

УДК 551.465

О ПРОНИКНОВЕНИИ ДЛИННОЙ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ В ТОЛЩУ ОКЕАНА

© 2009 г. Т. Г. Талипова¹, Е. Н. Пелиновский¹, Н. С. Петрухин²¹Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород²Государственный университет – Высшая школа экономики, Нижний Новгород

e-mail: tata@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 25.03.2008 г.

Известные данные о пучковом характере распространения внутренних волн в толщу океана подтверждаются рядом аналитических решений в рамках линейной теории длинных волн. Полученные решения применяются также для вычисления моды внутренней волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в случае постоянной частоты плавучести линейная внутренняя волна может распространяться в толщу океана без отражения с неизменной амплитудой (в приближении Буссинеска), и более того, монохроматическая волна является точным решением нелинейных уравнений гидродинамики стратифицированной жидкости [5]. В общем же случае неоднородного по вертикали распределения частоты Вьяйсяля-Брента внутренняя волна должна отражаться и в толще океана. Между тем многочисленные данные наблюдений свидетельствуют, что внутренние длинные волны приливного периода хорошо распространяются внутри океана (пучковое распространение) без видимого отражения, что подтверждается также численными расчетами [2, 6, 8–10, 12, 14, 16, 17]. В данной работе выполнен теоретический анализ проникновения линейной низкочастотной волны в толщу неоднородно стратифицированного океана по частоте плавучести специального профиля (частота Брента-Вьяйсяля монотонно уменьшается с глубиной). Анализ подтверждает слабость отражения волны в толще океана по сравнению с отражениями от дна и свободной поверхности. В рамках предложенной модели рассмотрено также отражение волны от пикноклина и дано описание моды внутренней волны.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения двумерной гидродинамики идеальной стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска в случае линейной монохроматической волны частоты ω могут быть сведены к волновому гиперболическому уравнению (см., например, [4]):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где $W(x, z)$ – вертикальная скорость частиц жидкости, $N(z)$ – частота плавучести (Вьяйсяля-Брента), f – параметр Кориолиса, x – горизонтальная и z – вертикальная координаты соответственно. Гиперболический характер уравнения (1) позволяет сразу ввести характеристики (лучи), вдоль которых распространяется волна,

$$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2(z) - \omega^2}}, \quad (2)$$

что неоднократно приводилось в литературе по внутренним волнам. Разумеется, при фиксированной частоте формально нельзя говорить о распространении волны или перемещении ее фронта (нет временной координаты), поэтому в литературе обычно говорят о лучах распространения энергии внутренних волн. Эти лучи хорошо заметны как при анализе данных наблюдений, так и в численных расчетах (эта литература цитируется во Введении). Фактически во всех этих работах демонстрируется пучковый характер распространения внутренних волн в толще океана и сильное отражение от свободной поверхности и неоднородного дна (где шире лучи с разным наклоном). В то же время хорошо известно, что в общем случае в любой неоднородной среде должно происходить распределенное отражение волновой энергии на каждом горизонте [1], которое, по-видимому, является достаточно слабым для реальных океанических условий. Рассмотрим эту проблему более подробно.

В силу однородности уравнения (1) по горизонтали удобно выделить волновую компоненту $\exp(ikx)$ и переписать уравнение (1) в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{c^2} \Phi = 0, \quad (3)$$

где для простоты мы ограничимся случаем низкочастотных волн в невращающемся океане. Здесь c – скорость распространения длинных волн в горизон-

тальном направлении ($c = \omega/k$) и $\Phi(z)$ – вертикальное распределение вертикальных смещений изопикны (ось z направлена вниз). Для изучения отражения внутренней волны мы будем считать океан полубесконечным, а волну – распространяющейся со свободной поверхности (или с любого горизонта, в частности, с пикноклина) в толщу (распространение волны от дна рассматривается аналогично).

3. “БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ” ВОЛНЫ

Уравнение (3) содержит переменные коэффициенты, поэтому его аналитические решения могут быть получены только для специфических профилей частоты плавучести, и по существу большинство из них могут быть взяты из справочников по дифференциальным уравнениям. Часть решений уже приводилась в литературе по внутренним волнам [2–3, 5]. Уравнение (3) также легко решается численно. Нашей задачей является выяснение отражательных свойств неоднородного распределения частоты плавучести. Поэтому мы используем здесь теорию безотражательных потенциалов [1], чтобы выяснить, какие распределения частоты плавучести не приводят к отражению волны. Для этого будем искать решение уравнения (3) в виде

$$\Phi(z) = A(z)\exp[i\Psi(z)], \quad (4)$$

где введены пока еще не известные действительные функции, которые мы назовем амплитудой и фазой. Уравнения для них следуют из (3) после разделения его на действительную и мнимую части

$$\frac{d^2 A}{dz^2} - A\kappa^2(z) + A\frac{N^2(z)}{c^2} = 0, \quad (5)$$

$$2\kappa(z)\frac{dA}{dz} + A\frac{d\kappa}{dz} = 0, \quad (6)$$

где введено вертикальное волновое число

$$\kappa(z) = \frac{d\Psi}{dz}. \quad (7)$$

Отметим сразу, что уравнение (6) интегрируется в общем виде

$$A^2(z)\kappa(z) = \text{const} \quad (8)$$

и имеет форму сохранения потока энергии волны в толщу океана. В результате у нас остается уравнение второго порядка (5) для нахождения амплитуды волны, которое в смысле простоты решений ничем не лучше исходного уравнения (3). Здесь также можно использовать справочники для нахождения аналитических решений, хотя эти решения трудно интерпретировать с точки зрения отражательных свойств частоты плавучести. Наиболее логично ис-

кать решения уравнения (5), которые в случае среды с постоянными параметрами переходят в известные решения для плоских волн. Естественно, что в случае постоянной по вертикали частоты Вьяйсяля волна с постоянной амплитудой и вертикальным волновым числом

$$\kappa = N/c, \quad \Psi = \kappa z = Nz/c, \quad A = \text{const} \quad (8)$$

является точным решением, и этот случай безотражательного распространения внутренней волны в толщу океана хорошо известен в литературе.

Следующий пример – это плавное изменения частоты плавучести, когда можно ожидать, что амплитуда и вертикальное волновое число также меняются достаточно медленно. В результате второй производной от амплитуды в уравнении (5) можно пренебречь и найти решения для медленно меняющихся амплитуды и волнового числа:

$$\kappa(z) = \frac{N(z)}{c}, \quad A(z) \sim \frac{1}{\kappa(z)} \sim \frac{1}{N(z)}. \quad (9)$$

Эти решения, хорошо известные в рамках метода Венцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) или метода медленно меняющейся амплитуды, также описывают почти безотражательное распространение внутренней волны, но при этом амплитуда и энергия волны меняются с глубиной (поток энергии в вертикальном распространении остается постоянным). Подчеркнем, что в этом случае лучи в вертикальной плоскости являются криволинейными и будут поворачиваться вниз, если $N(z)$ возрастает. Если же $N(z)$ убывает с глубиной, то лучи отклоняются к горизонтали и при достаточно значительном убывании частоты Вьяйсяля могут повернуть вверх (классическое объяснение возникновения волновода в рамках метода ВКБ).

Возможны также случаи неплавного вертикального распределения частоты Вьяйсяля, когда отражение все равно отсутствует. Предполагая, что структура решения должна оставаться такой же, как и при постоянной частоте Вьяйсяля, мы разобьем уравнение (5) на два:

$$\kappa^2(z) = \frac{N^2(z)}{c^2}, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 A}{dz^2} = 0. \quad (11)$$

Уравнения (8) и (10) совпадают с уравнениями метода ВКБ, а уравнение (11) является новым. В результате система уравнений (8), (10) и (11) становится переопределенной для амплитуды и волнового числа, и для ее определенности нужно предположить, что

функция $N(z)$ также неизвестна и подлежит определению. Все функции находятся тогда в явном виде

$$A(z) = A_0(1 \pm z/L), \quad \kappa(z) = \frac{N(z)}{c} = \frac{N_0}{c(1 \pm z/L)^2}, \quad (12)$$

$$N(z) = \frac{N_0}{(1 \pm z/L)^2}, \quad (13)$$

и все они зависят от трех произвольных констант N_0 , L и A_0 , имеющих ясный физический смысл. С точки зрения приложений исходной функцией является частота Вьяйсяля, которая спадает с глубиной или нарастает, что определяется знаком перед z/L и двумя произвольными константами. Стратификация (13) представляется вполне реалистической для описания поведения частоты плавучести как выше, так и ниже пикноклина. Этот точно решаемый пример уже приводился в литературе (см., например, [2] и цитируемую там литературу), однако не была сделана его интерпретация как случая безотражательного проникновения внутренней волны в толщу океана.

Итак, в рассмотренном примере внутренняя волна распространяется в вертикальном направлении без отражения, однако ее амплитуда нарастает с глубиной. Вертикальное волновое число уменьшается с глубиной (волна становится более длинной по вертикали), но оно еще определяется скоростью распространения внутренней волны в горизонтальном направлении. Учитывая, что скорость распространения внутренних волн по горизонтали есть $c = \omega/k$, второе уравнение (12) представляет дисперсионное соотношение

$$\omega = N(z) \operatorname{tg} \theta(z), \quad (14)$$

где θ – угол распространения волны к вертикали. Поскольку для низкочастотных волн всегда $k \ll \kappa$ (малые углы θ), то (14) есть длинноволновый предел известного точного дисперсионного соотношения для внутренних волн

$$\omega = N \sin \theta, \quad (15)$$

которое выводилось ранее для океана с постоянной частотой Вьяйсяля [7]. В результате уравнение (14) описывает рефракцию внутренних волн в океане с переменной по глубине частотой Вьяйсяля и отклонение лучей с глубиной от вертикали. Фактически уравнение (14), точнее, “полное” уравнение (15), уже использовалось для описания рефракции внутренних волн, поскольку оно выводится также в приближении ВКБ. Однако подчеркнем еще раз, что здесь мы не накладываем условие медленности изменения частоты Вьяйсяля, и уравнение (14) является точным (в рамках теории низкочастотных волн), а не приближенным.

Примеры аппроксимации частоты Вьяйсяля “безотражательными” профилями (13) по данным натурных наблюдений приведены на рис. 1 для Тихо-

го, Атлантического, Северного Ледовитого и Индийского океанов. Так, на рис. 1а приведен профиль частоты плавучести, измеренный на Северо-западном шельфе Австралии [11–13], на 20° ю.ш. Профиль частоты Вьяйсяля, показанный на рис. 1б, был получен на Малин шельфе к западу от Англии [15]. Третий профиль частоты Вьяйсяля (рис. 1в) измерен на шельфе моря Лаптевых [7]. Четвертый профиль (рис. 1г) соответствует частоте Вьяйсяля на Гавайском шельфе в Тихом океане [14].

Таким образом, существуют семейства довольно реалистической вертикальной плотностной стратификации в океане как выше, так и ниже пикноклина, когда волна распространяется в глубину без отражения, а не только для идеалистической ситуации постоянной частоты Вьяйсяля. Тем самым, можно утверждать, что отражение внутренней волны на монотонных участках профиля частоты Вьяйсяля, которое может быть аппроксимировано профилем (13), отсутствует или достаточно слабо. Полученное решение демонстрирует также основные особенности рефракции внутренних волн в океане с переменной частотой Вьяйсяля. Сильное отражение должно быть в окрестности областей максимума и минимума частоты Вьяйсяля, а также в слоях его скачкообразного изменения.

4. СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ

Решения в виде безотражательных потенциалов могут быть полезны и при вычислении собственных мод распространения длинных волн. В этом случае уравнение (3) должно быть дополнено граничными условиями на поверхности и на дне:

$$\Phi(z=0) = \Phi(z=H) = 0. \quad (16)$$

Тогда суперпозиция решений (4), удовлетворяющая граничному условию (16) на свободной поверхности, есть

$$\Phi(z) = (1 + z/L) \sin \left[\frac{N_0 z}{c(1 + z/L)} \right] \quad (17)$$

и, обращаясь в нуль на дне ($z=H$), определяет собственные значения

$$c_n = \frac{N_0 H}{n\pi(1 + H/L)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Интересно отметить, что если ввести среднюю по слою частоту Вьяйсяля

$$\bar{N} = \frac{1}{H} \int_0^H N(z) dz = \frac{N_0}{1 + H/L}, \quad (19)$$

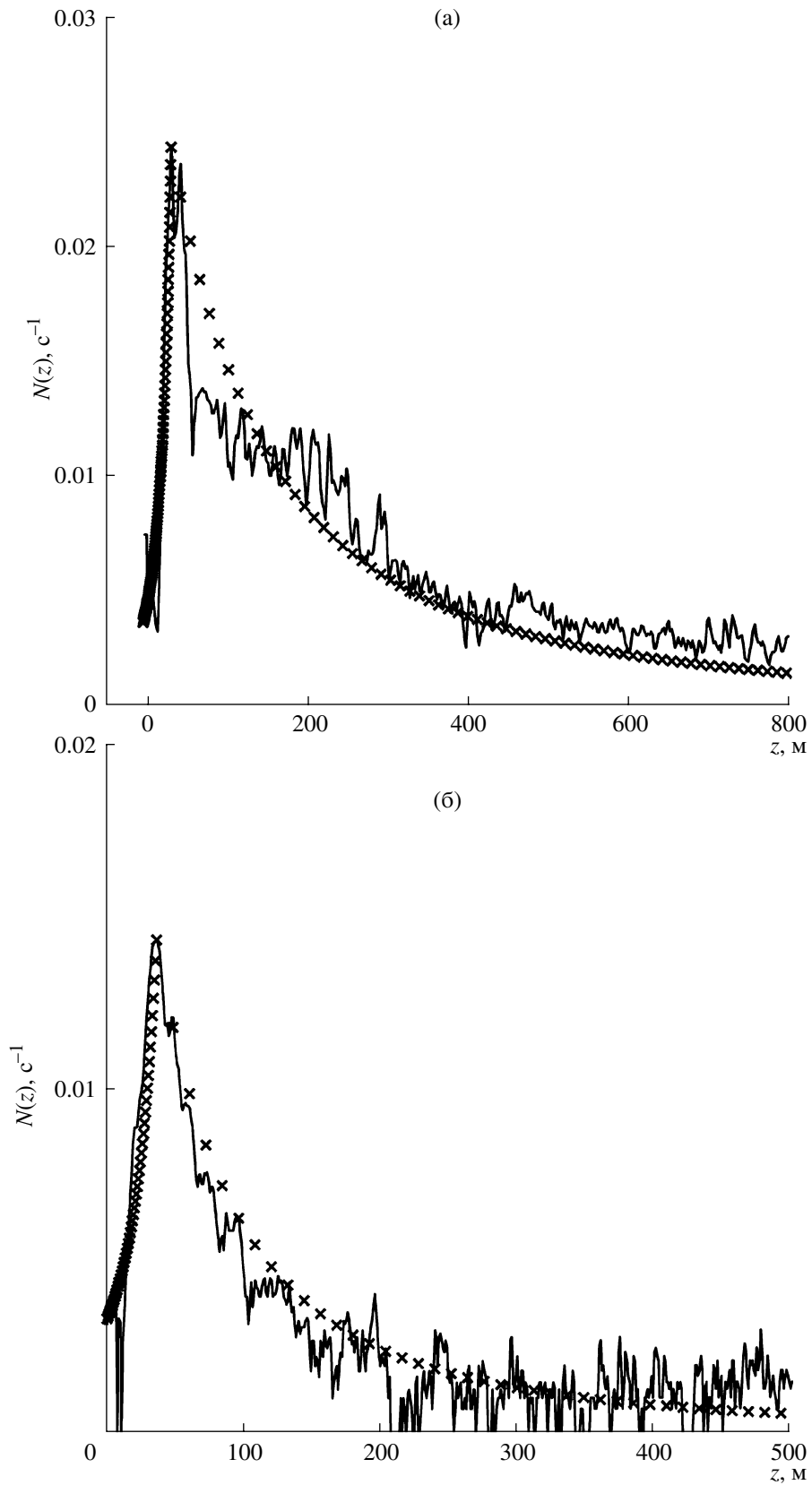


Рис. 1. Частота Вайсяля и ее аппроксимация безотражательным профилем. (а) – северо-западный шельф Австралии, (б) – Малин шельф, Англия, (в) – шельф моря Лаптевых, Россия, (г) – Гавайский шельф.

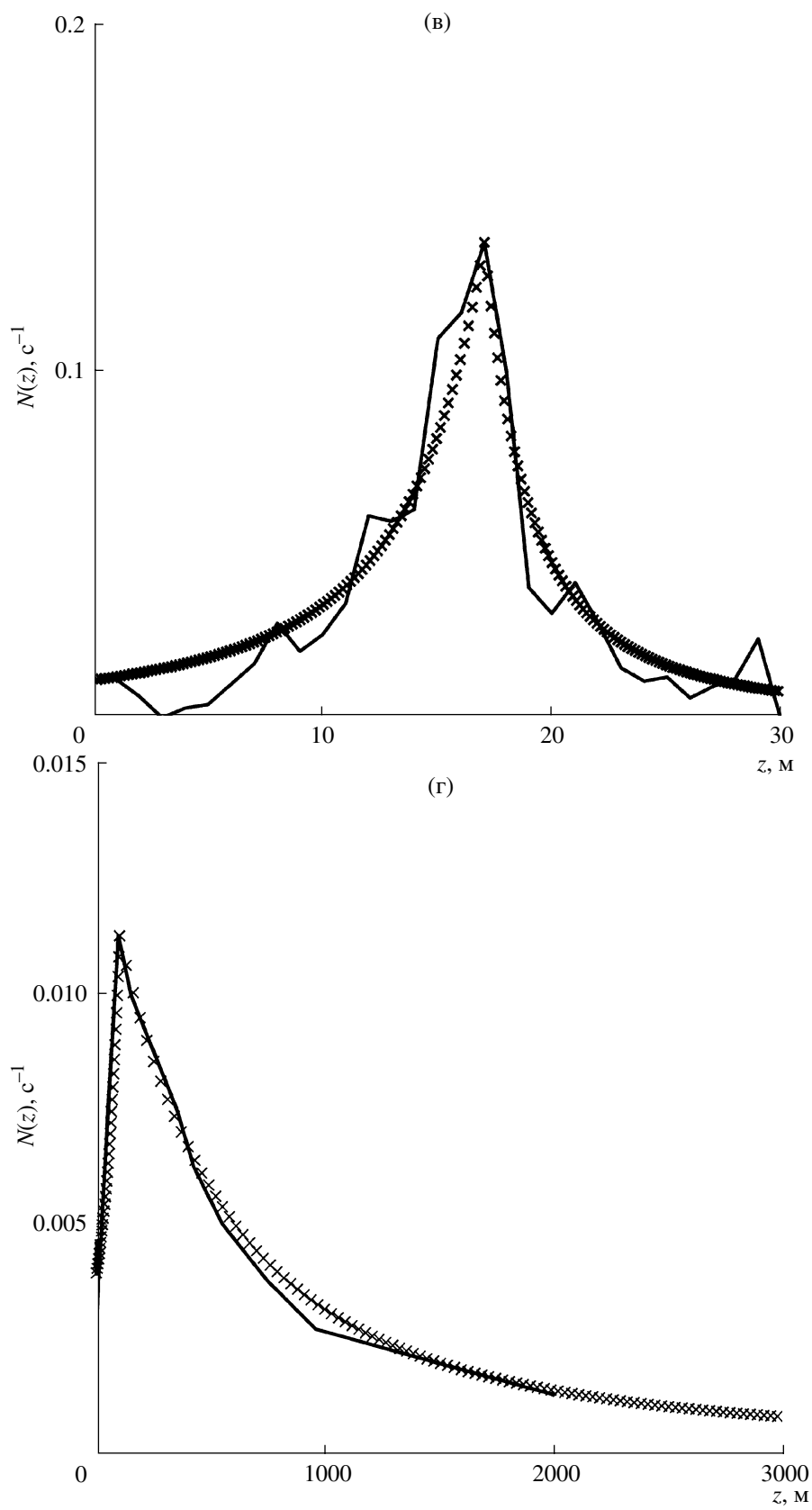


Рис. 1. Продолжение.

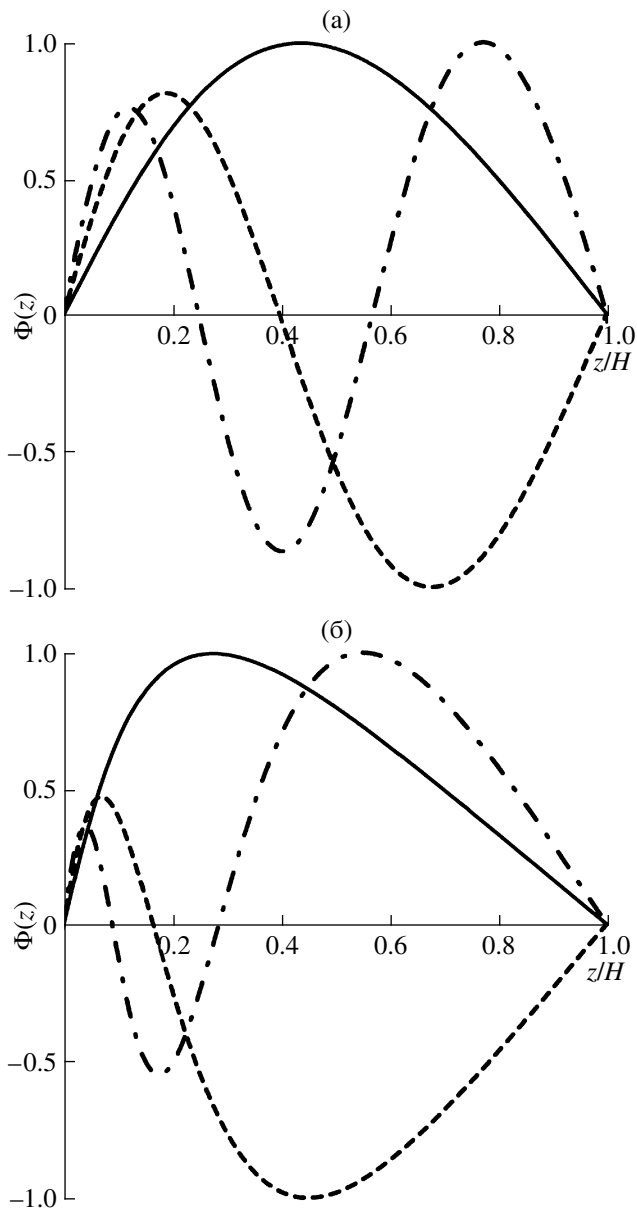


Рис. 2. Структура первых трех мод внутренних волн $H/L = 0.5$ (а) и $H/L = 4$ (б).

то выражение для скорости распространения имеет тот же вид, что для океана с постоянной (средней) частотой Вэйсяля

$$c_n = \frac{\bar{N}H}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Структура первых трех мод показана на рис. 2 (слева для $H/L = 0.5$ и справа для $H/L = 4$). Для слабой неоднородности моды симметричны, в то время как для сильной неоднородности быстрые изменения модальной структуры происходят в верхнем слое.

На рис. 3. сравниваются структуры первой моды для реальной стратификации океана у Гавай-

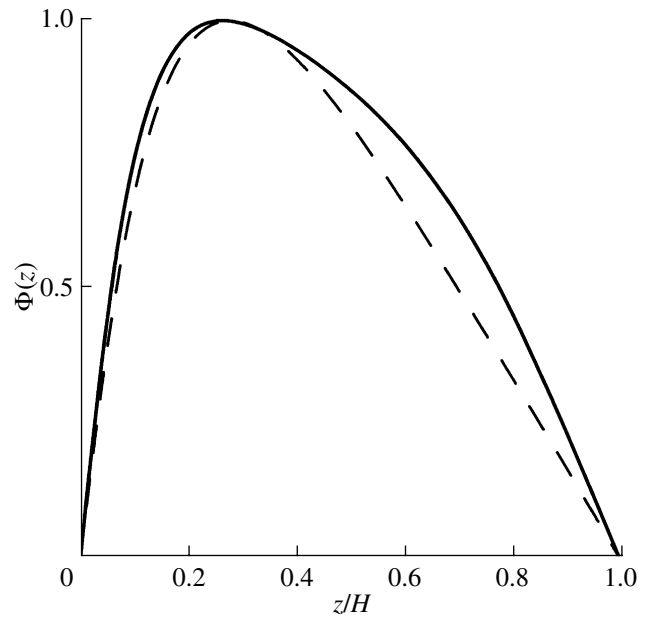


Рис. 3. Сравнение структуры первой моды для реальной стратификации (сплошная линия) и теоретической моды ($H/L = 4$) (пунктир).

ских о-вов при глубине 4000 м ($H/L = 4$) и теоретической моды. Как можно видеть, структура реальной моды качественно вполне описывается этой простой теорией.

4. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПИКНОКЛИНА

Рассмотрим теперь отражение внутренней волны от пикноклина, который представим в виде суперпозиций двух “безотражательных” функций (13):

$$N(z) = N_0 \begin{cases} \frac{1}{(1 + |z|/L_1)^2} & z < 0 \\ \frac{1}{(1 + z/L_2)^2} & z > 0 \end{cases} \quad (21)$$

с разными “полуширинами” пикноклина. Как можно видеть из рис. 1, таким профилем можно аппроксимировать распределение частоты Вэйсяля для многих случаев натуральных наблюдений с той или иной степенью погрешности. Параметры аппроксимаций сведены в таблицу. Эти аппроксимации будут использованы для оценок отражения волны от пикноклина.

Пусть волна падает на пикноклин из области $z < 0$. Представляя как обычно, решение в виде падающей и отраженной волн выше пикноклина и прошедшей волны ниже пикноклина, и используя очевидные условия непрерывности функции Φ и ее про-

Коэффициент отражения низкочастотной внутренней волны от пикноклина

	N_0, c^{-1}	$H, м$	$L_p, м$	$c, м/с$	$ R ^2$
Северо-западный шельф Австралии	0.0236	1400	18.5	2.1	0.81
Гавайи	0.0113	4000	111.1	2.0	0.53
Море Лаптевых	0.1378	35	2.5	0.75	0.55
Малин шельф	0.0144	600	28	0.43	0.22

изводной в точке $z = 0$, находим коэффициент отражения от пикноклина в явном виде

$$R = -\frac{1}{1 + \frac{2iN_0L_p}{c}}, \quad (22)$$

где $L_p = L_1L_2/(L_1 + L_2)$. Здесь комплексный коэффициент отражения R есть отношение амплитуд отраженной и падающей волн в точке $z = 0$ (вне пикноклина амплитуды волн нарастают). Его модуль есть

$$|R| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2N_0L_p}{c}\right)^2}}. \quad (23)$$

Отсюда следует, что если пикноклин достаточно тонкий по сравнению с глубиной океана, то коэффициент отражения (по модулю) может приближаться к единице. В “мелком” океане толщина пикноклина

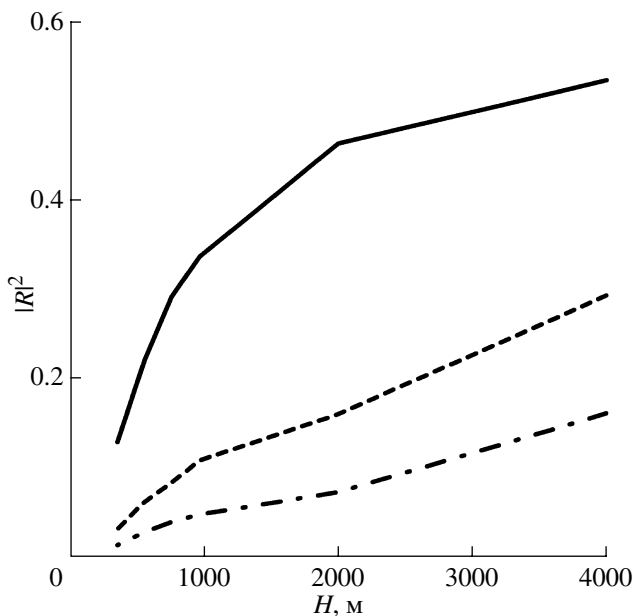


Рис. 4. Изменение квадрата модуля коэффициента отражения от пикноклина с глубиной. Сплошная линия – для первой моды, штриховая линия – для второй моды, штрихпунктир – для третьей моды.

сравнима с глубиной океана H , и в этом случае коэффициент отражения может сильно падать.

С точки зрения распространения энергии волн более информативным является квадрат модуля коэффициента отражения, показывающий процент отражающейся энергии волны. Рассмотрим это на приведенных выше примерах. Результаты расчетов квадрата коэффициента отражения внутренней волны первой моды от пикноклина по формуле (23) для приведенных выше случаев приведены в таблице.

Как можно видеть, величина квадрата модуля коэффициента отражения от пикноклина может быть достаточно большой. При этом, поскольку стратификация различна в разных регионах, то по приведенным данным невозможно оценить зависимость квадрата коэффициента отражения от глубины.

Так, на более мелком Северо-западном шельфе Австралии квадрат коэффициента отражения от пикноклина больше, чем в более глубокой зоне шельфа Гавайских о-вов, а квадрат коэффициента отражения в мелкой зоне моря Лаптевых практически такой же, как в глубокой зоне Гавайского шельфа, поскольку максимум частоты Вьяйсяля в этой области аномально велик из-за наличия распресненной воды в верхнем слое, что характерно для арктических вод.

Мы рассмотрим, как меняется квадрат коэффициента отражения, если взята одна стратификация, например, регион Гавайских о-вов, и изменяется только глубина. Это изменение показано на рис. 4 для первых трех мод. Наибольший квадрат коэффициента отражения от пикноклина приходится на первую моду, он меняется от 0.53 при глубине 4 км до 0.13 при глубине 350 м. Квадрат коэффициента отражения второй моды приблизительно в два раза меньше квадрата коэффициента отражения первой моды. Его пределы изменения – от 0.29 до 0.08 с уменьшением глубины. Квадрат коэффициента отражения третьей моды почти в три раза меньше квадрата коэффициента отражения первой моды, он меняется в пределах от 0.16 до 0.02 с падением глубины.

Следует отметить, что в перечисленных выше работах (см. Введение) речь идет, как правило, о генерации бароклинных течений на шельфовых склонах или подводных банках в глубоководных областях, где зона генерации расположена, как правило, ниже пикноклина, который обычно находится на глубине менее 100 м. Поскольку глубоководные районы хорошо описываются “безотражательным” профилем частоты Вьяйсяля, то энергия волны внутри лучевой трубки практически беспрепятственно доходит до дна и отражается, испытывая следующее частичное отражение от пикноклина, прижатого к поверхности и от самой поверхности. Пример такого лучевого распространения внутренних волн в Бискайском заливе приведен в работе [10].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все сказанное легко переносится на случай длинных волн во вращающемся океане. В этом случае уравнение (3) модифицируется:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{\omega^2 - f^2} k^2 \Phi = 0, \quad (24)$$

Структура решения и все формулы, приведенные выше, не меняются, модифицируется только дисперсионное соотношение внутренних волн в окрестности малых волновых чисел:

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{c}}. \quad (25)$$

Итак, приведенные выше аналитические решения подтверждают существование неоднородного по глубине профиля частоты Вьясьяля-Брента, когда отражение в толще океана отсутствует полностью. Рассмотренный выше модельный случай стратификации представляется реалистическим для описания частоты плавучести ниже пикноклина. Именно поэтому и существует часто наблюдаемая (в натурных и численных экспериментах) ситуация пучкового распространения внутренних волн в толщу океана с заметным отражением только на его границах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 06-05-64232 и № 07-05-92310-НВО_а) и ИНТАС (№ 06-1000013-9236).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Власенко В.И.* Генерация внутренних волн в стратифицированном океане переменной глубины // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 1987. Т. 23. № 3. С. 225–230.
3. *Краусс В.* Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968.
4. *Ле Блонд П., Мысак В.* Волны в океане. М.: Мир, 1981.
5. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
6. *Морозов Е.Г., Писарев С.В.* Внутренний прилив в арктических широтах (численные эксперименты) // Океанология. 2002. Т. 42. № 2. С. 165–173.
7. *Полухин Н.В., Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Лавренов И.В.* Моделирование трансформации солитонов внутренних волн на шельфе моря Лаптевых // Известия АИН РФ. Сер. Прикладная математика и механика. 2003. Т. 4. С. 3–16.
8. *Gerkema T.* Application of an internal tide generation model to baroclinic spring-neap cycles // J. Geoph. Res. 2002. V. 107. № C9. P. 3124. doi: 10.1029/2001JC001177.
9. *Gerkema T.* Internal-wave reflection from uniform slopes: higher harmonics and Coriolis effects // Nonlinear Processes Geophysics. 2006. V. 13. P. 265–273.
10. *Gerkema T., Lam F.A., Maas L.R.M.* Internal tides in the Bay of Biscay: conversion rates and seasonal effects // Deep-Sea Res. II. 2004. V. 5. P. 2995–3008.
11. *Holloway P.E.* A regional model of the semidiurnal internal tide on the Australian North West shelf // J. Geoph. Res. 2001. V. 106. № C9. P. 19625–19638.
12. *Holloway P.E., Merrifield M.A.* On the spring-neap variability and age of the internal tide at the Hawaiian Ridge // J. Geoph. Res. 2003. V. 108. № C4. P. 3126. doi: 10.1029/2002JC001486
13. *Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T., Barnes B.* A Nonlinear Model of Internal Tide Transformation on the Australian North West Shelf // J. Phys. Oceanogr. 1997. V. 27. № 6. P. 871–896.
14. *Johnston T.M.S., Merrifield M.A.* Internal tide scattering at seamounts, ridges, and islands // J. Geoph. Res. 2003. V. 108. № C6. P. 3180. doi: 10.1029/2002JC001528.
15. *Pelinovsky E., Talipova T., Small J.* Numerical modeling of the internal bores and generation of internal solitons at the Malin Shelf // The 1998 WHOI/IOS/ONR Internal Solitary Wave Workshop: Contributed Papers / Eds. Duda T., Farmer D. Technical report WHOI-99-07. 1999. P. 129–236.
16. *Pingree R.D., New A.L.* Downward propagation of internal tidal energy into the Bay of Biscay // Deep-Sea Res. A. 1989. V. 36. P. 735–758.
17. *Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K., Sabinin K.* Nonlinear internal waves forced by tides near the critical latitude // Deep-Sea Res. I. 2003. V. 50. P. 317–338.

Penetration of Internal Wave into Depth of Ocean

T. G. Talipova, E. N. Pelinovsky, N. S. Petrykhin

Data of beam propagation of the internal waves into the ocean are confirmed by several analytical solutions of the linear long wave theory. Obtained solutions are applied to calculate the mode of internal wave.