ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2011. Том 18, № 1. С. 70–76

УДК 519.178

МИНИМАЛЬНЫЕ СЛОЖНЫЕ КЛАССЫ ГРАФОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РЁБЕРНОМ СПИСКОВОМ РАНЖИРОВАНИИ *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Рассматривается понятие минимального сложного класса графов применительно к задаче о рёберном списковом ранжировании. Для этой задачи исследуется способ получения таких классов и на его основе выявляется новый класс. Показывается полнота некоторой совокупности классов графов как системы минимальных сложных классов, которые можно получить в рамках предлагаемого подхода.

Ключевые слова: вычислительная сложность, минимальный сложный класс, задача о рёберном списковом ранжировании.

Введение

Данная работа является продолжением цикла работ [1–3], в которых рассмотрены вопросы описания тупиковых наследственных классов графов по сложности решения задач о списковом ранжировании. *Наследственный* класс графов — это множество графов, замкнутое относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс графов $\mathcal{X}$ определяется множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{S}$, это записывается так: $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$. Минимальное по включению множество запрещённых порождённых подграфов для $\mathcal{X}$ единственно и обозначается через $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$.

Пусть Π — какая-нибудь NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов называется Π-*простым*, если задача Π в этом классе полиномиально разрешима, и Π-*сложным* в противном случае. На протяжении настоящей статьи предполагается, что P$\neq$NP, и это условие не включается явно в формулировки теорем и других утверждений. Например, такого: если задача Π остаётся NP-полной для графов из наследственного класса $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ является Π-сложным.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–01–00357) и лаборатории «ТАПРАДЕСС» (номер проекта 61.1).

Естественный способ описания границы между П-простыми и П-сложными классами состоит в поиске максимальных (по включению) П-простых и минимальных П-сложных классов. Известно, что максимальных П-простых классов не существует ни для одной задачи П. С другой стороны, в [2] показано, что при любом $k > 2$ для задачи о k-раскраске нет минимальных сложных классов, а для задачи о вершинном списковом ранжировании были указаны такие классы. Исследования по выявлению минимальных сложных классов были продолжены в [1, 3]. Так, в [3] доказано, что класс полных графов является минимальным для задачи о рёберном списковом ранжировании. Из результатов [1] легко следует, что класс $\mathcal{S}tar$, описание которого дано в конце введения, также является минимальным сложным для этой же задачи. В настоящей работе продолжаются исследования по выявлению минимальных сложных классов для задачи о рёберном списковом ранжировании (задачи РСР).

Задача РСР заключается в следующем. Пусть заданы граф G с множеством рёбер E и множество $L = \{L(e) \mid e \in E\}$, где $L(e)$ — конечное множество натуральных чисел (цветов, в которые разрешается покрасить ребро e). *L-ранжированием рёбер* графа G называется такая раскраска c его вершин, что

(i) $c(e) \in L(e)$ для каждого ребра e;

(ii) если $c(e_1) = c(e_2)$, $e_1 \neq e_2$, то каждый путь, соединяющий e_1 и e_2, содержит такое ребро e_3, что $c(e_3) > c(e_1)$.

Задача РСР состоит в том, чтобы по данным G и L определить, существует ли L-ранжирование рёбер графа G. Под РСР-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача РСР решается для графов этого класса за полиномиальное время при любом множестве L.

Полезным инструментом поиска новых (минимальных) П-сложных классов является преобразование уже известных классов с сохранением NP-полноты задачи П. Вполне возможно, что полученный при такой операции класс будет либо сам минимальным П-сложным, либо близок к минимальному. Эта идея используется в данной работе при доказательстве РСР-минимальности некоторого класса графов. Введём понятие продолжения класса графов. Класс $\mathcal{Y}$ называется *продолжением* класса $\mathcal{X}$, если выполняются следующие условия: (a) для любого графа $G \in \mathcal{X}$ существует такой граф $H \in \mathcal{Y}$, что G является остовным подграфом графа H; (b) в любом графе из $\mathcal{Y}$ существует остовный подграф, принадлежащий классу $\mathcal{X}$.

Данная работа содержит результаты двойного рода. В первой части доказывается замкнутость классов графов с NP-полной задачей PCP относительно перехода к продолжению и на основании этого свойства устанавливается PCP-минимальность класса $\mathcal{C}amomile$. Во второй части полностью описана совокупность минимальных PCP-сложных классов графов, которые можно получить продолжениями класса $\mathcal{S}tar$.

В статье приняты следующие обозначения: $K_4 - e$ — граф, получаемый из графа K_4 удалением ребра, S_i — граф, получаемый подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$ (его вершину степени i будем называть *центральной*), $\mathcal{C}lique$ — класс полных графов, $\mathcal{C}Bipartite$ — множество полных двудольных графов, $\mathcal{S}tar$ — совокупность графов, являющихся порождёнными подграфами для графов из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{S_i\}$, $\mathcal{C}amomile$ — класс графов, являющихся порождёнными подграфами для графов из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{(K_1 \circ iK_2)\}$ (через $G_1 \circ G_2$ обозначается граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством рёбер $E(G_1) \cup E(G_2) \cup V(G_1) \times V(G_2)$).

1. О минимальности класса $\mathcal{C}amomile$ для задачи о рёберном списковом ранжировании

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{Y}$ — произвольный класс графов, являющийся продолжением класса $\mathcal{X}$ с* NP*-полной задачей* PCP. *Тогда задача* PCP NP*-полна в классе $\mathcal{Y}$.*

Доказательство. Покажем, что задача PCP в классе графов $\mathcal{X}$ полиномиально сводима к той же задаче в классе $\mathcal{Y}$. Отсюда будет следовать утверждение леммы.

Пусть G — произвольный граф класса $\mathcal{X}$, являющийся остовным подграфом графа $H \in \mathcal{Y}$. Рассмотрим L — назначение допустимых цветов рёбер графа G. Пусть k — наибольший цвет в L. Рассмотрим следующее множество допустимых цветов L' для рёбер графа H. Рёбра из $E(G)$ имеют то же множество допустимых цветов, что и в G, а для каждого добавленного ребра эта совокупность совпадает с $\{k+1, k+2, \ldots, k + |E(H)| - |E(G)|\}$. Очевидно, что L-ранжирование рёбер графа G существует тогда и только тогда, когда существует L'-ранжирование рёбер графа H. Поэтому имеет место указанное в первом абзаце сведение. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Класс $\mathcal{C}amomile$ является минимальным* PCP*-сложным.*

Доказательство. Поскольку класс $\mathcal{S}tar$ является PCP-сложным, из леммы 1 следует, что класс $\mathcal{C}amomile$ также является PCP-сложным. Докажем теперь его минимальность. Для этого покажем, что для любого фиксированного $G \in \mathcal{C}amomile$ класс $\mathcal{C}amomile \cap \mathrm{Free}(\{G\})$ является PCP-простым. Ранжирование рёбер несвязного графа есть объединение ранжирований рёбер его компонент связности. Поэтому при доказательстве минимальности можно ограничиться рассмотрением связных графов класса $\mathcal{C}amomile \cap \mathrm{Free}(\{G\})$. Легко проверить, что любой связный граф из этого класса содержит не более чем $|V(G)|$ нелистовых вершин. В [5] показано, что для любого фиксированного k задача PCP полиномиально разрешима в классе графов, у которых количество нелистовых вершин не превосходит k. Отсюда следует, что класс $\mathcal{C}amomile$ является минимальным PCP-сложным. Теорема 1 доказана.

Докажем следующую характеризацию класса $\mathcal{C}amomile$ в терминах запрещённых порождённых подграфов.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{Forb}(\mathcal{C}amomile) = \{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\}.$$

Доказательство. Поскольку ни один из графов $C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4$ не принадлежит классу $\mathcal{C}amomile$ и любой порождённый подграф каждого из указанных графов принадлежит этому классу, справедливо включение

$$\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\} \subseteq \mathrm{Forb}(\mathcal{C}amomile).$$

Таким образом, $\mathcal{C}amomile \subseteq \mathrm{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\})$. Докажем обратное включение.

Пусть G — произвольный граф класса $\mathrm{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\})$. Можно считать, что при любых p и q граф G отличен от графа $pK_2 \oplus qK_1$, поскольку все такие графы принадлежат классу $\mathcal{C}amomile$. Отсюда следует, что граф G является связным (так как $G \in \mathrm{Free}(\{P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1\})$). Если G не содержит вершин степени 3 и более, то $G = P_3$ (ввиду того, что $G \in \mathrm{Free}(\{C_4, P_4\})$). Граф P_3 принадлежит классу $\mathcal{C}amomile$. Теперь будем предполагать, что граф G содержит вершину x, смежную с вершинами y_1, y_2, y_3.

Покажем, что в графе G нет вершины, находящейся от x на расстоянии 2. Предположим противное, тогда существует путь P длины 2, одним из концов которого является вершина x. Легко проверить, что среди вершин y_1, y_2, y_3 существует вершина y, не смежная ни с одной вершиной пути $P \setminus \{x\}$ (в противном случае порождается один из графов $C_4, K_4, K_4 - e$). Но тогда вершина y и вершины пути P порождают подграф P_4. Получаем противоречие, т. е. все вершины из $V(G) \setminus \{x\}$

смежны с x. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_4\})$, в графе G окрестность вершины x порождает подграф вида $pK_2 \oplus qK_1$. Таким образом, $G \in \mathcal{C}amomile$, поэтому

$$\mathrm{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\}) \subseteq \mathcal{C}amomile.$$

Итак, из обоих доказанных включений заключаем, что

$$\mathcal{C}amomile = \mathrm{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\}).$$

Отсюда и из рассуждений первого абзаца следует, что

$$\mathrm{Forb}(\mathcal{C}amomile) = \{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\}.$$

Лемма 2 доказана.

2. О полноте множества минимальных PCP-сложных классов, полученных в рамках рассматриваемого подхода

Идея замкнутости множества классов графов с NP-полной задачей PCP использована в [3] при доказательстве минимальности класса $\mathcal{C}lique$ для задачи PCP и при установлении PCP-сложности класса $\mathcal{B}Complete$ и показано, что существует единственный минимальный PCP-сложный подкласс класса $\mathcal{B}Complete$. Обозначим этот подкласс через $\mathcal{B}C$. В данном разделе доказывается непополняемость относительно рассматриваемого преобразования множества $\{\mathcal{S}tar, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique, \mathcal{B}C\}$. Иными словами, будет показано, что добавление рёбер к графам класса $\mathcal{S}tar$ порождает только минимальные PCP-сложные классы $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}amomile$, $\mathcal{C}lique$ и $\mathcal{B}C$.

Напомним, что *наследственным замыканием* некоторой совокупности графов называется множество всех их порождённых подграфов. Наследственное замыкание класса $\mathcal{X}$ будем обозначать через $[\mathcal{X}]$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X}$ — продолжение класса $\mathcal{S}tar$. Тогда либо $[\mathcal{X}] \supseteq \mathcal{S}tar$, либо $[\mathcal{X}] \supseteq \mathcal{C}amomile$, либо $[\mathcal{X}] \supseteq \mathcal{C}lique$, либо $[\mathcal{X}] \supseteq \mathcal{B}C$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда $[\mathcal{X}] \not\supseteq \mathcal{S}tar$, $[\mathcal{X}] \not\supseteq \mathcal{C}amomile$, $[\mathcal{X}] \not\supseteq \mathcal{C}lique$, $[\mathcal{X}] \not\supseteq \mathcal{B}C$. Поскольку $[\mathcal{X}] \not\supseteq \mathcal{C}lique$, для некоторого s справедливо включение $[\mathcal{X}] \subseteq \mathrm{Free}(\{K_s\})$. Пусть k — произвольное натуральное число. Рассмотрим произвольный граф $G \in [\mathcal{X}]$, для которого относительно рассматриваемого преобразования S_i является остовным графом с центральной вершиной x. Пусть i достаточно большое. Поскольку G не содержит клики размера s, по теореме Рамсея в подграфе, порождённом окрестностью x, содержится достаточно большое независимое множество V_1. Рассмотрим в G вершины (кроме x), смежные хотя бы с одной вершиной из V_1. Ясно, что порождённый данными вершинами граф содержит достаточно большое независимое множество V_2. Поскольку i достаточно большое, граф G содержит такой порождённый подграф H, что $V(H) \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \{x\}$ и S_k является остовным графом в H (S_k назовём *носителем* графа H). Таким образом, при любом k класс $[\mathcal{X}]$ содержит граф, получаемый из S_k добавлением рёбер, инцидентных вершинам, находящимся на разных расстояниях от центральной вершины. Обозначим через $\mathcal{Y}$ всю совокупность графов такого типа по всем значениям k. Поскольку $[\mathcal{X}] \not\supseteq \mathcal{C}amomile$, то и $\mathcal{Y} \not\supseteq \mathcal{C}amomile$. Отсюда следует, что $\mathcal{Y}$ содержит бесконечное множество графов, не содержащих треугольников. Данное множество (т. е. графы из $\mathcal{Y}$ без треугольников) обозначим через $\mathcal{Z}$. Через $\mathcal{Z}'$ обозначим совокупность графов, получаемых из графов класса $\mathcal{Z}$ удалением центральных вершин их носителей. Очевидно, что все графы из $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$ двудольны. Поскольку $[\mathcal{X}] \not\supseteq \mathcal{BC}$, при некотором t справедливо включение $\mathcal{Z}' \subseteq \mathrm{Free}(\{K_{t,t}\})$.

Известно [4], что количество рёбер в сбалансированном двудольном графе с n вершинами, не содержащем подграфа $K_{t,t}$, не превосходит $(t-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} + \frac{t-1}{2} n$. Очевидно, что при любом n класс $\mathcal{Z}'$ содержит двудольный граф G с 2^n вершинами в каждой из долей. Пусть n достаточно большое. Рассмотрим в графе G произвольное паросочетание M с 2^n рёбрами. Покажем, что M содержит паросочетание M' из $n([2^{n(1-\frac{1}{2t})}]+2)$ рёбер, каждое из которых смежно не более чем с $[2^{n(1-\frac{1}{2t})}]$ рёбрами графа G. Предположив противное, заключаем, что во множестве $M \setminus M'$ не менее чем $2^n - n([2^{n(1-\frac{1}{2t})}] + 2)$ рёбер, каждое из которых смежно с не менее чем $[2^{n(1-\frac{1}{2t})}]$ рёбрами графа G. Таким образом, граф G содержит не менее чем $\frac{(2^n - n([2^{n(1-\frac{1}{2t})}]+2))([2^{n(1-\frac{1}{2t})}])}{2}$ рёбер. Легко проверить выполнение неравенства

$$\frac{(2^n - n([2^{n(1-\frac{1}{2t})}] + 2))([2^{n(1-\frac{1}{2t})}])}{2} > (t-1)^{\frac{1}{2t}} 2^{n(2-\frac{1}{t})} + \frac{t-1}{2} 2^n,$$

что противоречит оценке из [4]. Тем самым сделанное предположение неверно, т. е. существует множество M' с указанными свойствами. Из принципа Дирихле следует, что M' содержит n рёбер, которые порождают в G паросочетание.

Итак, рассуждения привели к тому, что для любого k граф S_k принадлежит классу $\mathcal{Z}$, а значит, и классу $[\mathcal{X}]$. Отсюда следует, что $[\mathcal{X}] \supseteq \mathcal{S}tar$, поэтому изначальное предположение неверно. Таким образом, выполняется хотя бы одно из включений формулировки теоремы. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малышев Д. С.** О минимальных сложных элементах решётки наследственных классов графов // Материалы VII молодёжной научной школы по дискретной математике и её приложениям (Москва, 18–23 мая 2009), часть II. — ????: ????, ???. — С. 12–17.
2. **Малышев Д. С.** О минимальных сложных классах графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 43–51.
3. **Малышев Д. С.** Последовательные минимумы решетки наследственных классов графов для задачи о рёберном списковом ранжировании // Вестн. Нижегородского ун-та. — 2010. — №5. — С. ???–???.
4. **Bollobas B.** Extremal graph theory. — London: Academic Press, 1978. — 488 p.
5. **Dereniowski D.** The complexity of list ranking of trees // Ars Combinatoria. — 2008. — Vol. 86. — P. 97–114.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
18 июня 2010 г.