МИНИСТЕРСТВО ОБОРОНЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Научно-методические материалы

Под редакцией
доктора технических наук В. В. БЛАЖЕНКОВА,
доктора физико-математических наук А. В. ЧЕЧКИНА

МОСКВА 2013

УДК 519.1:519.8

Очередной выпуск сборника научно-методических материалов «Математические методы решения инженерных задач» состоит из параграфов – статей, относящихся к различным разделам современной математики и ее приложений. Отличительной особенностью сборника является постоянное внимание редакторов как к методам НЕПРЕРЫВНОЙ МАТЕМАТИКИ, которые используются для моделирования разнообразных физических систем, так и к методам ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ, которые лежат в основе моделирования информационных систем различного назначения. Все статьи объединяются научно-инженерной направленностью.

Каждая статья выверена авторами и содержит строгую математическую формулировку результата.

Материалы сборника могут представлять интерес для научных сотрудников, инженеров, для адъюнктов и курсантов старших курсов.

СОДЕРЖАНИЕ

З.И. Бежаева, Н.А. Келдыш, Е.Ф. Олехова, В.И. Оселедец

Блочные матрицы, графы и скрытые марковские цепи

1. Введение. В этой статье мы обсудим связь теории скрытых марковских цепей с теорией графов и с линейной алгеброй. Связь теории графов и линейной алгебры известна в теории электрических цепей, теории сетей, теории конечных автоматов [2]. Формулы, отражающие эту связь, называют топологическими.

Рассмотрим блочную матрицу $M = (M_{ij})$ и ориентированный граф G с вершинами $\{1,2,\dots,N\}$, где N – порядок блочной матрицы M. Далее (i,j) – ребро графа, если матрица M_{ij} – ненулевая матрица.

Граф G – нагруженный граф с нагрузкой M_{ij} на ребре (i,j). Другое название нагрузки – матричный вес ребра. Для пути в графе его матричный вес есть произведение весов рёбер пути вдоль пути.

Мы также рассмотрим ориентированный граф $\tilde{G}$, отвечающий матрице M как обычной числовой матрице. Заметим, что числовую матрицу можно рассматривать как блочную, в которой блоки – это матрицы первого порядка, т.е. обычные числа.

Мы будем предполагать, что матрица M – неотрицательная матрица со спектральным радиусом 1. Это означает, что все собственные значения по абсолютной величине не превосходят 1, и 1 – собственное значение.

Кроме того, предположим, что граф G, отвечающий матрице M, это сильно связный граф, т.е. из любой вершины есть путь в любую вершину. Для числовой матрицы граф $G = \tilde{G}$. Это условие равносильно простоте собственного значения 1.

Для матрицы M существуют неотрицательные блочные строка $l = (l_1, l_2, \dots, l_N)$ и столбец $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$ такие, что $lM = l$, $Mr = r$. Это позволяет определить для пути $i_1 i_2 \dots i_n$ его вероятность

$$Prob(i_1 i_2 \dots i_n) = \frac{l_{i_1} M_{i_1 i_2} \dots M_{i_{n-1} i_n} r_{i_n}}{lr}.$$

Кроме того, определим вероятность вершины i по формуле

$$Prob(i) = \frac{l_i r_i}{lr}.$$

Можно считать, что вершина – это путь нулевой длины. Вероятности путей позволяют определить случайный бесконечный путь в графе. Вероятность того, что его любой начальный кусок совпадёт с данным конечным путём, равна вероятности этого конечного пути. Распределение случайного пути в пространстве бесконечных путей даёт вероятностную меру, инвариантную относительно сдвига в пространстве путей, когда из исходного пути удаляется начальная вершина пути [1].

Вершины случайного пути образуют стационарный процесс. Он называется стационарной скрытой марковской цепью, а мера в пространстве путей называется скрытой марковской мерой. Для числовой матрицы эта конструкция даёт стационарную марковскую цепь. В частности для блочной матрицы M мы получаем скрытую марковскую цепь на графе G и марковскую цепь на графе $\tilde{G}$.

Скрытая марковская цепь – функция от марковской цепи. Функция сопоставляет вершине графа $\tilde{G}$ номер блока, содержащего эту вершину.

Интересная особенность матричных весов путей по сравнению с числовыми весами заключается в том, что матричный вес пути может быть нулевым, что невозможно для числовых весов. Поэтому носитель марковской меры на пространстве бесконечных путей это все пространство путей, а для скрытых марковских мер это, вообще говоря, неверно.

Носитель скрытой марковской меры называется софическим множеством.

2. Связь между неотрицательными матрицами и нагруженными графами. Рассмотрим некоторую неотрицательную числовую матрицу M и соответствующий ей граф G.

Пусть λ – максимальное по модулю собственное число матрицы M. В табл.1 описаны свойства матрицы M и графа G.

Таблица 1

Матрица M	Граф G
λ – простое собственное значение матрицы M	сильно связный
$\lvert\lambda_i\rvert<\lambda \quad \forall i$	апериодический
$\lambda, \varepsilon\lambda, \dots, \varepsilon^{d-1}\lambda$ – все периферические собственные числа, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{d}i}$ – корень из 1	d-периодический

3. Топологические формулы Гуревича. Известны топологические формулы Гуревича [3].

Если числовая матрица M неприводима, т.е. её граф G сильно связен, то имеет место уравнение для λ:

$$\sum_c \frac{M(c)}{\lambda^{|c|}} = 1, \tag{1}$$

где c – циклы первого возвращения, $M(c)$ – вес цикла первого возвращения в вершину i, а $|c|$ – длина цикла.

Пусть l и r – левый и правый положительные собственные векторы матрицы M, тогда имеют место следующие формулы.

$$r_i = \sum_\gamma \frac{M(\gamma)}{\lambda^{|\gamma|}} \cdot r_v, \tag{2}$$

где γ – пути, приводящие из i в v впервые, $|\gamma|$ – длина пути.

$$l_i = l_v \sum_\gamma \frac{M(\gamma)}{\lambda^{|\gamma|}}, \tag{3}$$

где γ – пути, приводящие из v в i впервые, без захода в v (кроме начала), $|\gamma|$ – длина пути.

Следует отметить, что формула (1) следует из (2) и (3).

Пример 1. Рассмотрим граф (рис.1), где матрица смежности M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть λ – спектральный радиус матрицы M.

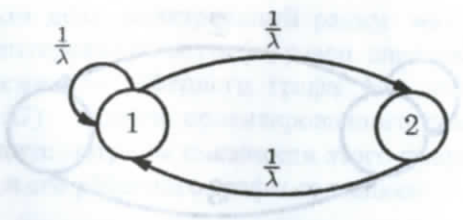

Рис. 1

В вершине 1 два цикла первого возвращения: 11, 121. Их веса 1 и 1, согласно формуле (1):

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = 1.$$

Отсюда $\lambda^2 = \lambda + 1$, т.е. λ – золотое сечение.

Для вершины 2 циклы первого возвращения имеют вид $c_k = 2(1)^k 2$, $k = 1,2,\dots$, $|c_k| = k + 1$, и из уравнения (1) следует, что

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{1}{\lambda} + \dots = 1,$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}} = 1,$$

$$\frac{1}{\lambda^2 - \lambda} = 1.$$

Откуда снова получаем

$$\lambda^2 = \lambda + 1.$$

Пример 2. Рёберный граф для данного графа, это такой новый граф, у которого вершинами являются ребра старого графа, а его ребра соединяют старое ребро i с такими старыми рёбрами j, что начало ребра j совпадает с концом ребра i.

Рассмотрим граф из примера 1, пронумеруем его рёбра (рис.2).

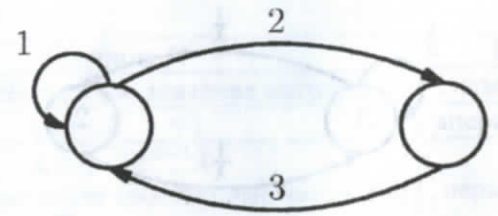

Рис. 2

Рёберный граф, соответствующий данному, изображён на рис. 3.

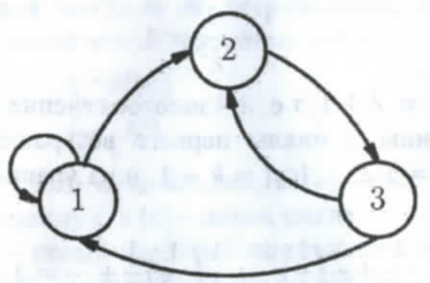

Рис. 3

Матрица смежности M рёберного графа равна

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Циклы первого возвращения в вершину 1 рёберного графа имеют вид: $c_1 = 11$, $c_2 = 1231$, $c_k = 1(23)^{k+1}1$, $k = 1,2,\ldots$, $|c_k| = 2k+3$.

Уравнение (1) даёт

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2k+3}} = 1.$$

Откуда

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} = 1$$

и $\lambda^2 = \lambda + 1$.

На самом деле, спектральный радиус матрицы смежности любого ориентированного графа равен спектральному радиусу матрицы смежности рёберного графа. Мы можем определить число $\lambda = \lambda(G)$ любого ориентированного графа G как спектральный радиус матрицы смежности этого графа. Тогда эти числа для графа и его рёберного графы совпадают.

Замечание об ориентированных мультиграфах.

Мультиграф – это граф, в котором две вершины могут быть соединены несколькими рёбрами.

Для мультиграфа G число $\lambda = \lambda(G)$ определим как спектральный радиус матрицы смежности рёберного графа для мультиграфа G.

4. Связь между блочными неотрицательными матрицами и нагруженными графами. Пусть спектральный радиус ненулевой неотрицательной блочной матрицы M с сильно связным графом G равен 1. Вспомним, что вероятность цикла γ с началом i и концом i равна

$$Prob(\gamma) = \frac{l_i M(\gamma) r_i}{lr}.$$

Условное распределение вероятностей на множестве всех бесконечных путей $c_1 c_2 \ldots c_m \ldots$, составленных из циклов первого возвращения определяется формулой

$$Prob(c_1 c_2 \ldots c_m) = \frac{l_i M(c_1) M(c_2) \ldots M(c_m) r_i}{lr}.$$

Из условия согласованности конечномерных распределений для этого условного распределения следует, что

$$l_i M(c_1) M(c_2) \ldots M(c_m) r_i = l_i M(c_1) M(c_2) \ldots M(c_m) \sum_c M(c)\, r_i.$$

Отсюда

$$l_i M(c_1) M(c_2) \ldots M(c_m) s_i = 0,$$

где $s_i = \sum_c M(c)\, r_i - r_i$ для любого набора циклов $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Если набор строк $l_i M(c_1) M(c_2) \ldots M(c_m)$ является порождающим множеством для пространства всех строк, то $s_i = 0$, и если $M_i = \sum_c M(c)$, то $M_i r_i = r_i$.

Условие инвариантности условной меры относительно перехода от пути $c_1c_2c_3...$ к пути $c_2c_3...$ даёт равенство $l_iM_i = l_i$, если множество столбцов $M(c_1)M(c_2)\dots M(c_m)r_i$ является порождающим для пространства всех столбцов.

При этих условиях справедливо

Утверждение 1. Для данной вершины i рассмотрим сумму M_i матричных весов циклов первого возвращения в эту вершину. Тогда спектральный радиус матрицы M_i равен 1 и

$$l_iM_i = l_i, \quad M_ir_i = r_i.$$

В случае числовой матрицы это утверждение приводит к первой формуле Гуревича.

Действительно, если спектральный радиус числовой матрицы M равен λ, то спектральный радиус матрицы $\frac{M}{\lambda}$ равен 1. Для этой матрицы вес цикла c первого возвращения равен весу для матрицы M делённому на $\lambda^{|c|}$. Так как для числовой матрицы M_i, l_i, r_i это ненулевые числа, то число M_i равно 1 в силу утверждения 1. Получается первая формула Гуревича.

Утверждение 2. В условиях утверждения 1 справедливы «матричные» формулы Гуревича:

$$r_i = \sum_{\gamma} \frac{M(\gamma)}{\lambda^{|\gamma|}} \cdot r_v,$$

где суммирование идёт по путям γ, приводящим из i в v впервые, $|\gamma|$ – длина пути, а $M(\gamma)$ – матричный вес пути γ.

$$l_i = l_v \sum_{\gamma} \frac{M(\gamma)}{\lambda^{|\gamma|}},$$

где суммирование идёт по путям γ, приводящим из v в i без захода в v (кроме начала), $|\gamma|$ – длина пути, а $M(\gamma)$ – матричный вес пути γ.

Пример 3. Рассмотрим нагруженный граф (рис. 4), где

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– блочная матрица, а λ – спектральный радиус матрицы M.

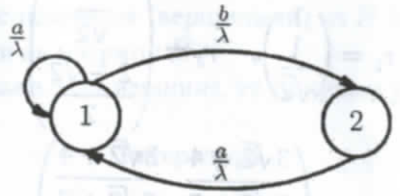

Рис. 4

Обозначим $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ – блочный собственный вектор матрицы M, соответствующий собственному значению λ. Тогда

$$\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

То есть

$$\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} ar_1 + br_2 \\ ar_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda}ar_1 + \frac{1}{\lambda}br_2 = r_1, \\ \frac{1}{\lambda}ar_1 = r_2. \end{cases}$$

Откуда следует

$$\frac{1}{\lambda}ar_1 + \frac{1}{\lambda^2}bar_1 = r_1,$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}a + \frac{1}{\lambda^2}ba\right)r_1 = r_1.$$

Обозначим

$$\frac{1}{\lambda}a + \frac{1}{\lambda^2}ba = U.$$

Если $x = \frac{1}{\lambda}$, то

$$\det(U - E) = (x-1)(x+1)(x^2 + 2x - 1) = 0.$$

Отсюда в нашем примере

$$x = \sqrt{2} - 1, \ \lambda = \sqrt{2} + 1,$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}+4}{5\sqrt{2}+7} & \frac{3\sqrt{2}+4}{5\sqrt{2}+7} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}+3} & \frac{4\sqrt{2}+5}{5\sqrt{2}+7} \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение соотношения для r_1:

$$Ur_1 = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}+4}{5\sqrt{2}+7} & \frac{3\sqrt{2}+4}{5\sqrt{2}+7} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}+3} & \frac{4\sqrt{2}+5}{5\sqrt{2}+7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{29\sqrt{2}+41}{41\sqrt{2}+58} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = r_1.$$

Для r_2:

$$\frac{1}{\lambda} a r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = r_2.$$

Замечание об ориентированных мультиграфах.

Положим $\widehat{M}_{ij}$ равным сумме матричных весов рёбер мультиграфа $\widehat{H}$ между его вершинами i и j.

Рассмотрим блочную матрицу $\widehat{M}$ с элементами $\widehat{M}_{ij}$. Тогда спектральный радиус блочной матрицы $\widehat{M}$ равен 1.

Утверждение 1 можно обобщить следующим образом. Пусть H – подграф графа G. Рассмотрим пути первого возвращения в этот подграф.

Если считать эти пути γ новыми рёбрами между вершинами подграфа с весом $M(\gamma)$, то получим нагруженный мультиграф $\widehat{H}$.

Обобщение утверждения 1 заключается в том, что блочные строка и столбец с номерами (вершинами) из H будут инвариантны при умножении на матрицу $\widehat{M}$.

Если в H только одна вершина, то получим утверждение 1.

Литература

1. Бежаева З.И., Оселедец В.И. Меры Эрдеша, софические меры и марковские цепи. Зап. научн. сем. ПОМИ, 326, 28-47, 2005.

2. С. Сешу, М.Б. Рид. Линейные графы и электрические цепи. М.: «Высшая школа», 1971.

3. Gurevich B. Some applicacions of oriented graphs to matrix theory and entropy theory of dynamical systems. Grazer Mathematische Berichte , 354, 73 – 83, 2009.