Об условиях дискретности экстремальных вероятностных мер (конечномерный случай)

Г. А. Васильев, В. М. Хаметов, Е. А. Шелемех

В данном сообщении устанавливаются условия дискретности экстремальной вероятностной меры на конечномерных пространствах. Эта проблема существует в теории Шоке [1]–[6], стохастической финансовой математике [7]–[9], при построении примеров решения задачи Монжа–Канторовича [10].

Доказательство основного результата статьи не опирается на вышеупомянутые работы.

1. Напомним некоторые обозначения и определения. Пусть $(E,\mathscr{E})$ – измеримое пространство, а $M(E)$ – множество вероятностных мер на $(E,\mathscr{E})$. Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}^+$ – любая $\mathscr{E}$-измеримая положительная ограниченная функция. Будем использовать следующие обозначения:

i) $\operatorname{extr} A$ – множество крайних точек множества A;

ii) $I^\mu \triangleq |\operatorname{supp}\mu|$, $\mu\in M(E)$.

2. Для формулировки основного утверждения работы нам потребуются определение и вспомогательное утверждение.

Определение 1. Вероятностную меру μ^* на $(E,\mathscr{E})$ будем называть *экстремальной* относительно множества вероятностных мер $\mathfrak{R}\subseteq M(E)$, если для любой $\mathscr{E}$-измеримой ограниченной функции $f\colon E\to\mathbb{R}^+$ справедливо равенство

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{R}}\int_E f(x)\,\mu(dx)=\int_E f(x)\,\mu^*(dx). \tag{1}$$

Предложение 1. *Экстремальная относительно множества $\mathfrak{R}\subseteq M(E)$ вероятностная мера μ^* существует тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}$ - слабо относительно компактное множество.*

Замечание 1. Достаточность условия в предложении 1 следует из слабой относительной компактности множества $\mathfrak{R}$, определения верхней грани и теоремы Данфорда–Петтиса. Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство теоремы 5 работы [9]. Необходимость – очевидна.

Замечание 2. Пусть $\mathfrak{R}\subseteq M(E)$ такое, что $\sup_{\mu\in\mathfrak{R}}\int_E|x|\,\mu(dx)<\infty$. Известно [11; § 2, гл. III], что в этом случае $\mathfrak{R}$ – слабо относительно компактное множество и существуют экстремальная относительно него вероятностная мера μ^* и конечный интеграл Лебега $m^*\triangleq\int_E x\,\mu^*(dx)$.

3. Пусть $D\triangleq\{\gamma\in\mathbb{R}^d:\int_E e^{f(x)-(\gamma,x-m^*)}\,\mu^*(dx)<\infty\}$. Очевидно, что $D\neq\varnothing$.

Следующее утверждение – это основной результат данной работы.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Пусть $E=\mathbb{R}^d$, $d<\infty$. Экстремальная относительно множества $\mathfrak{R}$ вероятностная мера μ^* – дискретна тогда и только тогда, когда существует $\gamma^*\in D$ такой, что выполняется неравенство*:

$$\int_E e^{f(x)-(\gamma^*,x-m^*)}\,\mu^*(dx)\leqslant\int_E e^{f(x)-(\gamma,x-m^*)}\,\mu^*(dx), \tag{2}$$

где γ – любой из D, при этом $I^{\mu^*}\leqslant d+1$.

DOI: 10.4213/mzm10368

2) *Пусть* E *–* d*-мерный компакт,* $d < \infty$. *Тогда существует вероятностная мера* $\mu^* \in M(E)$ *– дискретная,* $I^{\mu^*} \leqslant d+1$, *такая, что справедливы равенства*

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{R}} \int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\,\mu^*(dx) = \sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i f(x_i), \tag{3}$$

где $x_i \in \operatorname{extr} E$, $1 \leqslant i \leqslant I^{\mu^*}$, *причем* $c_i \triangleq \mu^*(\{x_i\}) > 0$ *и* $\sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i x_i = m^*$, $\sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i = 1$.

4. Данный пункт посвящен доказательству теоремы 1, которое опирается на решение рассматриваемой ниже вспомогательной задачи.

4.1. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\int_E e^{f(x)-(\gamma,x-m^*)}\,\mu^*(dx) \to \inf_{\gamma\in D}. \tag{4}$$

Определение 2. *Решением задачи* (4) назовем вектор $\gamma^* \in D$ такой, что

$$v \triangleq \inf_{\gamma\in D} \int_E e^{f(x)-(\gamma,x-m^*)}\,\mu^*(dx) = \int_E e^{f(x)-(\gamma^*,x-m^*)}\,\mu^*(dx). \tag{5}$$

4.2. Доказательство утверждений теоремы 1 опирается на разрешимость задачи (4). Нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Предложение 2. *Решение задачи* (4) *существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство* (2).

Доказательство утверждения предложения 2 очевидно.

Справедливость утверждения 1) теоремы 1 вытекает из следующего предложения.

Предложение 3. *Следующие утверждения эквивалентны*:
1) γ^* *– решение задачи* (4);
2) *любая измеримая ограниченная функция* $f(x)$ *допускает единственное представление*

$$f(x) = \int_E f(x)\,\mu^*(dx) + (\gamma^*, x-m^*); \tag{6}$$

3) μ^* *дискретна, причем* $I^{\mu^*} \leqslant d+1$.

Доказательство предложения 3. *Импликация из* 1) *в* 2). Пусть $g\colon E \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ – любая $\mathscr{E}$-измеримая ограниченная функция. Положим для любого $A \in \mathscr{E}$

$$\mu(A) \triangleq \int_A \frac{g(x)}{\int_E g(x)\,\mu^*(dx)}\,\mu^*(dx). \tag{7}$$

Ясно, что

i) $\mu \neq \mu^*$;

ii) $\mu \in \mathfrak{R}$.

Заметим, что мера μ^* доминирует любую меру $\widetilde{\mu} \in \mathfrak{R}$ и поэтому $\widetilde{\mu} \ll \mu^*$. Следовательно, справедливо неравенство

$$v \triangleq \int_E e^{f(x)-(\gamma^*,x-m^*)}\,\mu^*(dx) \geqslant \int_E e^{f(x)-(\gamma^*,x-m^*)}\,\mu(dx),$$

которое с учетом (7) можно переписать в виде

$$\int_E g(x)\exp\{f(x) - (\gamma^*, x-m^*) - \ln v\}\,\mu^*(dx) \leqslant \int_E g(x)\,\mu^*(dx). \tag{8}$$

В силу произвольности измеримой функции $g(x)$ из (8) следует неравенство

$$f(x) - (\gamma^*, x - m^*) - \ln v \leqslant 0 \quad \mu^*\text{-п.в.}$$

С другой стороны, из (5) имеем равенство

$$\int_E \exp\{f(x) - (\gamma^*, x - m^*) - \ln v\}\, \mu^*(dx) = 1.$$

Следовательно, μ^*-п.в.

$$f(x) = \ln v + (\gamma^*, x - m^*). \tag{9}$$

Проинтегрируем обе части равенства (9) по мере μ^*. Получим, что $\ln v = \int_E f(x)\, \mu^*(dx)$. Отсюда следует (6).

Докажем единственность представления (6). Доказательство проведем методом “от противного”. Предположим, что существует $\widetilde{\gamma} \in D$, $\widetilde{\gamma} \neq \gamma^*$, такой, что μ^*-п.в.

$$f(x) = \int_E f(x)\, \mu^*(dx) + (\widetilde{\gamma}, x - m^*). \tag{10}$$

Вычтем из (10) равенство (6). Получим, что $(\widetilde{\gamma} - \gamma^*, x - m^*) = 0$ μ^*-п.в. Из ограниченности $f(x)$ и (6) следует, что $(\gamma^*, x - m^*)^2$ ограничено. Поэтому относительно меры μ^* существует K – ковариационная матрица случайного вектора x. Следовательно,

$$\int_E (\widetilde{\gamma} - \gamma^*, x - m^*)^2\, \mu^*(dx) = (\widetilde{\gamma} - \gamma^*, K(\widetilde{\gamma} - \gamma^*)) = 0. \tag{11}$$

Из положительной определенности матрицы K и равенства (11) следует, что мы пришли к противоречию с предположением о том, что $\widetilde{\gamma} \neq \gamma^*$. Стало быть, наше предположение неверно и представление (6) единственно.

Импликация из 2) *в* 3). Сначала сделаем несколько замечаний. Поскольку μ^* – вероятностная мера, то она допускает единственное разложение (см. [12; § 9]): $\mu^* = \alpha\mu^{*\mathrm{c}} + (1-\alpha)\mu^{*\mathrm{d}}$, $\alpha \in [0,1]$, где $\mu^{*\mathrm{c}}$ – непрерывная вероятностная мера, $\mu^{*\mathrm{d}}$ – дискретная вероятностная мера. Следовательно, мера $\mu^{*\mathrm{d}}$ сосредоточена на атомах меры μ^*, которых не более чем счетное число. Поскольку меры $\mu^{*\mathrm{d}}$ и $\mu^{*\mathrm{c}}$ сингулярны ([12; § 9]), то существуют $\mathscr{E}$-измеримые множества B и $\overline{B}$ такие, что:

i) $B \cup \overline{B} = E$;

ii) $B \cap \overline{B} = \varnothing$;

iii) $\mu^{*\mathrm{c}}(B) = 1$ $(\mu^{*\mathrm{d}}(B) = 0)$, $\mu^{*\mathrm{d}}(\overline{B}) = 1$ $(\mu^{*\mathrm{c}}(\overline{B}) = 0)$.

Следовательно, для любого $A \in \mathscr{E}$ справедливы равенства

$$\alpha\mu^{*\mathrm{c}}(A) = \mu^*(A \cap B), \qquad (1-\alpha)\mu^{*\mathrm{d}}(A) = \mu^*(A \cap \overline{B}), \tag{12}$$

причем $\alpha = \mu^*(B)$, $1 - \alpha = \mu^*(\overline{B})$.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что для любого $A \in \mathscr{E}$ выполняется равенство

$$\mu^*(A) = \mu^{*\mathrm{d}}(A). \tag{13}$$

В силу предположения индикаторы $1_A(x)$, $1_{\overline{B}}(x)$ и $1_{A\cap\overline{B}}(x)$ допускают соответственно единственные представления относительно меры μ^*:

$$1_A(x) = \mu^*(A) + (\gamma^A, x - m^*), \qquad 1_{\overline{B}}(x) = \mu^*(\overline{B}) + (\gamma^{\overline{B}}, x - m^*), \tag{14}$$

$$1_{A\cap\overline{B}}(x) = \mu^*(A \cap \overline{B}) + (\gamma^{A\cap\overline{B}}, x - m^*). \tag{15}$$

Так как $1_A(x)1_{\overline{B}}(x) = 1_{A\cap\overline{B}}(x)$, то из (14) и (15) следует равенство μ^*-п.в.

$$\mu^*(A\cap\overline{B}) + (\gamma^{A\cap\overline{B}}, x-m^*) = \mu^*(A)\mu^*(\overline{B}) + \mu^*(A)(\gamma^{\overline{B}}, x-m^*) \\ + \mu^*(\overline{B})(\gamma^A, x-m^*) + (\gamma^A, x-m^*)(\gamma^{\overline{B}}, x-m^*). \tag{16}$$

Равенство (16) выполняется для всех $x\in\operatorname{supp}\mu^*$. Так как m^* – барицентр меры μ^*, то он принадлежит относительной внутренности $\operatorname{supp}\mu^*$. Поэтому положим $x=m^*$. Тогда из (16) следует равенство $\mu^*(A\cap\overline{B}) = \mu^*(A)\mu^*(\overline{B})$. Из этого равенства и (12) следует (13).

Для завершения доказательства этого утверждения осталось заметить, что

i) поскольку μ^* – дискретная вероятностная мера, то она является выпуклой комбинацией не более чем счетного числа мер Дирака [11; § 2, гл. II], сосредоточенных в различных изолированных точках $x_i\in\operatorname{supp}\mu^*\subseteq E$;

ii) между мерами Дирака и точками $x_i\in\operatorname{supp}\mu^*$ существует взаимно однозначное соответствие;

iii) из теоремы Каратеодори [13; § 17, гл. IV] следует, что $I^{\mu^*}\leqslant d+1$.

Импликация из 3) *в* 1). Обозначим $\Phi(\gamma)\triangleq\int_E e^{f(x)-(\gamma,x-m^*)}\,\mu^*(dx)$. Поскольку мера μ^* дискретная и $I^{\mu^*}\leqslant d+1$, то m^* и $\Phi(\gamma)$ допускают, соответственно, представления

$$m^*=\sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i x_i, \qquad \Phi(\gamma)=\sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i\exp\{f(x_i)-(\gamma,x_i-m^*)\}, \tag{17}$$

где $x_i\in\operatorname{supp}\mu^*$. Из условий теоремы также следует, что:

i) $D=\mathbb{R}^d$;

ii) для любого $x\in E$ справедливо неравенство $|f(x)|\leqslant c$.

Поэтому в силу неравенства Иенсена имеем неравенство

$$\Phi(\gamma)\geqslant e^{-c}>0. \tag{18}$$

Перейдем к доказательству импликации. Пусть $I^{\mu^*}=1$. Тогда из (17) следует, что $m^*=x\in E$. Поэтому любое $\gamma\in\mathbb{R}^d$ является решением задачи (4).

Пусть $1<I^{\mu^*}\leqslant d+1$, а $\Gamma(\mu^*)$ – выпуклая оболочка $\operatorname{supp}\mu^*$. Известно, что m^* принадлежит относительной внутренности $\Gamma(\mu^*)$. Поэтому из (17) следует, что существуют x_i, $x_j\in E$ такие, что $x_i<m^*$, $x_j>m^*$. Следовательно, $\Phi(\gamma)$ – строго выпуклая, а в силу (18) – ограниченная снизу функция, причем $\Phi(\gamma)\to\infty$ при $\gamma\to\infty$. Поэтому из (17) следует, что для любого ограниченного $\gamma\in D$ справедливы неравенства $\mu^*((\gamma,x-m^*)>0)>0$ и $\mu^*((\gamma,x-m^*)<0)>0$. Доказательство закончено.

Замечание 3. Из доказательства импликации из 2) в 3) предложения 3 и единственности представления (6) следует единственность дискретной меры μ^*.

4.3. Доказательство пункта 2) теоремы 1. Из компактности множества E следует, что:

i) $\mathfrak{R}=M(E)$ – компакт в топологии слабой сходимости вероятностных мер;

ii) в силу предложения 1 существует вероятностная мера $\mu^*\in M(E)$, которая доминирует любую другую меру $\mu\in M(E)$, следовательно, $\mu\ll\mu^*$ и поэтому μ^* – крайняя точка множества $M(E)$;

iii) существует $\gamma^*\in D$, для которого справедливо (2).

Поэтому из утверждения предложения 3 следует, что мера μ^* дискретна. Из дискретности меры μ^* следует, что она является выпуклой оболочкой мер Дирака. Как уже отмечалось при доказательстве импликации из 2) в 3) предложения 3, между мерами Дирака и точками $x_i \in \operatorname{supp}\mu^*$ существует взаимнооднозначное соответствие. Поэтому в силу теоремы Каратеодори мера μ^* сосредоточена не более чем в $d+1$ точке. Поскольку мера μ^* крайняя, то ее носитель сосредоточен на $\operatorname{extr} E$. Из вышесказанного следует справедливость (3).

Замечание 4. Если $f(x)$ – непрерывная функция, то утверждение пункта 2) теоремы 1 известно. В этом случае интерес представляет новое доказательство этого утверждения.

Замечание 5. Из утверждения пункта 2) теоремы 1 следует, что носитель меры μ^* сосредоточен на $\operatorname{extr} E$. Легко убедиться в том, что справедливо утверждение, обратное утверждению пункта 2) теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968. **[2]** П. А. Мейер, *Вероятность и потенциалы*, Мир, М., 1973. **[3]** R. D. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodým Property*, Lecture Notes in Math., **993**, Springer-Verlag, Berlin, 1983. **[4]** R. D. Bourgin, G. A. Edgar, *J. Functional Analysis*, **23**:2 (1976), 162–176. **[5]** G. A. Edgar, *J. Functional Analysis*, **23**:2 (1976), 145–161. **[6]** P. Mankiewicz, *Studia Math.*, **63**:3 (1978), 259–265. **[7]** А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*. Т. 2. *Теория*, ФАЗИС, М., 1998. **[8]** Г. Фельмер, А. Шид, *Введение в стохастические финансы. Дискретное время*, МЦНМО, М., 2008. **[9]** О. В. Зверев, В. М. Хаметов, *Обозр. прикл. и промыш. матем.*, **18**:1 (2011), 26–54. **[10]** В. И. Богачев, А. В. Колесников, *УМН*, **67**:5(407) (2012), 3–110. **[11]** А. Н. Ширяев, *Вероятность*-1, МЦНМО, М., 2004. **[12]** Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич, *Интеграл, мера и производная. Общая теория*, Наука, М., 1967. **[13]** Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

Г. А. Васильев
Московский государственный
институт электроники и математики –
Высшая школа экономики
E-mail: math@glebvasiliev.ru

Поступило
22.04.2013

В. М. Хаметов
Московский государственный
институт электроники и математики –
Высшая школа экономики
E-mail: khametovvm@mail.ru

Е. А. Шелемех
Московский государственный
институт электроники и математики –
Высшая школа экономики
E-mail: letis@mail.ru