладных и теоретических работах школы академика А.А. Петрова, особенно в работах И.Г. Поспелова, А.А. Шананина и др. В частности, разработанный подход был успешно использован для моделирования кризисов перепроизводства (см. [5]).

В западной литературе модели этого типа известны под наименованием “putty-clay” (см. [6], [7]). Подобный подход часто используется для описания бизнес-циклов (см. [8]).

Возвращаясь к модели Канторовича, отметим, что важное предположение в ней состоит в том, что срок ввода в производство новых фондов ничтожно мал. Однако в современных высокотехнологичных производствах появилась еще одна важная тенденция: продолжительность службы основных фондов сопоставима с периодом их ввода на проектную мощность. Поэтому при моделировании политики обновления основных фондов необходимо также учитывать сроки освоения новых фондов. В [9], [10] предлагается развитие модели Канторовича в виде однопродуктовой динамической модели экономики, учитывающей инерционные свойства как выводимых, так и вводимых основных фондов. Для этого в модель Канторовича введена дополнительная характеристика $\alpha(t)$ $(m(t) \le \alpha(t) \le t)$, определяющая момент запуска новой технологии, полностью осваиваемой к моменту времени t. Для такой модели было получено аналитическое решение, доказана теорема существования и единственности решения, описаны все режимы, реализуемые системой, и возможные переходы с режима на режим.

Основной задачей данной работы является исследование свойств траекторий системы, в частности, их магистральных свойств.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассматривается система, производящая один продукт и обладающая высокими темпами обновления технологий с двумя главными производственными факторами — производственными фондами (овеществленным капиталом) и трудовыми ресурсами. Эффективность производства в любой момент времени t определяется производственной функцией Кобба–Дугласа следующего вида:

$$U(t) = f(t)\chi^{\beta}(t)\varphi^{\delta}(t).$$

Функция $f(t)$ отражает уровень развития научно-технического прогресса в момент времени t; функция $\chi(t)$ описывает интенсивность ввода капиталовложений, идущих на увеличение фондов и замену выбывающих из производства фондов; функция $\varphi(t)$ определяет интенсивность ввода трудовых ресурсов, занятых на создаваемых фондах. Предполагается, что функция Кобба–Дугласа имеет постоянную отдачу от масштаба, т.е. $\beta + \delta = 1$.

В модели функции $f(t)$ и $\chi(t)$ задаются экзогенно, а функция $\varphi(t)$ — эндогенно. Функции $f(t)$ и $\chi(t)$ — абсолютно непрерывные функции с производной, непрерывной справа; $\varphi(t)$ — неотрицательная кусочно-непрерывная справа функция.

Предполагаем, что технический прогресс и рост фондовооруженности ведут к необходимости замены устаревших фондов, т.е. наименее эффективные фонды непрерывно выводятся из производства (и в дальнейшем не используются), а высвобождающиеся трудовые ресурсы направляются на вновь создаваемые фонды. При этом в первую очередь выводятся фонды, имеющие самый ранний период создания среди всех занятых в процессе производства на момент времени t. Политика вывода фондов характеризуется функцией $m(t)$, $m(t) < t$, $m'(t) \geq 0$. Таким образом, $m(t)$ — момент ввода в производство фондов, которые в момент времени t выводятся из производства. Кроме того, предполагается, что устаревшие к моменту времени t фонды не могут быть выведены сколь угодно быстро, т.е. существует константа M $(M \gg 1)$ такая, что $m'(t) \leq M$.

Политика ввода в производство новых, более эффективных фондов характеризуется функцией $\alpha(t)$, которая определяет момент начала освоения новых фондов, запускаемых в производство в момент времени t. Функции $m(t)$, $\alpha(t)$ такие, что $m(t) \leq \alpha(t) \leq t$.

Включение в модель характеристик, определяющих временные границы службы фондов и освоения новых фондов, наряду с овеществленным уровнем описания научно-технического прогресса, дает возможность для управления и оптимизации развития экономической системы за счет изменения политики обновления основных фондов. Функции $m(t)$, $\alpha(t)$, определяющие политику вывода старых и ввода новых, более совершенных фондов, являются неизвестными, предполагается, что $m(t)$, $\alpha(t)$ — абсолютно непрерывные функции с производной, непрерывной справа.

Процесс технического перевооружения производства, связанный с техническим прогрессом, приводит к тому, что в каждый момент времени t существует два типа основных фондов: действующие фонды и осваиваемые фонды. Это, в свою очередь, приводит к необходимости разделения трудовых ресурсов на активные (занятые на действующих фондах в момент времени t) и пассивные (задействованные на осваиваемых фондах в момент времени t) трудовые ресурсы. Так как активные и пассивные трудовые ресурсы формируются в рамках одной и той же социально-экономической системы, то естественно считать, что темпы их роста совпадают, поэтому если $T(t)$ — общий объем трудовых ресурсов в момент времени t, то разделение на активные и пассивные трудовые ресурсы осуществляется следующим образом:

активные трудовые ресурсы

$$T_a(t) = \kappa T(t); \tag{1.1}$$

пассивные трудовые ресурсы

$$T_p(t) = (1 - \kappa)T(t), \tag{1.2}$$

где $0 \le \kappa \le 1$ — параметр, определяющий политику распределения трудовых ресурсов на активные и пассивные. Будем считать, что трудовые ресурсы $T(t)$ в (1.1), (1.2) не убывают, $T'(t) \ge 0$, и задаются абсолютно непрерывной функцией с производной, кусочно-непрерывной справа.

Пусть $P(t)$ — количество чистого продукта, производимого на фондах, участвующих в производстве в момент времени t.

Рассматриваемая экономическая система описывается следующими соотношениями (см. [9]):
национальный доход в каждый момент времени t:

$$P(t) = \int_{m(t)}^{\alpha(t)} f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)d\tau; \tag{1.3}$$

уравнение баланса активных трудовых ресурсов:

$$\int_{m(t)}^{\alpha(t)} \varphi(\tau)d\tau = T_a(t); \tag{1.4}$$

уравнение баланса пассивных трудовых ресурсов:

$$\int_{\alpha(t)}^{t} \varphi(\tau)d\tau = T_p(t); \tag{1.5}$$

ограничения на скорость процедуры замещения устаревших фондов и ввода новых:

$$0 \le m'(t) \le M, \quad \alpha'(t) \ge 0. \tag{1.6}$$

Выбор функций $\{m(t), \alpha(t), \varphi(t)\}$ определяет стратегию ввода новых, более совершенных фондов и вывода устаревших фондов, т.е. функции $m(.)$, $\alpha(.)$, $\varphi(.)$ являются управлениями для модели (1.3)–(1.6). Поиск оптимальной стратегии обновления фондов будем осуществлять с использованием двух качественно разных критериев: 1) максимизация темпа роста национального дохода в каждый момент времени (принцип дифференциальной оптимизации); 2) максимизация национального дохода за плановый период времени (принцип интегральной оптимизации).

2. ПРИНЦИП ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Поиск оптимальной политики ввода/вывода производственных фондов согласно принципу дифференциальной оптимизации заключается в том, что стратегия выбора переменных модели должна быть такова, чтобы в каждый момент времени обеспечить максимальный темп роста национального дохода (см. [3]), т.е. траектория $\hat{\gamma} = \{\hat{m}(t), \hat{\alpha}(t), \hat{\varphi}(t)\}$ называется дифференциально-оптимальной, если в каждый момент времени $t \ge \hat{t}$ вдоль траектории $\tilde{\gamma}(t)$, удовлетворяющей принципу дифференциальной оптимизации, правая производная национального дохода $P_{\tilde{\gamma}}^{\prime +}(t)$ принимает максимально возможное значение.

Задача, определяющая оптимальную (с точки зрения принципа дифференциальной оптимизации) политику ввода/вывода фондов, имеет следующий вид (см. [9]):
при заданном начальном состоянии системы

$$\hat{t}, \quad \hat{m} = m(\hat{t}), \quad \hat{\alpha} = \alpha(\hat{t}), \quad \hat{m} \le \hat{\alpha} \le \hat{t}; \quad \hat{m} < \hat{t}; \quad \hat{\varphi}(t), \quad t \in [\hat{m}, \hat{t}[,$$

функции $m(.)$, $\alpha(.)$, $\varphi(.)$ при каждом $t \in [\hat{t}, +\infty[$ задают решение экстремальной задачи

$$f(\alpha(t))\chi^{\beta}(\alpha(t))\varphi^{\delta}(\alpha(t))\alpha'(t) - f(m(t))\chi^{\beta}(m(t))\varphi^{\delta}(m(t))m'(t) \to \max_{\alpha(.), m(.), \varphi(.)}, \tag{2.1}$$

$$\varphi(\alpha(t))\alpha'(t) - \varphi(m(t))m'(t) = T_a'(t), \tag{2.2}$$

$$\varphi(t) - \varphi(\alpha(t))\alpha'(t) = T_p'(t), \tag{2.3}$$

$$0 \le m'(t) \le M, \quad \alpha'(t) \ge 0, \quad \varphi(t) \ge 0. \tag{2.4}$$

Решение экстремальной задачи (2.1)–(2.4) приводит к сложной системе функционально-дифференциальных уравнений (системе уравнений дифференциальной оптимизации).

Для формулировки основных результатов дадим ряд обозначений. Пусть

$$m'(t) = \begin{cases} 0, \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0, \\ \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))}, \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad 0 < \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))} < M, \\ M, \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))} \geq M, \\ 0, \quad \alpha(t) = t \quad \text{и} \quad \varphi(m(t)) = 0, \\ 0, \quad \alpha(t) < t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0, \quad \varphi(\alpha(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} < \dfrac{F(m(t))}{\varphi(m(t))}, \\ M, \quad \alpha(t) < t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0, \quad \varphi(\alpha(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} \geq \dfrac{F(m(t))}{\varphi(m(t))}, \\ 0, \quad \alpha(t) < t \quad \text{и} \quad \varphi(m(t)) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\alpha'(t) = \begin{cases} \kappa, \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0, \\ 1 - \dfrac{(1-\kappa)T'(t)}{\varphi_{\max}(t)}, \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad 0 < \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))} < M, \\ 1 - \dfrac{(1-\kappa)T'(t)}{\varphi(m(t)) + T'(t)}, \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))} \geq M, \\ \begin{cases} \kappa, \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) = 0 \quad \text{и} \quad T'(t) \neq 0, \\ 1, \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) = 0 \quad \text{и} \quad T'(t) = 0, \end{cases} \\ \dfrac{\kappa T'(t)}{\varphi(\alpha(t))}, \quad \alpha(t) < t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0, \quad \varphi(\alpha(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} < \dfrac{F(m(t))}{\varphi(m(t))}, \\ \dfrac{\varphi(m(t))}{\varphi(\alpha(t))} M + \dfrac{\kappa T'(t)}{\varphi(\alpha(t))}, \quad \alpha(t) < t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0, \quad \varphi(\alpha(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} \geq \dfrac{F(m(t))}{\varphi(m(t))}, \\ \begin{cases} \dfrac{\kappa T'(t)}{\varphi(\alpha(t))}, \quad \alpha(t) < t, \quad \varphi(m(t)) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\alpha(t)) \neq 0, \\ 1, \quad \alpha(t) < t, \quad \varphi(m(t)) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\alpha(t)) = 0, \end{cases} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} T'(t), \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))} \leq 0, \\ \varphi_{\max}(t), \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad 0 < \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))} < M, \\ \varphi(m(t))M + T'(t), \quad \alpha(t) = t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \dfrac{T'(t)}{\varphi(m(t))} \geq M, \\ T'(t), \quad \alpha(t) = t \quad \text{и} \quad \varphi(m(t)) = 0, \\ T'(t), \quad \alpha(t) < t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0, \quad \varphi(\alpha(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} < \dfrac{F(m(t))}{\varphi(m(t))}, \\ \varphi(m(t))M + T'(t), \quad \alpha(t) < t, \quad \varphi(m(t)) \neq 0, \quad \varphi(\alpha(t)) \neq 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} \geq \dfrac{F(m(t))}{\varphi(m(t))}, \\ T'(t), \quad \alpha(t) < t \quad \text{и} \quad \varphi(m(t)) = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $F(t) = f^{1/\beta}(t)\chi(t)$, а $\varphi_{\max}(t)$ является решением уравнения

$$F^{\beta}(t)\varphi_{\max}^{-\beta}(t)\left(\delta + \beta\frac{T_p'(t)}{\varphi_{\max}(t)}\right) - F^{\beta}(m(t))\varphi^{-\beta}(m(t)) = 0. \tag{2.8}$$

В [9] доказано, что уравнение (2.8) имеет единственное положительное решение $\varphi_{\max}(t)$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма (см. [9]). *Для любых положительных* $F(.)$, $\varphi(.)$, β, δ, $\beta + \delta = 1$ *и неотрицательных* $T_p'(t)$ *уравнение*

$$F^{\beta}(t)y^{-\beta}(t)\left(\delta + \beta\frac{T_p'(t)}{y}\right) = F^{\beta}(m)\varphi^{-\beta}(m)$$

однозначно определяет $y(t,m)$ *как функцию от* t *и* m. *Более того,* $y(t,m)$ *непрерывна по* t *и кусочно-непрерывна справа по* m.

Теорема существования и единственности (см. [9]). *Пусть заданы начальные данные* $\hat{m}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{t}$ *такие, что* $\hat{m} < \hat{\alpha} \le \hat{t}$, *и непрерывная функция* $\varphi_0(t) > 0$, $t \in [\hat{m},\hat{t}[$. *Тогда существует решение системы* (2.5)–(2.7), *причем единственное, где* $m(t)$, $\alpha(t)$, $t \in [\hat{t},+\infty[$, – *абсолютно непрерывные функции,* $\varphi(t)$, $t \in [\hat{m},\hat{t}[$ – *кусочно-непрерывная справа функция, удовлетворяющие краевому условию* $\varphi(t) \equiv \varphi_0(t)$, $t \in [\hat{m},\hat{t}[$, *и начальным данным* $m(\hat{t}) = \hat{m}$, $\alpha(\hat{t}) = \hat{\alpha}$. *Более того, функции* $m(t)$, $\alpha(t)$ *таковы, что* $m(t) \le \alpha(t) \le t$, $m(t) < t$.

Теорема эквивалентности (см. [9]). *Пусть заданы начальные данные* $\hat{m}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{t}$, $\hat{m} < \hat{\alpha} \le \hat{t}$, *непрерывная функция* $\varphi_0(t) > 0$, $t \in [\hat{m},\hat{t}[$, *и траектория* $\gamma(.) = \{m(.), \alpha(.), \varphi(.)\}$, *где* $m(t)$, $\alpha(t)$, $t \in [\hat{t},+\infty[$, – *абсолютно непрерывные функции с производными, непрерывными справа, удовлетворяющие условиям* $m(t) \le \alpha(t) \le t$, $m(t) < t$, *и начальным значениям* $m(\hat{t}) = \hat{m}$, $\alpha(\hat{t}) = \hat{\alpha}$; $\varphi(t)$ – *кусочно-непрерывная справа функция такая, что* $\varphi(t) \equiv \varphi_0(t)$, $t \in [\hat{m},\hat{t}[$. *Тогда для любого* $t \in [\hat{t},+\infty[$ *траектория* $\gamma(t)$ *удовлетворяет принципу дифференциальной оптимизации тогда и только тогда, когда в точке* t *справедлива система уравнений* (2.5)–(2.7).

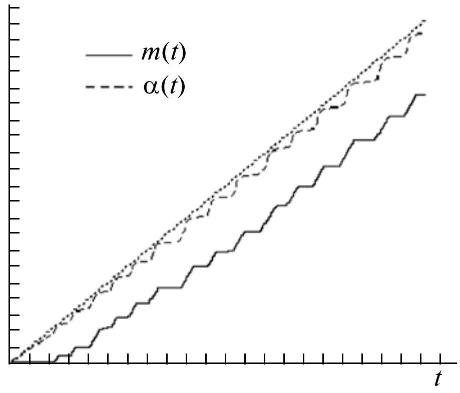
Решение системы (2.5)–(2.8) задает оптимальную стратегию вывода устаревших фондов и ввода новых, более совершенных фондов как в случае отсутствия лага при вводе новых фондов $\alpha(t) = t$ (первые четыре уравнения системы (2.5)–(2.7)), так и в случае, когда на освоение новых фондов требуется некоторое время $\alpha(t) < t$. Причем условие $\kappa = 1$ (отсутствие пассивных трудовых ресурсов) является необходимым, чтобы выполнялось условие $\alpha(t) = t$, т.е. новые фонды вводятся в производство мгновенно.

Система (2.5)–(2.7) представляет собой дифференциальные уравнения относительно переменных $m(.)$, $\alpha(.)$ и уравнение связи относительно переменных $m(.)$, $\alpha(.)$, $\varphi(.)$. Такая система является очень сложной для аналитических исследований. Поэтому был построен алгоритм для численной реализации решений системы (2.5)–(2.7) и проведен ряд экспериментов (см. [10]).

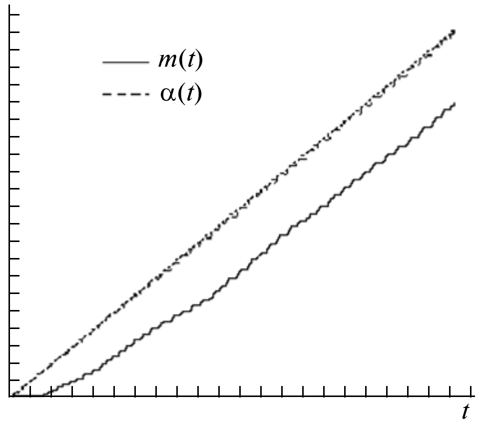
Предполагается, что научно-технический прогресс и связанные с ним капиталовложения являются результатом целенаправленного структурного изменения экономики. Такие процессы являются значительно более инерционными по отношению к подготовке и вводу в производство трудовых ресурсов. Поэтому при проведении численных экспериментов рассматривались различные варианты развития системы при экзогенно заданных уровнях научно-технического прогресса $f(t)$ и интенсивности капиталовложений $\chi(t)$ в зависимости от сценарно-задаваемого значения параметра κ распределения трудовых ресурсов на активные и пассивные.

Численные эксперименты проводились для случая, когда экзогенно задаваемые функции (трудовые ресурсы и функция капиталовложений), а также начальная функция интенсивности ввода трудовых ресурсов имеют экспоненциальный рост, т.е. $T(t) = T_0e^{pt}$, $f^{1/\beta}(t)\chi(t) = Ge^{\rho t}$, $\varphi_0 = \Phi_0e^{qt}$.

Анализ полученных численных реализаций решения (2.5)–(2.7) в зависимости от параметра κ, определяющего политику распределения общего объема трудовых ресурсов $T(t)$ на активные и пассивные, показал, что при достаточно больших значениях t траектории, определяющие срок



Фиг. 1.



Фиг. 2.

службы фондов $m(t)$ и срок освоения новых фондов $\alpha(t)$, выходят на магистральный режим. При каждом значении параметра κ для функций $m(t)$, $\alpha(t)$ имеют место трендовые траектории линейного вида $m(t) \approx t - C_1$, $\alpha(t) \approx t - C_2$, $C_i > 0$, $i = 1, 2$. Причем для значений констант C_i наблюдается монотонная зависимость от параметра κ, а именно: с увеличением κ значения C_i уменьшаются, т.е. увеличение объема активных трудовых ресурсов ведет к сокращению и срока службы фондов, и срока освоения новых фондов. При этом вдоль трендовой траектории происходит чередование интервалов освоения новых, более совершенных фондов и активного выведения устаревших фондов (с максимально возможной скоростью M). Переход с одного режима на другой в этом случае определяется соотношением капиталовооруженностей трудовых ресурсов на осваиваемых фондах $F(\alpha(t))/\varphi(\alpha(t))$ и на задействованных в производстве трудовых ресурсах $F(m(t))/\varphi(m(t))$. Пока капиталовооруженность активных трудовых ресурсов превышает капиталовооруженность пассивных, действующие фонды не выводятся ($m(t) = \text{const}$). Как только капиталовооруженность трудовых ресурсов на осваиваемых фондах сравнивается с капиталовооруженностью трудовых ресурсов, задействованных в этот момент времени в производстве, происходит переход на режим, когда старые фонды выводятся с максимальной скоростью ($m'(t) = M$) и интенсивно вводятся новые фонды, что ведет через некоторый интервал времени к падению капиталовооруженности пассивных трудовых ресурсов.

Например, для случая, когда активные трудовые ресурсы составляют 70% от общего объема трудовых ресурсов, т.е. при $\kappa = 0.7$, имеем следующие графики для функций $m(t)$, $\alpha(t)$ (см. фиг. 1).

При увеличении параметра κ, т.е. доли активных трудовых ресурсов, продолжительность интервалов освоения новых фондов и активного выведения устаревших сокращается. На фиг. 2 представлен вид графиков функций $m(t)$, $\alpha(t)$, когда активные трудовые ресурсы составляют 90% от общего объема трудовых ресурсов, т.е. значение параметра $\kappa = 0.9$.

Из фиг. 2 видно, что при таком распределении трудовых ресурсов по сравнению с предыдущим случаем сокращаются срок службы фондов $(t - m(t))$ и срок освоения новых фондов $(t - \alpha(t))$ и при этом увеличивается срок эксплуатации фондов $(\alpha(t) - m(t))$.

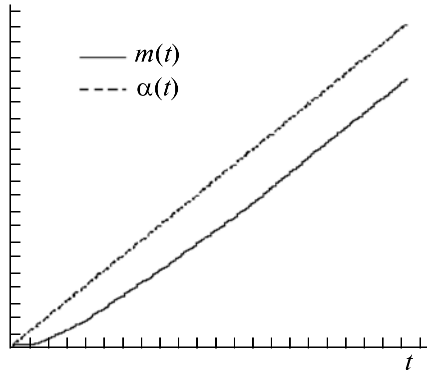
Таким образом, как показали численные эксперименты, политика вывода устаревших фондов и ввода новых определяется распределением трудовых ресурсов, при этом:

1) при больших t для сроков службы и сроков освоения фондов имеют место трендовые траектории линейного вида с постоянным запаздыванием, вдоль которых происходит чередование интервалов освоения новых, более совершенных фондов и активного выведения старых фондов;

2) при увеличении доли активных трудовых ресурсов (увеличение параметра κ) продолжительность периодов освоения и активного выведения устаревших фондов уменьшается;

3) увеличение доли активных трудовых ресурсов (увеличение параметра κ) ведет к уменьшению сроков службы фондов $(t - m(t))$;

4) увеличение доли активных трудовых ресурсов (увеличение параметра κ) ведет к уменьшению срока освоения новых фондов $(t - \alpha(t))$;



Фиг. 3.

5) увеличение доли активных трудовых ресурсов (увеличение параметра κ) ведет к увеличению сроков эксплуатации фондов ($\alpha(t) - m(t)$).

Отдельно рассмотрим случай, когда $\kappa = 1$, т.е. отсутствуют пассивные трудовые ресурсы, и, следовательно, новые фонды вводятся в производство мгновенно, $\alpha(t) \equiv t$. В этом случае имеет место модель, подробно рассмотренная в [3], определяющая оптимальную политику сворачивания устаревших фондов и являющаяся частным случаем модели (2.1)–(2.4). В [3] для экспоненциально заданных экзогенных переменных получено точное решение: функция $m(t)$ имеет постоянное запаздывание $m(t) = t - \hat{C}_1$ (фиг. 3), где $\hat{C}_1 = -\dfrac{\ln\delta}{\rho - p}$.

Кроме того, в [3] показано, что функция $m(t)$ устойчива относительно изменения начальных данных, т.е. при больших t значения функции $m(t)$ не зависят ни от длины начального интервала $[\hat{m}, \hat{t}[$, ни от функции $\varphi(t)$ на этом интервале.

Исследование устойчивости решений относительно начальных данных в общем случае показало, что функции $m(t)$, $\alpha(t)$ устойчивы относительно начальных значений $\hat{m}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{t}$, а в случае постоянных трудовых ресурсов, как активных, так и пассивных, имеет место устойчивость и относительно начальной функции $\varphi_0(t)$, т.е. при больших t значения функций $m(t)$, $\alpha(t)$ не зависят от начальных значений $\hat{m}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{t}$ и начальной функции $\varphi_0(t)$.

3. ПРИНЦИП ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В данном случае система описывается теми же соотношениями, что и в предыдущем разделе, однако если прежде исследовалось состояние системы в каждый момент времени t, то теперь выбирается некоторый плановый интервал времени $[0, T]$, на котором будет рассматриваться совокупный национальный доход, определяемый следующим выражением:

$$P = \int_0^T e^{-\xi t}\left[\lambda \int_{m(t)}^{\alpha(t)} f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)d\tau + (1-\lambda)\int_{\alpha(t)}^{t} h(\tau)f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)d\tau\right]dt, \tag{3.1}$$

где λ, $0 \le \lambda \le 1$, – параметр, определяющий потенциальный вклад в национальный доход осваиваемых фондов, и функция $h(\tau)$ характеризует снижение эффективности производственных фондов, введенных в производство в момент времени $m(t)$ и полностью выводимых из производства в момент времени t, и имеет следующий вид

$$h(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \notin [\alpha(t), t] \\ \dfrac{t - \tau}{t - \alpha(t)}, & \tau \in [\alpha(t), t], \end{cases}$$

т.е. равна единице в точке $\alpha(t)$ и нулю в точке t.

В основе выбора управляющих характеристик модели в данном случае будет использован принцип интегральной оптимизации: стратегия выбора переменных модели должна быть такова, чтобы обеспечить максимальный национальный доход за плановый период времени $[0, T]$.

В отличие от принципа дифференциальной оптимизации, где исследуется развитие системы "от достигнутого" (т.е. до момента t траектория системы известна и необходимо определить оптимальную стратегию для следующего момента времени $t + 1$), при использовании принципа интегральной оптимизации наличие второго слагаемого в функционале (3.1) позволяет исследовать "значимость будущего" в совокупном национальном доходе за счет изменения параметра λ.

3.1. *Модель с разделением трудовых ресурсов*

Задача поиска оптимальной политики вывода старых и ввода новых, более совершенных фондов на основе принципа интегральной оптимизации имеет вид

$$\int_0^T e^{-\xi t}\left[\lambda \int_{m(t)}^{\alpha(t)} f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)d\tau + (1-\lambda)\int_{\alpha(t)}^{t} h(\tau)f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)d\tau\right]dt \to \max_{m(.),\alpha(.),\varphi(.)} \tag{3.2}$$

при следующих соотношениях:

уравнение баланса активных трудовых ресурсов:

$$\int_{m(t)}^{\alpha(t)} \varphi(\tau)d\tau = T_a(t); \tag{3.3}$$

уравнение баланса пассивных трудовых ресурсов:

$$\int_{\alpha(t)}^{t} \varphi(\tau)d\tau = T_p(t); \tag{3.4}$$

и задано начальное состояние системы:

$$m(0) = \hat{m}, \quad \alpha(0) = \hat{\alpha}, \quad \varphi(s) \equiv \hat{\varphi}(s), \quad s \in [\hat{m}, 0). \tag{3.5}$$

Для решения оптимизационной задачи (3.2)–(3.5) может быть использован принцип максимума Понтрягина. Однако полного аналитического решения в данном случае получить не удается. В связи с этим был построен и исследован следующий дискретный аналог задачи (3.2)–(3.5).

С помощью точек t_i, $i = 1, \dots, n-1$, отрезок $[0, T]$ делится на n равных частей. Положим $t_0 = 0$, $t_n = T$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = d$, $i = 1\dots n$. Аналогично точками t_j, $j = -r+1, \dots, -1$, отрезок $[\hat{m}, 0]$ делится на равные части длины d. Положим $t_{-r} = \hat{m}$. Напомним, что функции $m(.)$ и $\alpha(.)$ являются неубывающими и удовлетворяют условию

$$m(t) < \alpha(t) < t. \tag{3.6}$$

Так как функции $m(.)$ и $\alpha(.)$ определяют моменты времени, то естественно предположить, что они принимают значения из множества $\{t_k, k = -r, \dots, n\}$. Из этого, а также из условий (3.6) и неубывания функций $m(.)$ и $\alpha(.)$ следует, что $\hat{\alpha} = \alpha(t_0)$ принимает одно из следующих значений $\{t_{-r+1}, \dots, t_{-1}\}$, а функции $m(.)$ и $\alpha(.)$ в точках t_k, $k = 1, \dots, n$, могут принимать значения из следующих множеств соответственно:

$$\{m(t_{k-1}), \dots, \alpha(t_k) - d\}, \{\alpha(t_{k-1}), \dots, t_k - d\}. \tag{3.7}$$

Заменим интеграл (3.1) следующей суммой:

$$d^2\sum_{k=0}^{n} e^{-\xi t_k}\left[\lambda \sum_{\tau=m(t_k)}^{\alpha(t_k)-d} f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau) + (1-\lambda)\sum_{\tau=\alpha(t_k)}^{t_k} h(\tau)f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)\right],$$

а уравнения (3.3) и (3.4) баланса трудовых ресурсов перепишем в виде

$$d\sum_{\tau=m(t_k)}^{\alpha(t_k)-d} \varphi(\tau) = T_a(t_k), \quad k = 0, \dots, n,$$

Таблица 1

	Параметры модели			
	Доля активных трудовых ресурсов κ	Потенциальный вклад в доход осваиваемых фондов λ	Начальные условия	
			$\hat{m}$	$\hat{\alpha}$
Область изменения параметров	$0 < \kappa < 1$	$0 \le \lambda \le 1$	$\hat{m} < \hat{\alpha}$	

$$d\sum_{\tau=\alpha(t_k)}^{t_k}\varphi(\tau) = T_p(t_k), \quad k = 0,\ldots,n.$$

Таким образом, решается следующая задача:

$$d^2\sum_{k=0}^{n}e^{-\xi t_k}\left[\lambda\sum_{\tau=m(t_k)}^{\alpha(t_k)-d}f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau) + (1-\lambda)\sum_{\tau=\alpha(t_k)}^{t_k}h(\tau)f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)\right] \to \max_{m(.),\alpha(.),\varphi(.)} \tag{3.8}$$

при следующих соотношениях

$$d\sum_{\tau=m(t_k)}^{\alpha(t_k)-d}\varphi(\tau) = T_a(t_k), \quad k = 0,\ldots,n, \tag{3.9}$$

$$d\sum_{\tau=\alpha(t_k)}^{t_k}\varphi(\tau) = T_p(t_k), \quad k = 0,\ldots,n, \tag{3.10}$$

и начальном состоянии

$$m(t_0) = \hat{m}, \quad \alpha(t_0) = \hat{\alpha}, \quad \varphi(s) \equiv \hat{\varphi}(s), \quad s = t_{-r},\ldots,t_{-1}. \tag{3.11}$$

Для решения задачи (3.8)–(3.11) в каждый момент времени t_k, $k = 1,\ldots,n$, производится перебор всех возможных значений $m(.)$ и $\alpha(.)$ из множества допустимых значений (3.7). В результате наборы значений $\{\bar{m}_1,\ldots,\bar{m}_n\}$ и $\{\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n\}$, доставляющие максимум выражения (3.8) и удовлетворяющие условиям (3.9)–(3.10), определяют оптимальные траектории $m(.)$ и $\alpha(.)$. Значения функции $\varphi(.)$ в точках t_k, $k = 0,\ldots,n$, определяются из соотношения (3.10):

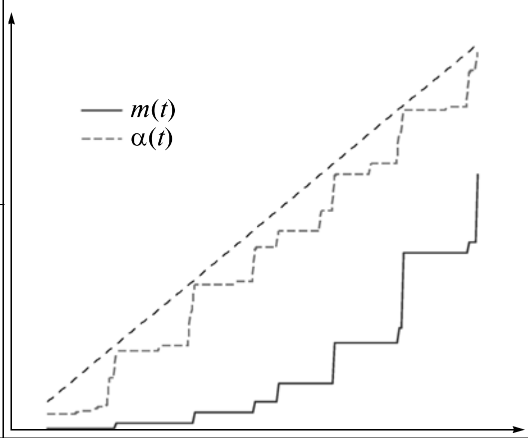
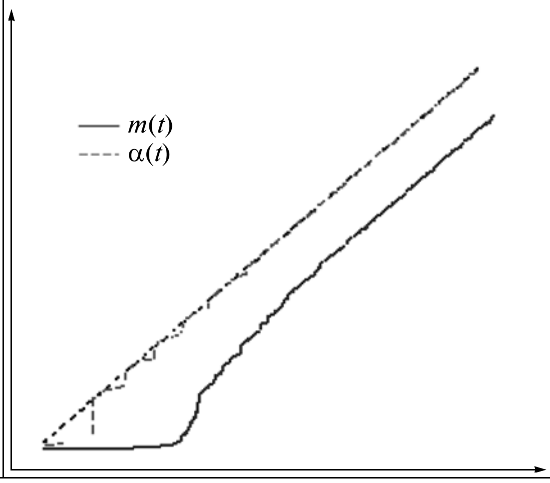
$$\varphi(t_k) = \frac{T_p(t_k)}{d} - \sum_{\tau=\alpha(t_k)}^{t_k-d}\varphi(\tau).$$

На основе проведенных численных экспериментов[2)] с использованием дискретной модели (3.8)–(3.11) было исследовано поведение траекторий $m(.)$ и $\alpha(.)$ при заданном уровне научно-технического прогресса и интенсивности капиталовложений в зависимости от изменения параметра κ (соотношения активных и пассивных трудовых ресурсов) для различных значений параметра λ, характеризующего потенциальный вклад в национальный доход осваиваемых фондов, и различных начальных данных $\hat{m}$, $\hat{\alpha}$. В табл. 1 приведены указанные параметры вместе с областью их изменения.

Численные эксперименты показали, что при достаточно большом T в зависимости от значения доли активных трудовых ресурсов κ явно выделяются два основных диапазона изменения значений этого параметра, внутри которых удается четко описать поведение траекторий $m(.)$ и $\alpha(.)$: 1) $0 < \kappa \le 0.9$, 2) $0.9 < \kappa < 1$. Далее в каждом из указанных диапазонов исследовались траектории системы для различных значений параметра λ и начальных значений $\hat{m}$ и $\hat{\alpha}$. Оказалось, что для доли активных трудовых ресурсов κ из первого диапазона $0 < \kappa \le 0.9$ вид траекторий одинаков для всех значений параметра λ (см. табл. 2). Для значений κ из второго диапазона $0.9 < \kappa < 1$ выделяются два интервала изменения параметра λ, характеризующего вклад в доход осваивае-

[2)]Численные эксперименты проводились при тех же предположениях относительно экзогенно задаваемых функций, что и для принципа дифференциальной оптимизации.

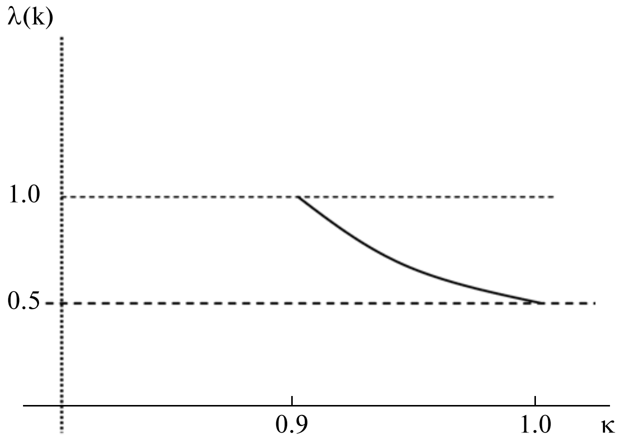
Таблица 2

Доля активных трудовых ресурсов κ	Вклад в доход осваиваемых фондов λ	Описание траекторий $m(t)$, $\alpha(t)$		Устойчивость относительно начальных значений	
				$\hat{m}$	$\hat{\alpha}$
$0 < \kappa \le 0.9$	$0 \le \lambda \le 1$		чередуются интервалы освоения новых, более совершенных фондов и активного выведения старых фондов	нет	нет
$0.9 < \kappa < 1$	$0 \le \lambda < \lambda(\kappa)$				
	$\lambda(\kappa) \le \lambda \le 1$		функция $m(t)$ выходит на режим с постоянным запаздыванием $m(t) \approx t - C$, т.е. срок службы фондов становится постоянным, и $\alpha(t)$ максимально приближается к t (с точностью до шага моделирования), т.е. максимально сокращается срок освоения новых фондов	нет	есть

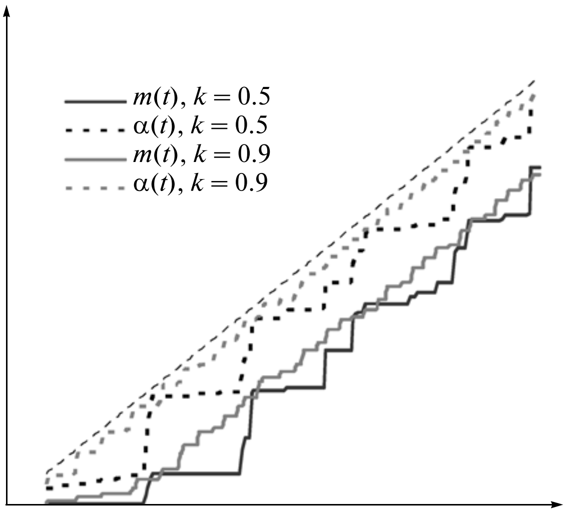
мых фондов: 1) $0 \le \lambda < \lambda(\kappa)$; 2) $\lambda(\kappa) \le \lambda \le 1$ – внутри которых траектории имеют типичный вид. При этом точка $\lambda(\kappa)$, разделяющая эти два интервала, зависит от выбранного ранее значения κ. В частности, $\lim\limits_{k\to 0.9+0} \lambda(\kappa) = 1$, т.е. если доля активных трудовых ресурсов близка к значению 0.9, то траектории ведут себя одинаково для всех значений параметра λ, $0 \le \lambda \le 1$. При увеличении значения κ значение $\lambda(\kappa)$ уменьшается, причем $\lim\limits_{k\to 1-0} \lambda(\kappa) = 0.5$. График функции $\lambda(\kappa)$ представлен на фиг. 4.

Результаты исследования зависимости траекторий системы от параметров модели приведены в табл. 2.

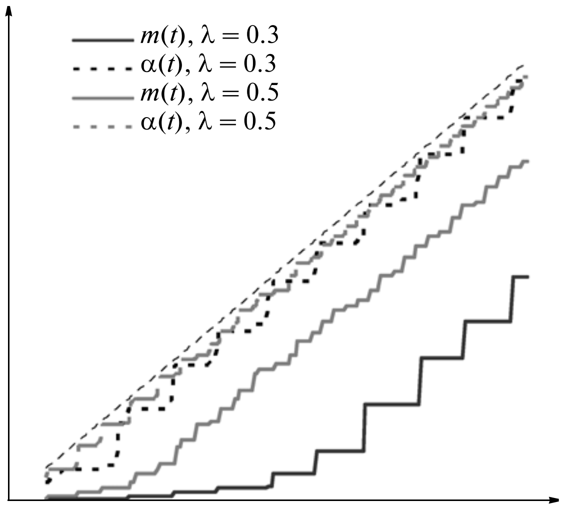
В первом случае, когда доля активных трудовых ресурсов составляет либо не менее 90% от общего объема трудовых ресурсов, либо – более 90%, но при этом значение параметра λ лежит внутри отрезка $[0, \lambda(\kappa)]$, для функций $m(t)$, $\alpha(t)$ имеют место трендовые траектории линейного вида $m(t) \approx t - C_1$, $\alpha(t) \approx t - C_2$, $C_i > 0$, $i = 1, 2$, вдоль которых происходит чередование интервалов освоения новых, более совершенных фондов и активного выведения устаревших фондов. Значения констант C_i зависят от значений κ и λ, а именно: с увеличением κ при фиксированном значении параметра λ и, наоборот, с увеличением λ при фиксированном значении параметра κ значения C_i уменьшаются. Это означает, что увеличение доли активных трудовых ресурсов в общем объеме трудовых ресурсов или значимости "настоящего" по сравнению с тем, какой вклад в на-



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

циональный доход в будущем дадут осваиваемые фонды, ведет к сокращению и срока службы фондов $(t - m(t))$, и срока освоения новых фондов $(t - \alpha(t))$, вместе с тем продолжительность интервалов освоения новых фондов и активного выведения старых фондов сокращаются (см. фиг. 5, 6). Таким образом, с увеличением параметров κ и λ процесс ввода-вывода основных фондов становится более интенсивным.

Во втором случае, когда доля активных трудовых ресурсов превышает 90% от общего объема трудовых ресурсов и значение параметра $\lambda \in [\lambda(\kappa), 1]$, зависимость траекторий $m(t)$ и $\alpha(t)$ от параметра κ такая же, как описано выше, и отсутствует зависимость от параметра λ.

Таким образом, поведение траекторий системы в первую очередь определяется долей активных трудовых ресурсов, в случае, когда доля активных трудовых ресурсов κ составляет не более 0.9 от общего объема трудовых ресурсов, для траекторий $m(t)$, $\alpha(t)$ справедливы следующие выводы:

1) при больших t для сроков службы и сроков освоения фондов имеют место трендовые траектории линейного вида с постоянным запаздыванием, вдоль которых происходит чередование интервалов освоения новых, более совершенных фондов и активного выведения старых фондов;

2) с увеличением доли активных трудовых ресурсов κ продолжительность интервалов освоения новых фондов и активного выведения старых фондов сокращаются;

3) с увеличением доли активных трудовых ресурсов κ сроки службы и освоения новых фондов ($t - m(t)$ и $t - \alpha(t)$ соответственно) уменьшаются;

4) с увеличением доли активных трудовых ресурсов к срок эксплуатации фондов $(\alpha(t) - m(t))$ увеличивается.

Заметим, что данные закономерности справедливы для произвольного $0 \le \lambda \le 1$ и, в частности, для $\lambda = 1$, при котором можно сравнить поведение траекторий $m(t)$ и $\alpha(t)$, полученных с использованием двух разных принципов оптимизации. Данное сравнение приводит к следующему выводу: поведение траекторий $m(t)$ и $\alpha(t)$ в зависимости от распределения трудовых ресурсов для случаев дифференциального и интегрального принципов оптимизации идентичны.

Перейдем к сравнению проблем устойчивости функций $m(t)$ и $\alpha(t)$ относительно начальных данных. Напомним, что в случае дифференциальной оптимизации функции $m(t)$, $\alpha(t)$ устойчивы относительно начальных значений $\hat{m}$, $\hat{\alpha}$ при произвольном $0 < \kappa < 1$. В случае интегральной оптимизации (при $\lambda = 1$) функции $m(t)$, $\alpha(t)$ являются устойчивыми только относительно начального значения $\hat{\alpha}$ при $0.9 < \kappa < 1$.

3.2. Модель без разделения трудовых ресурсов

В модели (3.2)–(3.5) разделение всего объема трудовых ресурсов на активные и пассивные в каждый момент времени t осуществляется вне системы. В связи с этим встает вопрос: при отсутствии принудительного разделения трудовых ресурсов на активные и пассивные обладает ли система способностью самостоятельно распределять трудовые ресурсы и насколько такое разделение будет эффективным по сравнению с рассмотренным выше?

Рассмотрим следующую задачу: обеспечить максимальный национальный доход за плановый период времени $[0, T]$, т.е. максимум функционала

$$\int_0^T e^{-\xi t}\left[\lambda \int_{m(t)}^{\alpha(t)} f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)d\tau + (1-\lambda)\int_{\alpha(t)}^{t} h(\tau)f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)d\tau\right]dt \to \max_{m(.),\alpha(.),\varphi(.)} \tag{3.12}$$

при следующем соотношении на трудовые ресурсы:

уравнение баланса трудовых ресурсов

$$\int_{m(t)}^{t} \varphi(\tau)d\tau = T(t); \tag{3.13}$$

и задана информация о начальном состоянии системы

$$m(0) = \hat{m}, \quad \alpha(0) = \hat{\alpha}, \quad \varphi(s) \equiv \hat{\varphi}(s), \quad s \in [\hat{m}, 0). \tag{3.14}$$

В отличие от задачи (3.2)–(3.5), где распределение трудовых ресурсов на активные и пассивные определялось априори как соответствующая доля от общего объема трудовых ресурсов в каждый момент времени, в данном случае задается только общий объем трудовых ресурсов. Такая постановка позволит проанализировать, способна ли система самостоятельно осуществлять разделение трудовых ресурсов на активные и пассивные и насколько эффективно, с точки зрения получаемого национального дохода.

Для задачи (3.12)–(3.14) также был построен и исследован следующий дискретный аналог:

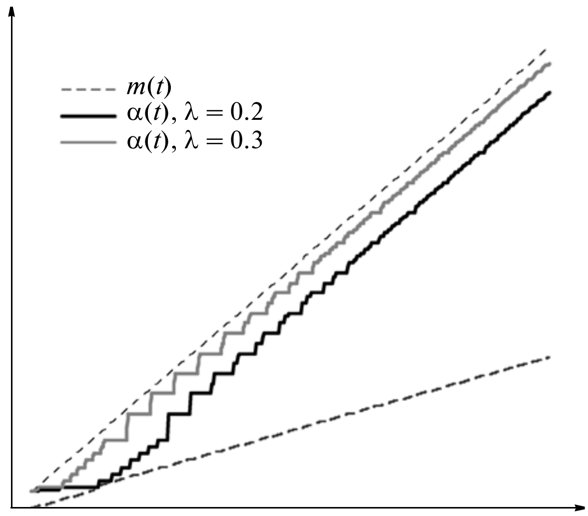
$$d^2\sum_{k=0}^{n} e^{-\xi t_k}\left[\lambda \sum_{\tau=m(t_k)}^{\alpha(t_k)-d} f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau) + (1-\lambda)\sum_{\tau=\alpha(t_k)}^{t_k} h(\tau)f(\tau)\chi^{\beta}(\tau)\varphi^{\delta}(\tau)\right] \to \max_{m(.),\alpha(.),\varphi(.)}, \tag{3.15}$$

$$d\sum_{\tau=m(t_k)}^{t_k} \varphi(\tau) = T(t_k), \quad k = 0,\ldots,n, \tag{3.16}$$

$$m(t_0) = \hat{m}, \quad \alpha(t_0) = \hat{\alpha}, \quad \varphi(s) \equiv \hat{\varphi}(s), \quad s = t_{-r},\ldots,t_{-1}. \tag{3.17}$$

Принцип решения данной задачи такой же, как и задачи (3.8)–(3.11).

На основе проведенных численных экспериментов с использованием дискретной модели (3.15)–(3.17) было исследовано поведение траекторий $m(.)$ и $\alpha(.)$ при заданном уровне научно-технического прогресса и интенсивности капиталовложений в зависимости от значений пара-



Фиг. 7.

метра λ, характеризующего потенциальный вклад в национальный доход осваиваемых фондов, и различных начальных данных.

В табл. 3 приведены указанные параметры вместе с областью их изменения.

Численные эксперименты показали, что при достаточно большом T явно выделяются три основных диапазона изменения значений λ, внутри которых удается четко описать поведение траекторий $m(.)$ и $\alpha(.)$: $0 \le \lambda \le 0.3$, $0.3 < \lambda < 0.45$ и $0.45 \le \lambda \le 1$. В каждом из указанных диапазонов исследовалась зависимость траекторий системы от начальных значений $\hat{m}$ и $\hat{\alpha}$. Кроме того, в каждом случае вычислялось значение доли активных трудовых ресурсов κ_t от общего объема трудовых ресурсов в каждый момент времени t как отношение объема трудовых ресурсов, занятых в производстве в этот момент времени, к общему объему трудовых ресурсов по формуле

$$\kappa_t = \frac{T_a(t)}{T(t)} = \frac{\int_{m(t)}^{\alpha(t)} \varphi(\tau) d\tau}{T(t)}.$$

Анализ полученных в каждом случае значений κ_t показал, что при больших значениях t справедливо равенство $\kappa_t \approx k = \text{const}$.

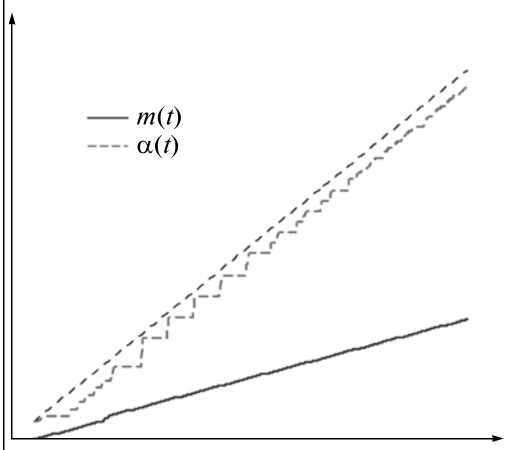
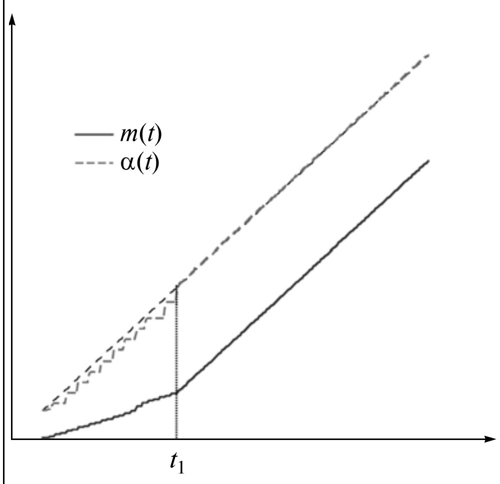
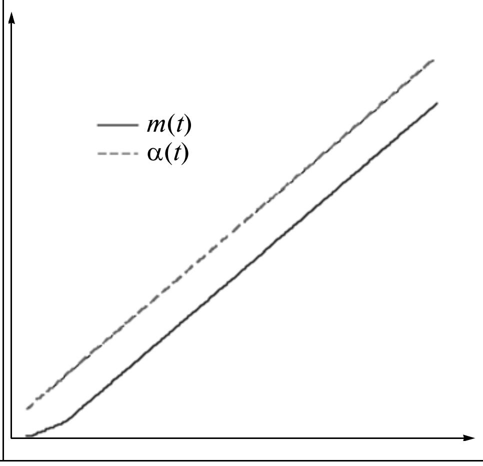
Результаты исследования зависимости траекторий системы от параметров модели приведены в табл. 4.

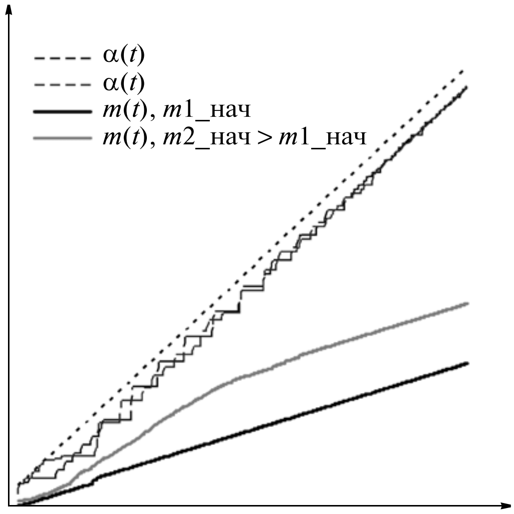
Исследование поведения траекторий $m(.)$ и $\alpha(.)$ от изменения параметра λ показало, что в первом случае при увеличении λ срок освоения новых фондов (разница $t - \alpha(t)$) сокращается, при этом изменения сроков службы фондов не происходит, т.е. функция $m(t)$ не меняется (см. фиг. 7). Во втором случае с увеличением λ выход на стационарный режим происходит быстрее, и срок службы фондов сокращается. В третьем случае поведение траекторий $m(.)$ и $\alpha(.)$ не зависит от значения параметра λ.

Таблица 3

Параметры модели	Потенциальный вклад в доход осваиваемых фондов	Начальные условия	
	λ	$\hat{m}$	$\hat{\alpha}$
Область изменения	$0 \le \lambda \le 1$	$\hat{m} < \hat{\alpha}$	

Таблица 4

<table>
<tr><th rowspan="2">Вклад в доход осваиваемых фондов λ</th><th rowspan="2" colspan="2">Описание траекторий $m(t)$, $\alpha(t)$</th><th colspan="2">Устойчивость относительно начальных значений</th><th rowspan="2">Доля активных трудовых ресурсов k</th></tr>
<tr><th>$\hat{m}$</th><th>$\hat{\alpha}$</th></tr>
<tr><td>$0 \le \lambda \le 0.3$</td><td>
</td><td>функция $m(t)$ есть линейная функция, $\alpha(t)$ при больших t выходит на режим с постоянным запаздыванием, т.е. $\alpha(t) = t - A$, т.е. срок освоения новых фондов становится постоянным</td><td>нет</td><td>есть</td><td>$0.4 \le k \le 0.8$ (при увеличении λ значение k увеличивается и не зависит от $\hat{m}$, $\hat{\alpha}$)</td></tr>
<tr><td>$0.3 < \lambda < 0.45$</td><td>
</td><td>функция $m(t)$ с некоторого момента времени t_1 выходит на режим с постоянным запаздыванием $m(t) = t - C$, $\alpha(t)$ выходит на режим $\alpha(t) = t$</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$k = 1$</td></tr>
<tr><td>$0.45 \le \lambda \le 1$</td><td>
</td><td>функция $m(t)$ достаточно быстро выходит на режим с постоянным запаздыванием $m(t) = t - C$, $\alpha(t)$ выходит на режим $\alpha(t) = t$</td></tr>
</table>



Фиг. 8.

Как видно из табл. 4, во всех трех случаях наблюдается неустойчивость траекторий при изменении начального значения $\hat{m}$ и устойчивость при изменении начального значения $\hat{\alpha}$. Причем в первом и третьем случаях удалось выявить зависимость траекторий от значения $\hat{m}$, а именно: в первом случае при увеличении значения $\hat{m}$ срок эксплуатации фондов $(\alpha(t) - m(t))$ сокращается, при этом срок освоения новых фондов $(t - \alpha(t))$ не меняется при больших t (см. фиг. 8); в третьем случае срок службы фондов $(t - m(t))$ увеличивается.

Анализ рассчитанных значений для доли активных трудовых ресурсов κ показывает, что в зависимости от параметра λ, характеризующего вклад в доход осваиваемых фондов, происходит распределение трудовых ресурсов на активные и пассивные внутри системы: если более приоритетным является "будущее" $(0 \le \lambda \le 0.3)$, то часть трудовых ресурсов направляется на осваивание новых фондов; во втором случае $(0.3 < \lambda < 0.45)$, как видно из графика функции $\alpha(t)$, начиная с некоторого момента t_1, все трудовые ресурсы переводятся в разряд активных, и это происходит тем быстрее, чем больше значение λ; в третьем случае, когда более приоритетным является "настоящее" $(0.45 \le \lambda \le 1)$, практически сразу все трудовые ресурсы переводятся в разряд активных.

Вычисление доли активных трудовых ресурсов в каждом случае позволяет сравнить результаты функционирования экономической системы для двух моделей: 1) с априорным разделением трудовых ресурсов на активные и пассивные (модель (3.2)–(3.5)); 2) без разделения трудовых ресурсов (модель (3.12)–(3.14)). Для значений доли активных трудовых ресурсов, полученных в модели без разделения трудовых ресурсов, был вычислен национальный доход (3.1) для двух моделей при прочих равных условиях, результаты расчетов представлены в табл. 5.

Как видно из таблицы, модель без разделения трудовых ресурсов на активные и пассивные дает более высокий результат, что естественно, поскольку в этом случае у системы имеется более широкий выбор для оптимизации своего функционирования.

Итак, полученные результаты показали, что вопрос распределения трудовых ресурсов в таких задачах является очень важным и приводит к необходимости разработки отдельных механизмов

Таблица 5

Модель	Национальный доход, усл. ед.			
	Доля активных трудовых ресурсов, κ			
	$\kappa = 0.4$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 0.6$	$\kappa = 0.8$
С разделением трудовых ресурсов (3.14)–(3.17)	12120	11195	11315	12376
Без разделения трудовых ресурсов (3.18)–(3.20)	14971	13429	12976	13721

перераспределения трудовых ресурсов внутри системы. Кроме того, необходимо учитывать и тот факт, что для вводимых фондов, связанных с введением новой, более совершенной технологии, требуются и более квалифицированные трудовые ресурсы, чем те, что высвобождаются с выводимых фондов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Solow R.M.* Technical progress, capital formation and economic growth // American Economic Review. 1962. № 52.
2. *Канторович Л.В., Горьков Л.И.* Функциональные уравнения однопродуктовой модели / Докл. АН СССР. 1959. 129. № 4. С. 732.
3. *Канторович Л.В., Жиянов В.И., Хованский А.Г.* Принцип дифференциальной оптимизации в применении к однопродуктовой динамической модели экономики // Сибирск. матем. ж. 1978. Т. XIX. № 5. С. 1053–1064.
4. *Чуканов С.В.* Об одной динамической модели экономики с фондами, дифференцированными по моментам создания // В сб. Модели и методы в прогнозировании научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1984. Вып. 2. С. 46–61.
5. *Оленев Н.Н., Поспелов И.Г.* Исследование инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Матем. моделирование: Методы описания и исследования сложных систем / Под ред. А.А. Самарского, Н.Н. Моисеева, А.А. Петрова. М.: Наука, 1989. С. 175–200.
6. *Cass D., Stiglitz J.E.* The implications of alternative saving and expectations hypotheses for choices of technique and patterns of growth // J. Political Economy. 1969. V. 77. P. 586–627.
7. *Calvo, Guillermo A.* Optimal growth in a putty-clay model // Econometrica. 1976. V. 44. P. 867–878.
8. *Cooley, Thomas F., Hansen G.D., Prescott E.C.* Equilibrium business cycles with idle resources and variable capacity utilization // Econ. Theory. 1995. V. 6. P. 35–49.
9. *Бекларян Л.А., Борисова С.В.* Об одной динамической модели замещения производственных мощностей // Экономика и матем. методы. 2002. Т. 38. № 3. С. 73–93.
10. *Бекларян Л.А., Борисова С.В., Хачатрян Н.К.* Однопродуктовая динамическая модель замещения производственных фондов / Препринт # WP/2008/242. М.: ЦЭМИ РАН.