

УДК 551.466.6.62

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ВОЛН ЦУНАМИ

© 2013 г. Е. Н. Пелиновский*, **, А. А. Родин*–***

*Институт прикладной физики РАН

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46

**Нижегородский государственный технический университет

603950 Нижний Новгород, ул. Минина, 24

***Институт кибернетики, Таллинский технологический университет

Таллин, Эстония

E-mail: pelynovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru

E-mail: xmrarro@gmail.com

Поступила в редакцию 16.07.2012 г.

Получено аналитическое решение нелинейных уравнений мелкой воды, определяющее высоты волн цунами, выходящих из очага. В очаге задано начальное смещение уровня воды и распределение скоростей частиц. Численное решение показало, что аналитические оценки хорошо совпадают с рассчитанными в широком диапазоне изменения характеристик очага, даже если выходящие из очага волны обрушиваются.

Ключевые слова: цунами, нелинейная теория, мелкая вода, ударная волна.

DOI: 10.7868/S0002351513050088

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании генерации волн цунами в очаге, как правило, решаются линейные уравнения мелкой воды с заданными начальными смещениями уровня воды и скоростей частиц в очаге [1, 2]. Наиболее распространенной является так называемая поршневая подвижка, приводящая к неоднородной пространственной структуре мгновенного поднятия дна, рассчитываемая по известной формуле Окада [3]. В то же время понятно, что дно движется также и в горизонтальном направлении, приводя к появлению начального распределения скорости частиц воды в очаге. Такая ситуация реализуется при смещении дна на склоне [4] или при образовании оползней, часто возникающих при землетрясении [5]. В рамках линейной теории учет горизонтальной скорости не является трудным и служит дополнительным источником анизотропии излучения волн цунами [1, 6, 7]. В то же время в очаге возникающие волны имеют достаточно большую амплитуду, и если очаг расположен близко к берегу, то такие волны являются нелинейными. Аналитическое решение нелинейной задачи о распаде начального возмущения, возникающего при поршневой подвижке, в рамках уравнений мелкой воды получено для ровного дна [1], откоса постоянного уклона [8–10] и линейно наклонен-

ного канала параболического сечения [11]. В целом нелинейные эффекты для куполообразных (положительных) смещений водной поверхности оказываются малыми непосредственно в очаге. В то же время волны отрицательной полярности являются обычно более нелинейными [12–16]. Если к тому же учесть, что начальная горизонтальная скорость частиц ведет к увеличению амплитуды волны, то нелинейные эффекты в очаге могут оказаться существенными для волн цунами отрицательной полярности. Именно эта проблема и анализируется в данной статье.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Исходные уравнения мелкой воды, учитывающие в том числе ударные волны (боры), имеют дивергентный вид

$$\frac{\partial(Hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[Hu^2 + \frac{1}{2}gH^2 \right] = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [Hu] = 0, \quad (1)$$

где $H(x, t) = h + \eta(x, t)$ – глубина воды, отсчитываемая от дна, $\eta(x, t)$ – возвышение водной поверхности, u – усредненная горизонтальная скорость водного потока, g – ускорение силы тяжести и h – невозмущенная глубина бассейна, предполагаемая здесь постоянной. Поясним сначала сам эффект более сильной нелинейности во впадине волны, чем в ее гребне. Если отыскивать

распространяющиеся в одну сторону решения системы (1), то они описываются так называемой волной Римана [1, 12]

$$H(x, t) = H_0[x - V(H)t], \quad V = 3\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh}, \quad (2)$$

где $H_0(x)$ – начальная форма волны, которая должна быть достаточно гладкой. Тенденция к обрушению переднего склона волны ясно видна из-за зависимости скорости распространения отдельных точек профиля от локального значения поля – глубины $V(H)$ и неоднократно описывалась в литературе. Для гребня в силу корневого слагаемого в (2) разница в скоростях распространения отдельных точек профиля относительно невелика, так что нелинейные эффекты проявляются на больших расстояниях. Между тем, если в начальном возмущении есть глубокая впадина, так что ее высота, отсчитываемая от дна, оказывается меньше критической [14, 15]

$$H < H_{cr} = \frac{4}{9}h, \quad (3)$$

то скорость распространения $V(H)$ становится во впадине отрицательной, в то время как горб распространяется вправо ($x > 0$). Естественно, что это приводит к почти мгновенному опрокидыванию волны и появлению в ней отражения, характеристики которого уже не могут быть определены в рамках римановой волны (2); они найдены численно в [14, 15]. Указанные выше эффекты наблюдались при специфических начальных условиях, соответствующих Римановой волне, распространяющихся в одну сторону. В частности, начальная скорость частиц воды в Римановой волне равна

$$u(x, 0) = 2[\sqrt{gH_0(x)} - \sqrt{gh}]. \quad (4)$$

В случае произвольных начальных условий возникают волны разной амплитуды, бегущие в противоположных направлениях, и нелинейные эффекты могут по-разному проявляться в них. Получим решение нелинейных уравнений (1), учитывая оба начальных условия, как на смещение водной поверхности $H_0(x)$, так и на начальную скорость частиц $u_0(x)$. Для упрощения расчетов примем следующую аппроксимацию поля скорости

$$u(x, 0) = 2\alpha[\sqrt{gH_0(x)} - \sqrt{gh}]. \quad (5)$$

где α – произвольное число, изменяемое от 0 до 1. В предельном случае ($\alpha = 0$), нулевая скорость соответствует поршневой подвижке, когда генерируются волны в обе стороны от очага, а во втором ($\alpha = 1$) – точному возмущению в Римановой волне (4). Промежуточные значения α позволяют получить волны, распространяющиеся в разные стороны с разным “весом”.

Для получения аналитического решения уравнений (1) преобразуем эту систему к уравнениям для Римановых инвариантов

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial t} + c_{\pm} \frac{\partial I_{\pm}}{\partial x} = 0, \quad c_{\pm} = \pm\sqrt{gh} + \frac{3}{4}I_{\pm} + \frac{1}{4}I_{\mp}, \quad (6)$$

где римановы инварианты есть

$$I_{\pm} = u \pm 2[\sqrt{gH} - \sqrt{gh}]. \quad (7)$$

Важно подчеркнуть, что римановы инварианты сохраняются в любой момент времени и эффект взаимодействия волн, бегущих в разных направлениях, проявляется через переменность скоростей их распространения. Вне очага волны распространяются независимо как Римановы волны, и с учетом связи скорости и смещения типа (4) величины инвариантов есть

$$I_{\pm} = \pm 4[\sqrt{gH_{\pm}} - \sqrt{gh}], \quad (8)$$

а в очаге с использованием (5)

$$I_{\pm}(x, 0) = 2(\alpha \pm 1)[\sqrt{gH_0(x)} - \sqrt{gh}]. \quad (9)$$

Приравнивая величины инвариантов для экстремумов волн (амплитуды гребня или глубины впадины), мы можем найти амплитуды волн, выходящих из очага

$$\frac{H_{\pm}}{h} = \left[1 \mp \alpha + (1 \pm \alpha)\sqrt{\frac{H_0}{h}} \right]^2. \quad (10)$$

Таким образом, по заданным максимальным и минимальным смещениям уровня воды в очаге удастся рассчитать максимальные амплитуды гребня и глубины впадины, “левой” (–) и “правой” (+) волн, выходящих из очага (напомним, что глубина H отсчитывается от дна). К сожалению, форма волн не находится аналитически и здесь необходимо численно решать систему (1). В случае малых смещений водной поверхности легко дать полное описание волнового поля из (1)

$$H(x, t) = h \left[1 + \frac{1+\alpha}{2} \eta_0(x-ct) + \frac{1-\alpha}{2} \eta_0(x+ct) \right], \quad (11)$$

где $\eta_0(x) = H_0(x) - h$ – возвышение водной поверхности, отсчитываемое от невозмущенной поверхности воды. Экстремальные значения поля, находимые из (11), являются асимптотиками формулы (10) при уменьшении высоты волны.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Отметим важное ограничение полученного результата в нелинейной теории. Поскольку мы использовали сохраняющиеся римановы инварианты, то это справедливо только для необрушенных волн. С другой стороны, волны большой амплитуды всегда обрушиваются. Поэтому для оценки применимости формулы (10) и тем самым для

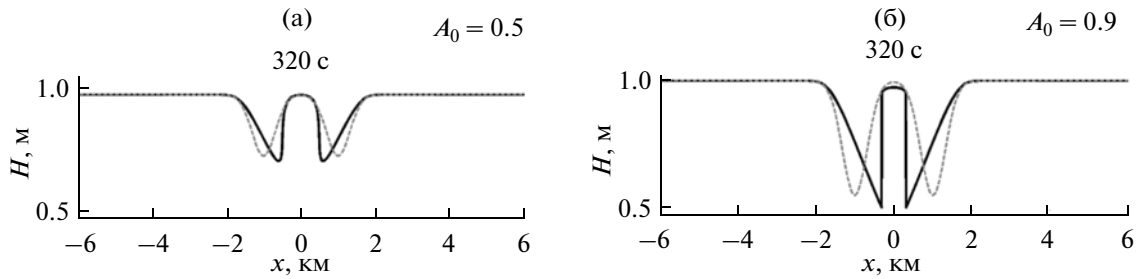


Рис. 1. Формирование волнового поля при $\alpha = 0$. Черная сплошная линия – численный расчет, штриховая – формула (11) линейной теории.

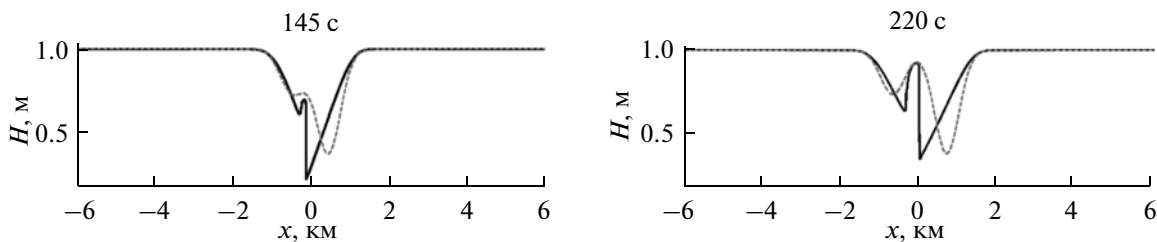


Рис. 2. То же, что на рис. 1 при $\alpha = 0.4$ и $A_0 = 0.9$.

оценки роли нелинейных эффектов в очаге нами выполнено численное интегрирование системы (1) с помощью программного пакета Clawpack (www.clawpack.org), решающем гиперболическую систему уравнений (1) методом конечных объемов [17]. Уравнения мелкой воды решались с периодическими граничными условиями на расчетной области длиной 12 км и шагом в пространстве – 0.5 м, невозмущенная глубина бассейна принята равной $h = 1$ м. В качестве начального условия выбран гауссовый импульс отрицательной полярности (впадина), для которой нелинейные эффекты должны проявляться сильнее

$$H_0(x) = h \left[1 - A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{l^2}\right) \right], \quad (12)$$

с характерной полушириной импульса $l = 0.5$ км. Амплитуда волны A_0 менялась в широких пределах вплоть до 0.9.

В первой серии экспериментов рассматривалась поршневая подвижка ($\alpha = 0$), когда распад начального возмущения происходит на две волны одинаковой амплитуды. На рис. 1а показана форма волны в момент времени 320 с при начальной впадине 0.5 м. Как видим, нелинейные эффекты здесь весьма заметны, и рассчитанные амплитуды впадин (0.27 м) превышают линейные значения (0.25 м). Расчеты по нелинейным формулам (11) приводят к той же амплитуде волн (0.27 м), что и в расчетах. Ясно видно, что волна преобразовалась в ударную практически сразу после выхода из очага и далее она распространяется, уменьша-

ясь по амплитуде (мы не приводим здесь соответствующих картинок). При увеличении глубины впадины до 0.9 м (рис. 1б) амплитуда волны в расчетах (0.56 м) остается близкой к “нелинейному” значению (0.57 м), хотя здесь нелинейные эффекты максимальны и ударные волны формируются еще в очаге. И в том и другом случае волновое поле далеко от линейного, представленного штриховой линией на рис. 1.

Во второй серии начальное поле скоростей присутствует ($\alpha = 0.4$), и мы приведем здесь наиболее нелинейный случай ($A_0 = 0.9$), см. рис. 2, где показано волновое поле в моменты времени 145 и 220 с. Волна, уходящая вправо за счет начальной скорости, имеет большую амплитуду, так что ударная волна формируется в центре очага. Волна, уходящая влево, напротив, имеет меньшую амплитуду, но и она формируется в ударную. Ввиду сильной диссипации, амплитуда “правой” волны (0.7 м) оказывается несколько меньшей предсказания для необрушенной волны (0.73 м), но различия достаточно малы. Для волны, уходящей влево, рассчитанная и наблюдаемая амплитуды оказываются одинаковыми (0.47 м). И здесь линейная теория хорошо описывает только передние фронты волн.

В третьей серии экспериментов начальная скорость достаточно велика ($\alpha = 0.9$), так что излучение из очага идет преимущественно вправо. На рис. 3 показано волновое поле в момент времени 145 и 245 с, амплитуда начальной впадины есть 0.4 м. Действительно, “левая” волна в дан-

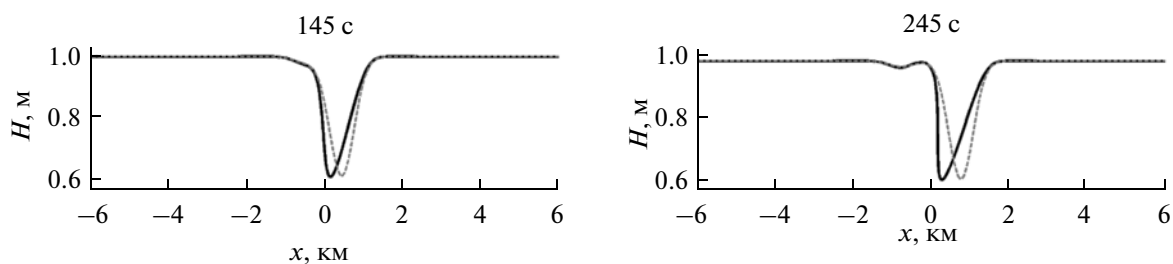


Рис. 3. То же, что на рис. 1 при $\alpha = 0.9$ и $A_0 = 0.4$.

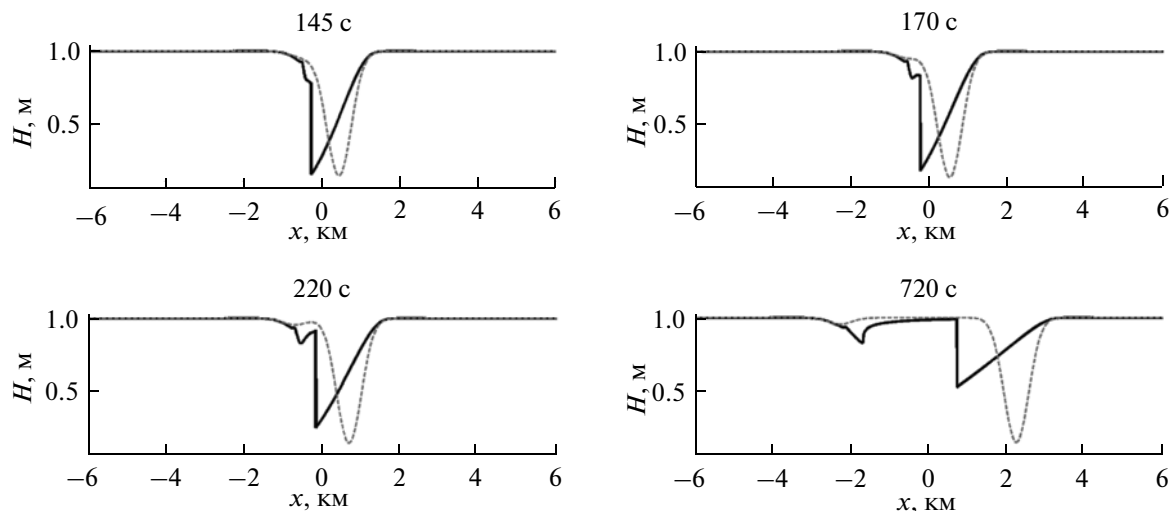


Рис. 4. То же, что на рис. 1 при $\alpha = 0.9$ и $A_0 = 0.9$.

ном случае очень мала и фактически хорошо описывается линейной теорией. Волна, уходящая вправо, преобразуется в ударную, но ее амплитуда полностью описывается предсказанным по формуле (11) значением 0.38 м.

Увеличение глубины начального “провала” до 0.9 м при большой начальной скорости ведет к формированию сильной ударной волны вправо, при этом его фронт сформировался в “левой” ча-

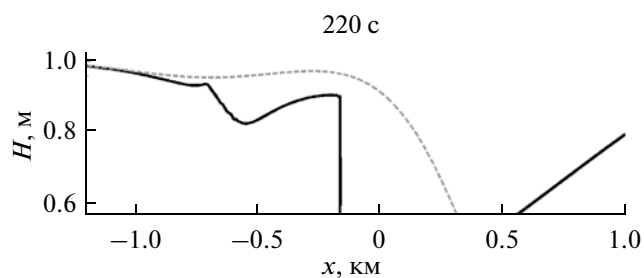


Рис. 5. То же, что на рис. 1 при $\alpha = 0.9$ и $A_0 = 0.9$ (увеличенный масштаб).

сти очага, см. рис. 4, построенный для различных моментов времени (145, 170, 220 и 720 с). Из-за сильного затухания амплитуда волны (0.81 м) существенно меньше предсказанной (0.88 м) по формуле (11). В то же время на рисунке видны две “левые” волны, впереди бежит малая волна амплитудой 0.07 м (ее значение совпадает с предсказанным), а затем существенно большая волна с амплитудой 0.17 м. Разделение “левой” волны на две хорошо видно на рис. 5 в увеличенном масштабе. Природа второй волны связана с отражением от фронта ударной волны, и этот процесс был предсказан в [18, 19] и детально изучен в [14–16]. Естественно, что он не описывается формулой (10), полученной для необрушивающихся волн.

При рассмотрении положительного начального импульса уже нет сильного нелинейного эффекта отражения, вытекающего из (2). Тем не менее эффект самоотражения от ударного фронта, предсказанный в [18, 19], в принципе должен сохраняться. Он связан с тем, что ударная волна вписывается в риманову волну только с точностью до малой квадратичной нелинейности. Рас-

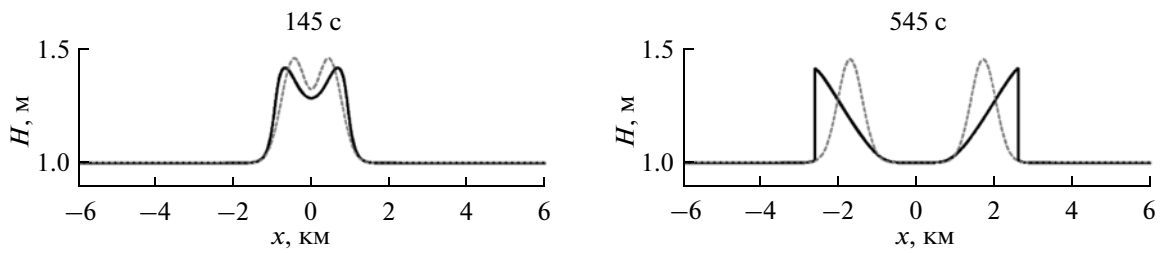


Рис. 6. То же, что на рис. 1 при $\alpha = 0$ и $A_0 = -0.9$ (колоколообразное смещение в очаге).

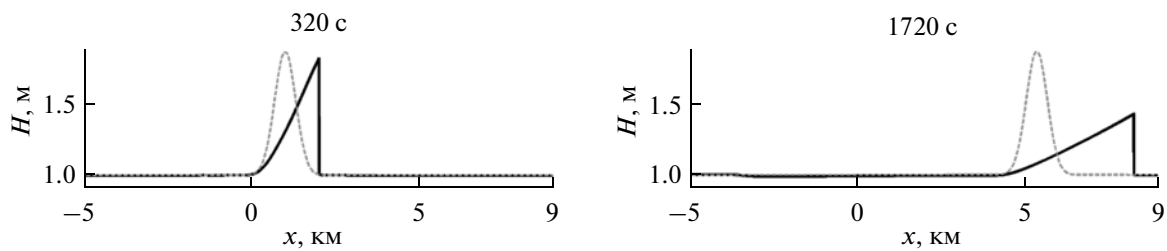


Рис. 7. То же, что на рис. 6 при $\alpha = 1$ и $A_0 = -0.9$.

смотрим поэтому сразу гребень большой амплитуды ($A_0 = -0.9$). В случае $\alpha = 0$ (рис. 6) мы имеем дело с распадом возмущения на две одинаковые волны. Даже с учетом нелинейного затухания амплитуда импульсов после распада (0.41 м) хорошо описывается формулой (11) в отличие от предсказаний линейной теории (0.45 м).

В сущности, эффект самоотражения в этом случае не наблюдается, хотя смещение уровня моря в очаге сравнимо с глубиной бассейна, что связано с уменьшением амплитуды волны при выходе из очага до 0.4 м.

В случае же, когда в очаге генерируется Риманова волна той же амплитуды ($A_0 = 0.9$, $\alpha = 1$), на рис. 7 видна слабая волна амплитуды 0.01 м, отраженная от сформировавшегося ударного фронта (она очень хорошо заметна на рис. 8 в увеличенном масштабе). Тем не менее величина отражения

достаточно мала (несколько процентов) и оно не представляет практического интереса.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано, что нелинейные эффекты в очаге цунами увеличиваются, если в нем присутствует также поле начальных скоростей. И хотя достаточно быстро образуются ударные волны (при большом начальном смещении в очаге), их амплитуды хорошо предсказываются формулой (10), полученной для необрушенных волн. Исключением является формирование ударной волны отрицательной полярности, амплитуда которой превышает критическое значение (3). В этом случае, такая волна “сбрасывает” лишнюю энергию, распространяющуюся в противоположную сторону. Однако такой эффект наиболее заметен, по существу, при очень большой амплитуде как смещения, так и скорости течений, т.е. при весьма специфических условиях. В целом же можно утверждать, что предлагаемая аналитическая теория хорошо предсказывает амплитуды волн цунами, выходящие из очага, несмотря на их большую нелинейность и обрушение.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№№ 11-05-00216, 12-05-33087), МК-1440.2012.5, ЕТФ 8870, SF0140007s11, программы DoRa4. AP также благодарит за поддержку Эстонский центр нелинейных исследований CENS.

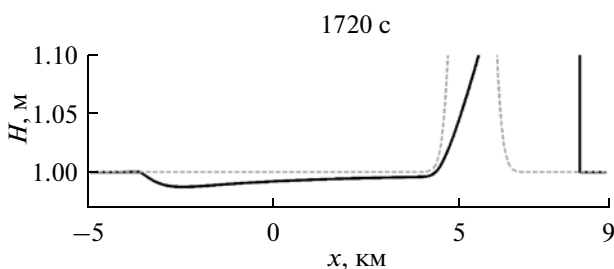


Рис. 8. То же, что на рис. 7 в увеличенном масштабе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
2. Левин Б.В., Носов М.А. Физика цунами и родственных явлений в океане. М.: Янус-К, 2005. 360 с.
3. Okada Y. Internal deformations due to shear and tensile faults in half-space // Bull. Seismic Soc. Am. 1985. V. 82. P. 1018–1040.
4. Tanioka Y., Satake K. Tsunami generation by horizontal displacement of ocean bottom // Geophys. Res. Lett. 1996. V. 23. P. 861–864.
5. Yalciner A.C., Pelinovsky E.N., Okal E. et al. Submarine landslides and tsunamis. Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 2003. 330 p.
6. Новикова Л.Е., Островский Л.А. О возбуждении волн цунами бегущей подвижкой океанического дна // Методы расчета возникновения и распространения цунами. М.: Наука, 1978. С. 88–99.
7. Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983. 175 с.
8. Carrier G.F., Greenspan H.P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 97–109.
9. Tinti S., Tonini R. Analytical evolution of tsunamis induced by nearshore earthquakes on a constant-slope ocean // J. Fluid Mech. 2005. V. 535. P. 33–64.
10. Доброхотов С.Ю., Тироци Б. Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c^2 = x$ // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65. С. 185–186.
11. Didenkulova I., Pelinovsky E. Nonlinear wave evolution and runup in an inclined channel of a parabolic cross-section // Phys Fluids. 2011. V. 23. Issue 8. P. 086602.
12. Диденкулова И.И., Заибо Н., Куркин А.А. и др. Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42. № 6. С. 839–842.
13. Zahibo N., Didenkulova I., Kurkin A. et al. Steepness and spectrum of nonlinear deformed shallow water wave // Ocean Engineering. 2008. V. 35. № 1. P. 47–52.
14. Пелиновский Е.Н., Родин А.А. Нелинейная деформация волны большой амплитуды на мелководье // ДАН. 2011. Т. 438. № 3. С. 337–340.
15. Пелиновский Е.Н., Родин А.А. Трансформация сильно нелинейной волны в мелководном бассейне // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 3. С. 343–349.
16. Didenkulova I., Pelinovsky E., Rodin A. Nonlinear interaction of large-amplitude unidirectional waves in shallow waters // Estonian J. Engineering. 2011. V. 17. № 4. P. 289–300.
17. LeVeque R.J. Finite-volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 558 p.
18. Руденко О., Солуян С. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
19. Воляк К.И., Горшков А.С., Руденко О.В. О возникновении обратных волн в однородных нелинейных средах // Вестн. МГУ. Сер. Физика, астрономия. 1975. № 1. С. 32–36.

Nonlinear Effects at the Initial Stage of Tsunami-Wave Development

E. N. Pelinovsky^{a, b} and A. A. Rodin^{a, b, c}

^a Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, Nizhni Novgorod, Russia

^b Nizhni Novgorod State University, Nizhni Novgorod, Russia

^c Institute of Cybernetics, Tallinn Technological University, Tallinn, Estonia

e-mail: pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru, xmrrarro@gmail.com

Received July 16, 2012

Abstract—An analytical solution to shallow-water nonlinear equations determining the height of tsunami waves leaving the source is obtained. The initial water-level displacement in the source and the distribution of particle velocities are set. The numerical solution showed that analytical estimates fit well with source characteristics varying in a broad range, even if the waves produced by the source collapse.

Keywords: tsunami, nonlinear theory, shallow waves, impact wave.